*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2010. Том 51, № 3*

*УДК 531.36*

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОМСОНОВСКОГО ВИХРЕВОГО МНОГОУГОЛЬНИКА С ЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ ВИХРЕЙ ВНЕ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

**Л. Г. Куракин, И. В. Островская**

**Аннотация.** Рассматривается задача устойчивости стационарного вращения правильного точечного вихревого $n$-угольника, расположенного вне круговой области. После работы Хавелока (1931) осталось неясным ее полное решение в случае $2 \leq n \leq 6$. В данной работе получены исчерпывающие результаты для четного числа вихрей $n = 2, 4, 6$.

**Ключевые слова:** устойчивость, точечный вихрь, стационарное движение, гамильтоновы системы.

## Введение

Модель точечных вихрей использовалась лордом Кельвиным (W. Thomson) в конце девятнадцатого века в его вихревой теории атома. Хотя эта теория была отвергнута, математическая модель выжила и приобрела новую актуальность в связи с исследованием вихрей в жидком гелии [1, 2] и электронных колонн в физике плазмы [3, 4].

Лорд Кельвин поставил вопрос об устойчивости стационарного вращения системы $n$ одинаковых точечных вихрей, помещенных в вершинах правильного $n$-угольника [5]. Благодаря работам [6, с. 94–108] и [7] вопрос полностью решен в линейной постановке. В точной нелинейной постановке ответ получен сравнительно недавно [8–11]: устойчивость имеет место лишь при $n \leq 7$, а при $n \geq 8$ рассматриваемый режим неустойчив. При этом в случае $n \neq 7$ линейный анализ оказывается достаточным для заключения о нелинейной устойчивости [8], а при $n = 7$ необходимо привлекать к рассмотрению и нелинейные члены.

Решена в точной нелинейной постановке и проблема Кельвина, обобщенная на сферу (см. работы [12–16], а также обзор [17]). Доказано, что кривизна не может стабилизировать томсоновский вихревой многоугольник и, в частности, делает семиугольник неустойчивым.

В работах [7, 18–20] проблема Кельвина исследована, когда вихри находятся внутри круговой области. В [7] доказана экспоненциальная неустойчивость решения при $n \geq 7$. В случае четного числа вихрей $n = 2, 4, 6$ в этой задаче устойчивости возникает лишь один критический случай — двукратного нулевого корня (жорданова клетка). Поэтому ее анализ удалось провести в рамках

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (гос. контракт № 02.740.11.5189), грантов АФГИР–РФФИ (коды проектов RUM1–2943–RO–09, 09–01–92504–ИК) и РФФИ (коды проектов 08–01–00895, 10–05–00646). Исследование выполнено в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (№ 2.1.1/554).

единого подхода [18, 19]. Для вихревого треугольника [20] проблема рассыпается на серию задач, требующих индивидуального подхода. Для их решения были применены результаты КАМ-теории. Оказалось, что здесь встречаются все критические случаи, связанные с главными резонансами до четвертого порядка включительно. При исследовании пентагона [18] возникают принципиально новые проблемы.

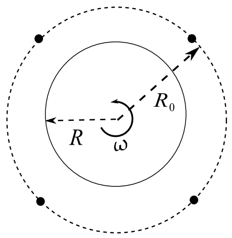


Рис. 1. Стационарное вращение правильного вихревого $n$-угольника вне круговой области. Угловая скорость вращения $\omega$ и устойчивость зависят от параметра $q = R^2/R_0^2$.

В данной статье проблема Кельвина рассмотрена в случае, когда вихревой $n$-угольник радиуса $R_0$ расположен вне круговой области радиуса $R$ с общим центром симметрии (рис. 1). Математическими методами она впервые исследована в [7] в линейной постановке. В [7] было показано, что соответствующая линеаризованная система имеет экспоненциально растущие решения при $n \geq 7$, а также во всех остальных случаях $2 \leq n \leq 6$, когда параметр $q = R^2/R_0^2$ больше некоторой критической величины: $q_{*n} < q < 1$ (см. табл. 1). Во всех остальных случаях в линейной системе имеется лишь степенная неустойчивость, обычная и неизбежная для такого рода систем. Согласно известной теореме Ляпунова равновесие полной системы неустойчиво, когда линеаризованная система экспоненциально неустойчива. Степенной неустойчивости линеаризованной системы для такого заключения недостаточно — нужно привлекать нелинейные слагаемые.

**Таблица 1.** Критические значения $q_{*n}$ — корни полиномов $P_n$.

| $P_n$ | $q_{*n}$ |
|---|---|
| $P_2 = -9q^3 + 13q^2 + 5q - 1$ | $q_{*2} \approx .1485355172$ |
| $P_4 = -9q^6 + 17q^4 + 9q^2 - 1$ | $q_{*4} \approx .3081247740$ |
| $P_6 = -25q^9 + 61q^6 + 37q^3 - 1$ | $q_{*6} \approx .2959846033$ |

Ниже получены исчерпывающие результаты для четного числа вихрей $n = 2, 4, 6$ вне круговой области. В частности, доказана устойчивость вихревого $n$-угольника при $0 < q < q_{*n}$. При этом устойчивость стационарного вращения трактовалась как устойчивость по Раусу (см., например, [9–11]).

Устойчивость для граничных значений параметра интересно изучить, чтобы выяснить, «опасной» или «безопасной» (по Баутину [21]) является эта граница. Другими словами, жестко или мягко происходит потеря устойчивости томсоновского многоугольника, когда параметр $q$, возрастая, проходит через критическое значение $q_{*n}$?

В данной работе критический случай устойчивости $q = q_{*n}$, $n = 2, 4, 6$, рассмотрен в точной нелинейной постановке. Для решения вопроса об устойчивости пришлось привлечь слагаемые разложения ряда Тейлора приведенного (редуцированного) гамильтониана до четвертого порядка включительно. При этом были применены результаты работ [22, 23] (см. также обзор [24]), касающиеся устойчивости равновесия гамильтоновой системы в критическом случае двукратного нулевого корня (случай непростых делителей). Доказана неустойчивость вихревого $n$-угольника при $q = q_{*n}$, $n = 2, 4, 6$. Следует отметить, что в аналогичной задаче, когда вихри расположены внутри круговой области, имеет место устойчивость по Раусу [18, 19].

Статья организована следующим образом. В п. 1 выписаны уравнения движения $n$ точечных вихрей вне круговой области, указаны их интегралы и группы симметрии. Затем напоминается определение стационарного движения (см., например, [9–11]). Группе вращений уравнений движения отвечает стационарное вращение правильного вихревого многоугольника вне круговой области в случае вихрей одинаковой интенсивности. П. 2 посвящен устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника вне круговой области. Отмечается, что в данной задаче имеет место неустойчивость по Ляпунову при любом $n \geq 2$. Разъясняется, что устойчивость перманентного вращения правильного вихревого многоугольника нужно трактовать как устойчивость по Раусу. В теореме 2.1 проведено обоснование метода линеаризации при $n = 2, 4, 6$ и $n \geq 7$. В теореме 2.2 доказана неустойчивость стационарного вращения вихревого многоугольника в критическом случае $q = q_{*n}$, $n = 2, 4, 6$.

Здесь не рассматривалась задача устойчивости вихревого треугольника и пентагона вне круговой области. Как и в случае точечных вихрей, внутри круговой области проблема рассыпается на серию содержательных задач. Их решению авторы надеются посвятить отдельные работы.

## 1. Уравнения движения

Рассмотрим движение $n$ точечных вихрей вне круга радиуса $R$. Каждому вихрю интенсивности $\varkappa$ отвечает отраженный вихрь интенсивности $-\varkappa$ в точке, сопряженной с данной относительно границы круга. Предположим, как и в работах [7, 25], бесциркулянтность обтекания круга. Это делает корректным предельный переход к обычной задаче на плоскости при стремлении радиуса круга к нулю и равносильно тому, что к системе $n$ отраженных вихрей добавляется еще один вихрь, расположенный в центре круга с интенсивностью, равной сумме интенсивностей исходных вихрей. Отраженные вихри не взаимодействуют между собой и центральным вихрем.

Движение системы $n$ точечных вихрей на плоскости вне круга радиуса $R$ описывается уравнениями [7, 25]:

$$\dot{z}_k^* = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{j=1}^{n}{}' \frac{\varkappa_j}{z_k - z_j} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\varkappa_j}{z_k - \hat{z}_j} + \frac{1}{z_k}\sum_{j=1}^{n}\varkappa_j\right), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Здесь $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, n$, — комплексные переменные, $x_k$, $y_k$ — декартовы координаты $k$-го вихря, $\varkappa_k$ — его интенсивность, $\hat{z}_k = \frac{R^2}{\bar{z}_k^*}$ — отражение $k$-го вихря границей круга. Штрих означает пропуск слагаемого $j = k$, а звездочка — комплексное сопряжение. Фазовое пространство $Z$ системы (1.1) есть $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^n$ с вырезами вдоль всех гиперплоскостей $z_j = z_k$, $j \neq k$.

Система (1.1) гамильтонова с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi}\sum_{1\leq j<k\leq n}\varkappa_j\varkappa_k \ln|z_j - z_k|^2 + \frac{1}{8\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\varkappa_j\varkappa_k \ln\left|R^2 - z_j z_k^*\right|^2 - \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\varkappa_j\varkappa_k \ln|z_k|^2$$

имеет два интеграла: энергию $H$ и суммарный момент инерции

$$M = \sum_{k=1}^{n} \varkappa_k |z_k|^2. \tag{1.2}$$

Система (1.1) инвариантна относительно группы $G$, образующие которой суть зеркальное отражение $j : z \mapsto z^*$ и вращение $g^{\mathrm{rot}} : z \mapsto e^{i\alpha} z$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Действие $g \mapsto L_g$ группы $G$ на фазовом пространстве $Z$ определяется равенством: $L_g z = (gz_1, \ldots, gz_n)$ для любой точки $z = (z_1, \ldots, z_n) \in Z$ и любого движения $g \in G$.

Напомним (см., например, [9–11]), что *стационарным* называется движение, которое осуществляется преобразованиями некоторой однопараметрической подгруппы группы симметрии данного уравнения.

Стационарное движение, отвечающее подгруппе вращений $g^{\mathrm{rot}}$, разыскиваем в виде $z_k = e^{i\omega t} u_k$. Тогда уравнение стационарных движений записывается в виде системы

$$-i\omega u_k^* = \frac{1}{2\pi i}\left( {\sum_{j=1}^{n}}' \frac{\varkappa_j}{u_k - u_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j}{u_k - \hat{u}_j} + \frac{1}{u_k} \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j \right), \quad k = 1, \ldots, n,$$

для неизвестных $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}$ и $\omega \in \mathbb{R}$.

В случае одинаковых интенсивностей $\varkappa_1 = \cdots = \varkappa_n = \varkappa$ известно ее точное решение:

$$u_k = R_0 e^{2\pi i (k-1)/n}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.3}$$

$$\omega = \frac{\varkappa}{4\pi R_0^2} \left( 3n - 1 - \frac{2n}{1 - q^n} \right), \tag{1.4}$$

где введено обозначение $q = \frac{R^2}{R_0^2}$, а величина $R_0$ удовлетворяет неравенству $0 < R < R_0$.

Соответствующий стационарный режим дается равенствами

$$z_k(t) = e^{i\omega t} u_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Таким образом, конфигурация одинаковых вихрей, расположенных вне круговой области радиуса $R$ на окружности радиуса $R_0$ в вершинах правильного $n$-угольника, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \omega(q)$.

## 2. Устойчивость правильного вихревого $n$-угольника

Предположим, что все вихри имеют одинаковую интенсивность $\varkappa$. Исследуем устойчивость стационарного решения (1.3)–(1.5).

Заметим, что режим стационарного вращения при всех $n$ заведомо неустойчив по Ляпунову. Действительно, если в начальный момент $t = 0$ возмутить правильный вихревой $n$-угольник так, чтобы он остался правильным, но другого размера, то дальнейшее движение по-прежнему будет равномерным вращением, но с другой угловой скоростью. В результате, как бы ни было мало такое возмущение сначала, со временем оно станет порядка диаметра многоугольника. Этой очевидной неустойчивости соответствуют линейно растущее решение линеаризованной системы и жорданова клетка $2 \times 2$ матрицы линеаризации, отвечающей ее нулевому двукратному собственному значению. Такая ситуация обычна для стационарных движений гамильтоновых систем при наличии циклических координат.

Поскольку в случае перманентного вращения устойчивость по Ляпунову невозможна, мы должны уточнить определения. Это сделано ниже. Пока лишь заметим, что как устойчивость, так и неустойчивость понимаются в самом сильном возможном смысле.

По поводу специфических для стационарных движений определений устойчивости и неустойчивости отошлем к работе [11]. В ней представлена общая теория стационарных движений динамической системы с группой симметрии. При этом консервативность системы не предполагается, так что результаты применимы не только к различным режимам вихревых течений идеальной жидкости, но и, например, к движениям вязкой жидкости.

Замена переменных в системе (1.1)

$$z_k(t) = e^{i\omega t} v_k(t)$$

приводит к уравнению относительного движения

$$\dot v_k^* = \frac{\varkappa}{2\pi i}\left(\sum_{j=1}^{n}{}' \frac{1}{v_k - v_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{v_k - \hat v_j} + \frac{n}{v_k}\right) + i\omega v_k^*, \quad k = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$

с относительным гамильтонианом

$$E(v) = H(v) + \frac{\omega}{2} M(v), \quad M = \varkappa \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2, \tag{2.2}$$

где $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$.

На каждой плоскости переменных $v_k$ введем новые координаты и запишем $v_k$ в виде

$$v_k = \sqrt{2\left(\frac{R_0^2}{2} + r_k\right)} e^{i\left(\frac{2\pi}{n}(k-1) + \theta_k\right)}. \tag{2.3}$$

Замена переменных (2.3) сохраняет гамильтонову структуру системы.

В переменных $r = (r_1, \dots, r_n)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ уравнение (2.1) принимает вид

$$\dot r_k = \frac{\partial E}{\partial \theta_k}(v(r,\theta)), \quad \dot\theta_k = -\frac{\partial E}{\partial r_k}(v(r,\theta)). \tag{2.4}$$

Гамильтониан $E$ в новых переменных $(r, \theta)$ имеет вид

$$E = -\frac{\varkappa^2}{4\pi} \sum_{1 \le j < k \le n} \ln\left[2(1 + r_k + r_j) - 2\sqrt{(1+2r_k)(1+2r_j)} \cos\left(\frac{2\pi(k-j)}{n} + \theta_{kj}\right)\right]$$
$$+ \frac{\varkappa^2}{8\pi} \sum_{j,k=1}^{n} \ln\left[(1+2r_k)(1+2r_j) + q^2 - 2q\sqrt{(1+2r_k)(1+2r_j)} \cos\left(\frac{2\pi(k-j)}{n} + \theta_{kj}\right)\right]$$
$$- \frac{n\varkappa^2}{4\pi} \sum_{k=1}^{n} \ln\bigl(1 + 2r_k\bigr) + \frac{\omega}{2} \sum_{k=1}^{n} (1 + 2r_k), \quad \theta_{kj} = \theta_k - \theta_j.$$

Здесь и далее для удобства выкладок будем полагать $R_0 = 1$, так что $q = R^2$.

Стационарному движению (1.3)–(1.5) отвечает непрерывное семейство равновесий системы (2.4), расположенное на прямой $\Gamma = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^{2n}\colon\ r = 0,\ \theta_1 = \dots = \theta_n\}$.

Относительный гамильтониан $E(v(\rho))$ инвариантен относительно замены

$$\rho \to \rho + \gamma\rho_0, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \rho_0 = (0, \theta_0) \in \Gamma, \tag{2.5}$$

поэтому разложение функции $E(v(\rho))$, $\rho \overset{\text{def}}{=} (r,\theta)$ в ряд Тейлора одно и то же в окрестности любого равновесия семейства $\Gamma$:

$$E(v(\rho)) = \frac{\varkappa^2}{4\pi}(E_0 + E_2(v(\rho)) + E_3(v(\rho)) + E_4(v(\rho)) + \dots), \tag{2.6}$$

где точками обозначены слагаемые выше четвертой степени. Квадратичная форма $E_2$ представима в виде

$$E_2 = (S\rho, \rho), \quad S = \begin{pmatrix} F_1 & \frac{1}{2}G_0 \\ -\frac{1}{2}G_0 & F_2 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Матрица линеаризации системы (2.4) на нулевом равновесии имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} -G_0 & 2F_2 \\ -2F_1 & -G_0 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Матрицы $F_1, F_2, G_0$ являются циркулянтами (см. [26] и [11, дополнение A]), причем $F_1$, $F_2$ — симметрические, а $G_0$ — кососимметрическая матрицы. Они выписаны в [7] и являются полиномами от циклической матрицы $C = \{c_{k\ell}\}_{k,\ell=1}^n$, у которой отличны от нуля только коэффициенты над главной диагональю $c_{12} = \dots = c_{n-1,n} = 1$ и в левом нижнем углу $c_{n1} = 1$:

$$F_m \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} f_{mk}C^k, \quad G_0 \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} g_{0k}C^k.$$

Коэффициенты $f_{1k}$, $f_{2k}$, $g_{0k}$, $k = 0, \dots, n-1$, заданы формулами

$$\begin{aligned}
f_{10} &= -\frac{n^2-1}{12} + (n-1) - \frac{2nq^n}{1-q^n} - \frac{n^2q^n}{(1-q^n)^2} - \frac{q}{(1-q)^2}, \\
f_{1k} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\cos\frac{2\pi k}{n}} - \frac{q\big((1+q^2)\cos\frac{2\pi k}{n} - 2q\big)}{\big(1-2q\cos\frac{2\pi k}{n} + q^2\big)^2}, \quad k = 1, \dots, n-1, \\
f_{20} &= \frac{n^2-1}{12} + \frac{n^2q^n}{(1-q^n)^2} - \frac{q}{(1-q)^2}, \\
f_{2k} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\cos\frac{2\pi k}{n}} - \frac{q\big((1+q^2)\cos\frac{2\pi k}{n} - 2q\big)}{\big(1-2q\cos\frac{2\pi k}{n} + q^2\big)^2}, \quad k = 1, \dots, n-1, \\
g_{0k} &= -\frac{2q(1-q^2)\sin\frac{2\pi k}{n}}{\big(1-2q\cos\frac{2\pi k}{n} + q^2\big)^2}.
\end{aligned}$$

Собственные значения $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}$ и $i\lambda_{0k}$ $(k = 1, \dots, n)$ матриц $F_1$, $F_2$ и $G_0$ соответственно также выписаны в [7]:

$$\lambda_{1k} = -\frac{k(n-k)}{2} + (n-1) - \frac{2nq^n}{1-q^n} - \frac{n^2q^{n-k}(1+q^k)^2}{2(1-q^n)^2} - \frac{nk(q^k - q^{n-k})}{2(1-q^n)}, \tag{2.9}$$

$$\lambda_{2k} = \frac{1}{2}k(n-k) - \frac{nk(q^k - q^{n-k})}{2(1-q^n)} - \frac{n^2q^{n-k}(1-q^k)^2}{2(1-q^n)^2}, \tag{2.10}$$

$$\lambda_{0k} = -\frac{nk(q^k + q^{n-k})}{1-q^n} + \frac{n^2q^{n-k}(1-q^{2k})}{(1-q^n)^2}. \tag{2.11}$$

Собственные значения матрицы $S$ получаем, собирая корни полиномов

$$\Lambda^2 - (\lambda_{1k} + \lambda_{2k})\Lambda + \lambda_{1k}\lambda_{2k} - \frac{1}{4}\lambda_{0k}^2, \quad k = 1, \dots, n, \tag{2.12}$$

а у матрицы линеаризации $L$ они вычисляются по формулам [7]

$$\sigma_k^{\pm} = -i\lambda_{0k} \pm 2\sqrt{-\lambda_{1k}\lambda_{2k}}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2.13}$$

Следующая теорема обосновывает метод линеаризации в задаче устойчивости вихревого $n$-угольника вне круговой области при $n = 2, 4, 6$ и $n \geq 7$. *Устойчивость по Раусу стационарного решения* (1.5) означает устойчивость семейства равновесий $\Gamma$ уравнения относительного движения (2.1) (см. [9–11]). Неустойчивость понимается в наиболее сильном смысле — (трансверсально) неустойчиво инвариантное множество стационарных вращений. Величины $q_{*n}$ приведены в табл. 1.

**Теорема 2.1.** *Стационарное вращение* (1.5) *правильного вихревого $n$-угольника вне круговой области радиуса $R$ при $n = 2, 4, 6$ устойчиво по Раусу в случае $0 < q < q_{*n}$ и неустойчиво при $q_{*n} < q < 1$. В случае $n \geq 7$ при любых $q \in (0, 1)$ имеет место неустойчивость.*

Доказательство этой теоремы состоит в исследовании собственных значений матриц $S$ и $L$. Утверждение теоремы о неустойчивости доказано в [7]. Для удобства читателя мы повторяем соответствующие результаты для случая четного числа вихрей.

Наличие собственных значений (2.13) матрицы линеаризации $L$ (2.8) в правой полуплоскости равносильно выполнению неравенства

$$\lambda_{1k}\lambda_{2k} < 0 \tag{2.14}$$

по крайней мере при одном значении индекса $k = 1, \dots, n$.

Из (2.9), (2.10) следует, что $\lambda_{1k}$ и $\lambda_{2k}$ симметричны по $k$ и $n - k$. Чтобы изучить критическое значение индекса $k$, положим его равным $k = n/2$ для четных $n$.

Величина $\lambda_{2\frac{n}{2}}$ при $0 < q < 1$ всегда положительна:

$$\lambda_{2\frac{n}{2}} = \frac{n^2(1 - q^{n/2})^2}{8(1 + q^{n/2})^2}. \tag{2.15}$$

Условие отрицательности величины $\lambda_{1\frac{n}{2}}$:

$$\lambda_{1\frac{n}{2}} = -\frac{1}{8}n^2 + n - 1 - \frac{1}{2}\frac{n^2 q^{n/2}}{(1 + q^{n/2})^2} - \frac{2nq^n}{1 - q^n} < 0, \tag{2.16}$$

перепишем в виде

$$P_{2m} > 0, \tag{2.17}$$

$P_{2m} \stackrel{\text{def}}{=} (n^2 - 24n + 8)q^{3n/2} + (3n^2 + 24n - 8)q^n + (3n^2 + 8n - 8)q^{n/2} + n^2 - 8n + 8.$

Неравенство (2.17) выполняется для $n \geq 8$ и $q \in (0, 1)$. Полиномы $P_2$, $P_4$, $P_6$ выписаны в табл. 1.

Обратимся теперь к собственным значениям матрицы $S$, задаваемым уравнениями (2.12). Условие их положительности имеет вид

$$\lambda_{1k} > 0, \tag{2.18}$$

$$\lambda_{1k}\lambda_{2k} - \frac{1}{4}\lambda_{0k}^2 > 0. \tag{2.19}$$

Из выражений (2.11) следует, что $\lambda_{0\frac{n}{2}} = 0$ в случае четного $n$. Следовательно, при $k = \frac{n}{2}$ неравенство (2.19) противоположно неравенству (2.14).

Пусть $\Gamma^\perp = \mathbb{R}^{2n} \ominus \Gamma$ — подпространство пространства $\mathbb{R}^{2n}$, дополнительное к одномерному подпространству $\Gamma$, целиком заполненному равновесиями системы (2.4). Переменная $\rho = (r, \theta) \in \mathbb{R}^{2n}$ представима в виде $\rho = \rho_\perp + \rho_0$, где $\rho_\perp \in \Gamma^\perp, \rho_0 \in \Gamma$. Обозначим через $S^\perp$ сужение матрицы $S$ на подпространство $\Gamma^\perp$, так что ее спектр устойчивости $\sigma(S^\perp)$ равен $\sigma(S) \diagdown \{0\}$.

Ввиду того, что относительный гамильтониан $E(v(\rho))$ инвариантен относительно замены (2.5), в окрестности любого равновесия семейства $\Gamma$ имеет место асимптотика:

$$E(v(\rho)) = E(v(\rho_\perp)) = \frac{\varkappa^2}{4\pi}(E_0 + (S^\perp \rho_\perp, \rho_\perp) + o(|\rho_\perp|^2)). \tag{2.20}$$

Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Все собственные значения матриц $S^\perp$ положительны. Поэтому квадратичная форма $E_2$ является положительно-определенной в подпространстве $\Gamma^\perp$. Теперь из асимптотики (2.20) следует, что относительный гамильтониан $E(v(\rho))$ достигает трансверсально строгого минимума на семействе равновесий $\Gamma$. Таким образом, стационарный режим (1.5) устойчив по Раусу.

Пусть выполнены условия неустойчивости теоремы 2.1. Матрица линеаризации $L$ имеет собственные значения в правой полуплоскости.

Для доказательства неустойчивости осталось заметить, что в рассматриваемой задаче трансверсальная компонента данной системы отделяется, т. е. оказывается независимой от тангенциальной. Поэтому неустойчивость для нее следует из общих теорем Ляпунова о неустойчивости. Это завершает доказательство теоремы 2.1.

Следующая теорема требует для своего доказательства учета нелинейных слагаемых системы.

**Теорема 2.2.** *Стационарное вращение* (1.4) *правильного вихревого $n$-угольника* ($n = 2, 4, 6$) *вне круговой области неустойчиво при критическом значении параметра $q = q_{*n}$.*

Доказательство разбивается на три этапа. На первом этапе проводится нормализация квадратичных слагаемых гамильтониана (2.6). Благодаря наличию циклической переменной число степеней свободы рассматриваемой гамильтоновой системы уменьшается на единицу. На третьем этапе проводится нормализация слагаемых редуцированного гамильтониана до четвертой степени. Затем применяются результаты работ [22–24] об устойчивости равновесия гамильтоновой системы в критическом случае двукратного нулевого корня. Этот критерий устойчивости сначала был получен для гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в работе [22], а затем обобщен на случай многомерных систем с $n$ степенями свободы [23] (см. обзор [24]).

Этап 1. Нормализация квадратичных слагаемых гамильтониана. Из формул (2.9), (2.10) следует, что при $q = q_{*n}$ ($n = 2, 4, 6$) собственные значения $\lambda_{1k}$, $\lambda_{2k}$ ($k = 1, \ldots, n$) матриц $F_1$, $F_2$ удовлетворяют условиям

$$\lambda_{1\frac{n}{2}} = 0, \quad \lambda_{2\frac{n}{2}} > 0, \tag{2.21}$$

неравенствам

$$\lambda_{1m} > 0, \quad \lambda_{1m}\lambda_{2m} > 0 \tag{2.22}$$

и равенствам

$$\lambda_{1(n-m)} = \lambda_{1m}, \quad \lambda_{2(n-m)} = \lambda_{2m}, \quad \lambda_{2n} = 0. \tag{2.23}$$

Здесь и далее $m = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$.

Матрицы $F_1$, $F_2$ имеют общий собственный базис

$$h_m = (1, \cos(m\alpha), \dots, \cos((n-1)m\alpha)), \quad \alpha = \frac{2\pi}{n},$$
$$h_{n-m} = (0, \sin(m\alpha), \dots, \sin((n-1)m\alpha)),$$
$$h_n = (1, 1, \dots, 1, 1), \quad h_{\frac{n}{2}} = (1, -1, \dots, 1, -1),$$

так что

$$F_j h_k = \lambda_{jk} h_k, \quad j = 1, 2, \; k = 1, \dots, n.$$

Для матрицы $G_0$ имеем соотношения

$$G_0 h_m = -\lambda_{0m} h_{n-m}, \quad G_0 h_{n-m} = \lambda_{0m} h_m.$$

Введем обозначение

$$\nu_k = \sqrt[4]{\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{1k}}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Собственные значения $\sigma_k^\pm$ $(k = 1, \dots, n, \; k \neq \frac{n}{2}, n)$ матрицы линеаризации $L$ задаются выражениями (2.13). Им отвечают собственные векторы

$$\mu_{1k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \nu_k h_k \\ -\nu_k^{-1} h_{n-k} \end{pmatrix} + i \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \nu_k h_{n-k} \\ \nu_k^{-1} h_k \end{pmatrix},$$
$$\mu_{2k} = -\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \nu_k h_k \\ \nu_k^{-1} h_{n-k} \end{pmatrix} + i \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \nu_k h_{n-k} \\ -\nu_k^{-1} h_k \end{pmatrix},$$

так что

$$L\mu_{1k} = \sigma_k^+ \mu_{1k}, \quad L\mu_{2k} = \sigma_k^- \mu_{2k}.$$

Заметим, что при любом значении параметра $q \in (0, 1)$ в жордановой форме матрицы $L$ имеется клетка

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

которой отвечают собственный вектор $g_{2n}$ и присоединенный вектор $g_n$:

$$g_n = -\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2\lambda_{1n}}} (h_n, h_0), \quad g_{2n} = \frac{\sqrt{2\lambda_{1n}}}{\sqrt{n}} (h_0, h_n). \tag{2.25}$$

Здесь участвует нулевой вектор $h_0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

В условиях $q = q_{*n}$ кратность нулевого собственного значения матрицы $L$ становится равной четырем — появляется еще одна клетка (2.24), которой соответствует собственный вектор

$$g_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2\lambda_{2\frac{n}{2}}}} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

и присоединенный вектор

$$g_{\frac{3n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{2\lambda_{2\frac{n}{2}}} \begin{pmatrix} h_{\frac{n}{2}} \\ h_0 \end{pmatrix}.$$

Построим симплектическую матрицу $A_n$ нормализующего преобразования матрицы $L$ (см. [27]). Введем обозначение $a_k \in \mathbb{R}^{2n}$ для $k$-й колонки матрицы $A_n$, так что

$$A_n = [a_1, a_2, \dots, a_{2n}]. \tag{2.26}$$

Четыре вектора $a_{\frac{n}{2}}, a_n, a_{\frac{3n}{2}}, a_{2n}$ имеют вид

$$a_{\frac{n}{2}} = -g_{\frac{n}{2}}, \quad a_{\frac{3n}{2}} = g_{\frac{3n}{2}}, \quad a_n = -g_n, \quad a_{2n} = g_{2n}, \tag{2.27}$$

а остальные задаются следующим образом:

$$a_m = -\operatorname{Im}\mu_{1m}, \quad a_{n-m} = -\operatorname{Im}\mu_{2m},$$

$$a_{n+m} = \operatorname{Re}\mu_{1m}, \quad a_{2n-m} = \operatorname{Re}\mu_{2m}, \quad m = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1.$$

Матрица $A_n$ симплектическая (см., например, [28]), т. е. выполнено условие

$$A_n^\top J A_n = J.$$

Здесь, как обычно,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, нужные нам матрицы перехода $A_2$, $A_4$, $A_6 = [B_6, C_6]$ имеют следующий вид:

$$A_2 = \begin{pmatrix} h_0 & \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{12}}}h_2 & \sqrt{\lambda_{21}}h_1 & h_0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_{21}}}h_1 & h_0 & h_0 & \sqrt{\lambda_{12}}h_2 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{\nu_1}{2}h_3 & -\sqrt{\frac{\lambda_{22}}{2}}h_2 & -\frac{\nu_1}{2}h_3 & \frac{1}{\sqrt{8\lambda_{14}}}h_4 & \frac{\nu_1}{2}h_1 & h_0 & -\frac{nu}{2}h_1 & h_0 \\ -\frac{1}{2\nu_1}h_1 & h_0 & \frac{1}{2\nu_1}h_1 & h_0 & \frac{1}{2\nu_1}h_3 & -\frac{1}{\sqrt{8\lambda_{22}}}h_2 & -\frac{1}{2\nu_1}h_3 & \sqrt{\frac{\lambda_{14}}{2}}h_4 \end{pmatrix},$$

$$B_6 = \begin{pmatrix} -\frac{\nu_1}{\sqrt{6}}h_5 & -\frac{\nu_2}{\sqrt{6}}h_1 & -\sqrt{\frac{\lambda_{23}}{3}}h_3 & -\frac{\nu_1}{\sqrt{6}}h_5 & -\frac{\nu_2}{\sqrt{6}}h_4 & \frac{1}{\sqrt{12\lambda_{16}}}h_6 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}\nu_1}h_1 & -\frac{1}{\sqrt{6}\nu_2}h_2 & h_0 & \frac{1}{\sqrt{6}\nu_1}h_1 & \frac{1}{\sqrt{6}\nu_2}h_2 & h_0 \end{pmatrix},$$

$$C_6 = \begin{pmatrix} \frac{\nu_1}{\sqrt{6}}h_1 & \frac{\nu_2}{\sqrt{6}}h_2 & h_0 & -\frac{\nu_1}{\sqrt{6}}h_1 & -\frac{\nu_2}{\sqrt{6}}h_2 & h_0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}\nu_1}h_5 & -\frac{1}{\sqrt{6}\nu_2}h_4 & \frac{1}{\sqrt{12\lambda_{23}}}h_3 & -\frac{1}{\sqrt{6}\nu_1}h_5 & -\frac{1}{\sqrt{6}\nu_2}h_4 & \sqrt{\frac{\lambda_{16}}{3}}h_6 \end{pmatrix}.$$

После симплектической замены переменных

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n),$$

квадратичные слагаемые $E_2$ разложения (2.6) принимают вид

$$\begin{aligned} n = 2, \quad E_2 =& \frac{1}{2}\big(\xi_1^2 + \xi_2^2\big), \\ n = 4, \quad E_2 =& \frac{1}{2}\big(\xi_2^2 + \xi_4^2\big) + \omega_1\big(\xi_1^2 + \zeta_1^2\big) + \omega_3\big(\xi_3^2 + \zeta_3^2\big), \\ n = 6, \quad E_2 =& \frac{1}{2}\big(\xi_3^2 + \xi_6^2\big) + \omega_1\big(\xi_1^2 + \zeta_1^2\big) + \omega_2\big(\xi_2^2 + \zeta_2^2\big) \\ & + \omega_4\big(\xi_4^2 + \zeta_4^2\big) + \omega_5\big(\xi_5^2 + \zeta_5^2\big). \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\omega_k = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\sigma_{n-k}^+, \quad \omega_{n-k} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\sigma_k^+, \quad n = 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1.$$

Непрерывное семейство равновесий системы (2.4) расположено на прямой $\Gamma = \big\{(\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n} : \xi = 0, \zeta_1 = 0, \ldots, \zeta_{n-1} = 0\big\}$.

Этап 2. Редукция системы. Переменная $\zeta_n$ циклическая, т. е. гамильтониан $E(r(\xi,\zeta),\theta(\xi,\zeta))$ от нее не зависит. Полагая $\xi_n=0$, переходим к редуцированной гамильтоновой системе с $n-1$ степенями свободы.

Введем обозначение $\frac{4\pi}{\varkappa^2}\mathbb{E}$ для редуцированного гамильтониана:

$$\frac{4\pi}{\varkappa^2}\mathbb{E}=\frac{4\pi}{\varkappa^2}\mathbb{E}(\xi_1,\dots,\xi_{n-1},\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1})=E(r(\xi,\zeta),\theta(\xi,\zeta))|_{\xi_n=0}. \tag{2.28}$$

Множитель $\frac{4\pi}{\varkappa^2}$ далее будем опускать.

Этап 3. Нормализация редуцированного гамильтониана и применение результатов работы [22].

Последовательно разберем случаи $n=2,\ 4,\ 6$.

Пусть $n=2$. Гамильтониан $\mathbb{E}$ имеет вид

$$\mathbb{E}=\frac{1}{2}{\xi_1}^2+d_2{\zeta_1}^4+\dots, \tag{2.29}$$

где

$$d_2=\left.\frac{35q^6-78q^5-19q^4+156q^3-115q^2-46q+3}{8(q+1)^6}\right|_{q=q_{*2}}=-0,31982595991,$$

а точками обозначены слагаемые четвертой степени и выше, кроме выписанного. Он не содержит слагаемых третьей степени, т. е. система нормализована автоматически.

Коэффициент $d_2$ отрицателен. Следовательно, согласно теореме 4.1 работы [22], нулевое положение равновесия гамильтоновой системы с гамильтонианом (2.29) неустойчиво.

Пусть $n=4$. Гамильтониан (2.28) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathbb{E}=&\frac{1}{2}\xi_2^2+\omega_1\big(\xi_1^2+\zeta_1^2\big)+\omega_3\big(\xi_3^2+\zeta_3^2\big)+\alpha_1\zeta_2\big(\zeta_1^2-\xi_1^2\big)+\alpha_3\zeta_2\big(\zeta_3^2-\xi_3^2\big)\\&-\beta\zeta_2(\xi_1\xi_3-\zeta_1\zeta_3)+\delta\xi_2(\xi_3\zeta_1-\xi_1\zeta_3)+\xi_2(\gamma_1\xi_1\zeta_1-\gamma_3\xi_3\zeta_3)+d_4\zeta_2^4+\dots,\end{aligned} \tag{2.30}$$

где

$$d_4=-13,9951507896,\quad \omega_1=1,0782861854,\quad \omega_3=0,1478593629,$$
$$\alpha_1=2,3967165128,\quad \alpha_2=7,2411964098,\quad \beta=10,1069827037,$$
$$\gamma_1=1,8216225529,\quad \gamma_3=0,5545780168,\quad \delta=0,1011524725.$$

Введем комплексные переменные $Z_k=\xi_k+i\zeta_k$, $\bar z_k=\xi_k-i\zeta_k$, $k=1,3$. Тогда разложение (2.30) имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbb{E}=\frac{1}{2}\xi_2^2+\omega_1|Z_1|^2+\omega_3|Z_3|^2-\frac{\alpha_1}{2}\zeta_2\big(Z_1^2+Z_1^2\big)-\frac{\alpha_3}{2}\zeta_2\big(Z_3^2+Z_3^2\big)\\-\frac{\beta}{2}\zeta_2(Z_1Z_3+\bar z_1\bar z_3)-\frac{i\delta}{2}\xi_2(\bar z_1Z_3+Z_1\bar z_3)\\+\frac{i}{4}\xi_2\big(\gamma_1\big(\bar z_1^2-Z_1^2\big)-\gamma_3\big(\bar z_3^2-Z_3^2\big)\big)+d_4\zeta_2^4+\dots.\end{aligned}$$

Общая теория говорит [27], что в критическом случае двукратного нулевого корня (жорданова клетка) в гамильтониане могут быть резонансные слагаемые третьей степени, например, $\xi_2^3$, $\zeta_2^3$, $\xi_2|Z_k|^2$, $\zeta_2|Z_k|^2$, $k=1,3$. Заметим, что в разложении $\mathbb{E}$ все кубические слагаемые нерезонансны.

Проведем нормализацию слагаемых третьей степени гамильтониана (2.28). Применим алгоритм нормализации Биркгофа (см., например, [27]).

Заменой переменных

$$\Psi_i = \xi_i + \frac{\partial S_3}{\partial \Phi_i}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.31}$$

$$\zeta_i = \Phi_i + \frac{\partial S_3}{\partial \xi_i} \tag{2.32}$$

уничтожаем в гамильтониане $\mathbb{E}$ нерезонансные кубические слагаемые, т. е. все кубические слагаемые в разложении (2.30). Здесь $S_3$ — форма третьей степени от переменных $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$:

$$\begin{aligned} S_3 = -\frac{\alpha_1}{2\omega_1}\xi_1\Phi_1\Phi_2 - \frac{\alpha_2}{2\omega_3}\xi_3\Phi_2\Phi_3 + \frac{(\alpha_1 + 2\gamma_1\omega_1)}{8\omega_1^2}\xi_2\Phi_1^2 \\ + \frac{(\alpha_3 - 2\gamma_3\omega_3)}{8\omega_3^2}\xi_2\Phi_3^2 + \frac{\delta}{2(\omega_3 - \omega_1)}\Phi_2(\xi_3\Phi_1 - \xi_1\Phi_3) \\ - \frac{\delta - 2\beta(\omega_3 - \omega_1)}{4(\omega_3 - \omega_1)^2}\xi_2(\Phi_1\Phi_3 + \xi_1\xi_3). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Замечание. Теории нормальных форм гамильтоновых систем посвящены многочисленные исследования (см. [24, 27] и особенно более позднюю книгу [29] вместе с цитируемой там литературой). Разработаны различные методы и алгоритмы нормализации. С практической точки зрения недостаток метода Биркгофа состоит в том, что он не задает явных зависимостей старых переменных от новых, и наоборот. Задача разрешения зависимостей вида (2.31) относительно новых или старых переменных в общем случае приводит к решению нелинейных уравнений и весьма трудоемка. Однако в нашей конкретной задаче эти трудности не возникают, поскольку несколько неожиданно оказалось, что система (2.31), (2.32) является линейной относительно переменных $\xi_1, \xi_2, \xi_3$. Поэтому для старых переменных $\xi$ нетрудно получить явные выражения через новые переменные: $\xi = \xi(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$.

Вычисления показали, что нормализация (2.31), (2.32) не влияет на коэффициент $d_4$. Это можно установить и без проведения нормализующей замены. Упорядочим слагаемые разложения (2.30) по степени квазиоднородности. Степень квазиоднородности слагаемых будем считать следующим образом: степень всех переменных, кроме $\xi_2$, $\zeta_2$, считаем с весом 2, а вес $\xi_2$, $\zeta_2$ оставим равным 1. В этом случае $\xi_2^2$ имеет вторую степень квазиоднородности: $\xi_k^2$, $\zeta_k^2$, $k = 1, 3$, и $\zeta_2^4$ — четвертую степень, а все остальные, выписанные явно в разложении (2.30), имеют пятую степень квазиоднородности. Коэффициент при $\zeta_2^4$ может измениться в результате нормализации (2.31), (2.32) только в случае уничтожения слагаемых одинаковой с ним четвертой степени квазиоднородности: $\zeta_2^2\xi_j$, $\zeta_2^2\zeta_j$, $j = 1, 3$. Последние в гамильтониане (2.30) отсутствуют.

Коэффициент $d_4$ отрицателен, и, следовательно, нулевое положение равновесия гамильтоновой системы с гамильтонианом $\mathbb{E}$ неустойчиво [22–24].

Замечание. Использованный нами прием введения квазиоднородности встречается во многих работах. Например, в критическом случае двукратного нулевого корня (жорданова клетка) для систем общего вида он применялся А. М. Ляпуновым [30] и в работах [31, 32]. В теории устойчивости вихревых конфигураций с его помощью доказана устойчивость вихревого семиугольника [9, 10]. В статье [33] аналогичные рассуждения проводились для построения алгоритмов нормализации гамильтоновых систем. В связи с понятием квазиоднородности отметим, что существует развитая теория степенной геометрии [34]. В [34, гл. IV, § 3] на ее основе изучаются укороченные гамильтоновы системы в критическом случае четырехкратного нулевого собственного значения (в нашей задаче оно двукратно).

Пусть $n = 6$. Гамильтониан (2.28) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbb{E} = \frac{1}{2}\xi_3^2 &+ \omega_1\big(\xi_1^2+\zeta_1^2\big) + \omega_2\big(\xi_2^2+\zeta_2^2\big) + \omega_4\big(\xi_4^2+\zeta_4^2\big) + \omega_5\big(\xi_5^2+\zeta_5^2\big)\\
&+ a_2\big(\zeta_2^3 - 3\xi_2^2\zeta_2\big) - e_1\big(\zeta_4^3 - 3\xi_4^2\zeta_4\big) - a_0\zeta_3(\zeta_5\zeta_2+\xi_5\xi_2)\\
&- b_0\zeta_3(\xi_4\xi_1+\zeta_1\zeta_4) + h_1\zeta_3(\zeta_4\zeta_5-\xi_5\xi_4) + c_2\xi_3(\zeta_1\xi_2+\zeta_2\xi_1)\\
&+ d_0\xi_3(\zeta_5\xi_4+\zeta_4\xi_5) + e_0\zeta_3(\zeta_2\zeta_1-\xi_2\xi_1) + f_0\xi_3(\zeta_2\xi_5-\zeta_5\xi_2)\\
&+ a_1\big(\xi_2^2\zeta_4 - \zeta_2^2\zeta_4 - 2\xi_2\xi_4\zeta_2\big) + b_1\big(\zeta_1^2\zeta_4 - \xi_1^2\zeta_4 - 2\xi_1\xi_4\zeta_1\big)\\
&+ d_1\big(\zeta_2\zeta_5^2 - \xi_5^2\zeta_2 - 2\xi_2\xi_5\zeta_5\big) + f_1\big(\xi_5^2\zeta_4 - \zeta_4\zeta_5^2 - 2\xi_4\xi_5\zeta_5\big)\\
&+ g_1\big(\zeta_2\zeta_4^2 - \xi_4^2\zeta_2 + 2\xi_2\xi_4\zeta_4\big) + h_0\big(\xi_1^2\zeta_2 - \zeta_1^2\zeta_2 - 2\xi_1\xi_2\zeta_1\big)\\
&+ g_0\xi_3(\zeta_1\xi_4-\xi_1\zeta_4) + c_0(\xi_2\xi_5\zeta_1 - \xi_1\xi_2\zeta_5 - \zeta_1\zeta_2\zeta_5 - \xi_1\xi_5\zeta_2)\\
&\qquad c_1(\zeta_1\zeta_4\zeta_5 + \xi_1\xi_5\zeta_4 + \xi_4\xi_5\zeta_1 - \xi_1\xi_4\zeta_5) + d_6\zeta_3^4 + \ldots,\end{aligned} \tag{2.34}$$

где

$$d_6 = -15,93886066, \quad \omega_1 = 2,42745725, \quad \omega_2 = 1,52392858, \quad \omega_4 = 0,65432434,$$
$$\omega_5 = 0,71143166, \quad a_0 = 33,26444221, \quad a_1 = 5,74485434, \quad a_2 = 0,70811541,$$
$$b_0 = 10,64749094, \quad b_1 = 1,63188742, \quad c_0 = 2,30568026, \quad c_1 = 2,17201406,$$
$$d_0 = 1,40170422, \quad d_1 = 3,64947879, \quad e_0 = 0,34145520, \quad e_1 = 3,78337523,$$
$$f_0 = 0,46944428, \quad f_1 = 3,29128804, \quad g_0 = 0,66796439, \quad g_1 = 8,32390678,$$
$$c_2 = 2,12615377, \quad h_0 = 0,67940752, \quad h_1 = 41,05095631.$$

В этом разложении, как и в случае четырех вихрей, отсутствуют резонансные слагаемые третьей степени. Поэтому нормализация уничтожает все кубические слагаемые в разложении (2.34). Рассуждения, подобные проведенным в случае $n = 4$ и связанные с упорядоченностью по квазиоднородности слагаемых ряда Тейлора, приводят к выводу, что нормализация кубических слагаемых не влияет на коэффициент $d_6$. В работе [35] эта нормализующая замена выписана явно.

Заметим, что выполнено условие $d_6 < 0$. Следовательно, стационарное вращение правильного вихревого гексагона неустойчиво при $q = q_{*6}$.

Теорема 2.2 доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Yarmchuk E., Gordon M., Packard R.* Observation of stationary vortex array in rotating superfluid helium // Phys. Rev. Lett. 1979. V. 43. P. 214–217.
2. *Yarmchuk E., Packard R.* Photographic studies of quantized vortex lines // J. Low Temp. Phys. 1982. V. 46. P. 479–515.
3. *Fine K., Cass A., Flynn W., Dryscoll C.* Relaxation of 2D turbulence to vortex crystal // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 3277–3280.
4. *Durkin D., Fajans J.* Experiments on two-dimensional vortex partens // Phys. Fluids. 2000. V. 12. P. 289–293.
5. *Thomson W.* Floating magnets (illustrating vortex systems) // Nature. 1878. V. 18. P. 13–14.

**6.** *Thomson J. J.* On the motion of vortex rings. London: Macmillan and Co, 1883.

**7.** *Havelock T. H.* The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // Phil. Mag. 1931. V. 11, N 70. P. 617–633.

**8.** *Куракин Л. Г.* Об устойчивости правильного вихревого $n$-угольника // Докл. РАН. 1994. Т. 335, № 6. С. 729–731.

**9.** *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* О нелинейной устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // Докл. РАН. 2002. Т. 384, № 4. С. 476–482.

**10.** *Kurakin L. G., Yudovich V. I.* The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon // Chaos. 2002. V. 12. P. 574–595.

**11.** *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Устойчивость стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей. М.; Ижевск: ИКИ, 2003. С. 238–303.

**12.** *Богомолов В. А.* Модель колебаний центров действия атмосферы // ФАО. 1979. Т. 15. С. 243–249.

**13.** *Pekarsky S., Marsden J.* Point vortices on a sphere: stability of relative equilibria // J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 5894–5907.

**14.** *Borisov A. V., Kilin A. V.* Stability of Thomson's configurations of vortices on a sphere // Regul. Chaotic Dyn. 2000. V. 5. P. 189–200.

**15.** *Куракин Л. Г.* О нелинейной устойчивости правильных вихревых многоугольников и многогранников на сфере // Докл. РАН. 2003. Т. 388, № 5. С. 482–487.

**16.** *Kurakin L. G.* On nonlinear stability of the regular vortex systems on a sphere // Chaos. 2004. V. 14. P. 592–602.

**17.** *Килин А. А., Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика точечных вихрей внутри и вне круговой области // Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей. М.; Ижевск: ИКИ, 2003. С. 414–440.

**18.** *Куракин Л. Г.* Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области // Докл. РАН. 2004. Т. 399, № 1. С. 52–55.

**19.** *Kurakin L. G.* On stability of a regular vortex polygon in the circular domain // J. Math. Fluid Mech. 2005. V. 7, N 3. P. S376–S386.

**20.** *Куракин Л. Г.* Об устойчивости томсоновских вихревых конфигураций внутри круговой области // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 3. С. 295–317.

**21.** *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости. М.: Наука, 1984.

**22.** *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 1. С. 24–33.

**23.** *Сокольский А. Г.* Исследование устойчивости движения в некоторых задачах небесной механики: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Моск. физ.-техн. ин-т, 1976.

**24.** *Куницын А. Н., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях // Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. 4. С. 58–139. (Итоги науки и техники).

**25.** *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.

**26.** *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984.

**27.** *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.

**28.** *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2001.

**29.** *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990.

**30.** *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Мат. сб. 1983, Т. 17, вып. 2. С. 253–333. (См. также: *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. С. 369–450).

**31.** *Куракин Л. Г.* О ляпуновской цепочке критериев устойчивости в критическом случае жордановой 2-клетки // Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 1. С. 14–16.

**32.** *Куракин Л. Г.* О критериях устойчивости работы А. М. Ляпунова «Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения» // Владикавказ. мат. журн. 2009. Т. 11, № 3. С. 23–32.

**33.** *Брюно А. Д., Петров А. Г.* О вычислении гамильтоновой нормальной формы // Докл. РАН. 2006. Т. 410, № 4. С. 474–478..

**34.** *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.

**35.** *Куракин Л. Г., Островская И. В.* Об устойчивости правильного вихревого многоугольника с четным числом вихрей вне круговой области. М., 2009. 20 с. Деп. в ВИНИТИ. 01.07.09 № 433–В2009.

*Статья поступила 23 июня 2009 г.*

Куракин Леонид Геннадиевич, Островская Ирина Владимировна
Южный федеральный университет,
факультет математики, механики и компьютерных наук,
ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону 344090
kurakin@math.rsu.ru, ostrov@math.rsu.ru