Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 512.542.63

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ p–ПОДГРУППАМИ

С. И

Аннотация. Устанавливаются случаи, когда конечная p-разрешимая группа со специальной силовской p-подгруппой имеет p-длину 1.

Ключевые слова: конечная группа, p-разрешимая группа, p-длина.

Если G — конечная группа и p — простое число, то фраттиниево p-элементарное G-расширение $\mathbf{E}$ конечной группы K — это короткая точная последовательность

$$\mathbf{E} : 1 \to K \xrightarrow{\mu} E \xrightarrow{\varepsilon} G \to 1,$$

в которой $K\mu$ является элементарной абелевой p-подгруппой из подгруппы Фраттини группы E (см. [1]). Если дано другое фраттиниево p-элементарное G-расширение

$$\mathbf{E}^* : 1 \to K^* \xrightarrow{\mu^*} E \xrightarrow{\varepsilon^*} G \to 1,$$

то групповой гомоморфизм $\theta : E \to E^*$ такой, что $\varepsilon = \theta\varepsilon^*$ и $K\mu\theta = K^*\mu^* \cap E\theta$, называют *гомоморфизмом G-расширения* $\mathbf{E}$ в $\mathbf{E}^*$. Расширение $\mathbf{E}$ называют *универсальным* для некоторого класса $\mathscr{K}$ фраттиниевых p-элементарных G-расширений, если класс всех эпиморфных образов расширения $\mathbf{E}$ включает все G-расширения из класса $\mathscr{K}$. Теорема Гашюца (см. [1, с. 852]) описывает универсальное G-расширение для класса всех фраттиниевых p-элементарных G-расширений. Мы ставим вопрос о существовании универсальных G-расширений для различных классов $\mathscr{K}$, в частности, для класса G-расширений, впервые исследованного Ю. А. Гольфандом [2] в случае, когда G — группа Шмидта (т. е. минимальная ненильпотентная группа). Мы рассматриваем только конечные группы.

Определение 1. Предположим, что конечная группа G имеет минимальную нормальную p-подгруппу L. Тогда фраттиниево p-элементарное G-расширение $\mathbf{E}$ будем называть *гольфандовым p-элементарным G-расширением,* если для $P = L\varepsilon^{-1}$ выполняются следующие условия:

1) $\Phi(P) = P \cap \Phi(E)$;

2) если N — собственная подгруппа из P', то $N \trianglelefteq E$ и P/N является специальной p-группой.

Подгруппу P из определения 1 будем называть гольфандовой p-подгруппой. Зафиксируем это понятие в виде отдельного определения.

Определение 2. Конечную p-группу H называем *гольфандовой p-группой*, если найдется такая конечная группа E, что выполняются следующие условия:

1) $H \simeq P \trianglelefteq E$;

2) $\Phi(P) = P \cap \Phi(E)$;

3) $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы E;

4) если N — собственная подгруппа из P', то $N \trianglelefteq E$ и P/N является специальной p-группой.

Примарная гольфандова группа — это гольфандова p-группа для некоторого простого p.

Напомним, что конечная p-группа называется *специальной*, если она либо элементарная абелева, либо неабелева p-группа, у которой центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и являются элементарными абелевыми (следуя [3], в класс специальных p-групп включаем элементарные абелевы p-группы). Специальную p-группу называют *экстраспециальной*, если она является неабелевой специальной p-группой, у которой центр порядка p.

Если G — группа Шмидта, то ее неединичная нормальная силовская подгруппа является, как известно, гольфандовой. Так как каждая ненильпотентная конечная группа содержит хотя бы одну подгруппу Шмидта, видим, что в ненильпотентных конечных группах множество примарных гольфандовых подгрупп непусто.

Другим источником примарных гольфандовых подгрупп являются конечные минимальные не $\mathfrak{F}$-группы с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом, где $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. Известно (см. [4, 5]), что $\mathfrak{F}$-корадикал каждой такой группы является специальной p-группой, а фактор-группа $\mathfrak{F}$-корадикала по его подгруппе Фраттини является главным фактором в этой группе (в работе [6] показано, что этим же свойством обладают $\mathfrak{F}$-корадикалы, если условие насыщенности формации $\mathfrak{F}$ ослабить до p-насыщенности). В частности, используя теорему Хупперта — Дёрка (см. [4, с. 245]), получаем, что в любой конечной несверхразрешимой группе есть секция E, являющаяся минимальной несверхразрешимой группой, у которой неединичная нормальная силовская подгруппа гольфандова.

При построении примеров примарных гольфандовых групп можно использовать конструкции без применения теории формаций. Возьмем, к примеру, конечную p-разрешимую не p-нильпотентную группу G с $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, где p — наименьший простой делитель $|G|$. Тогда $C_G(\mathrm{O}_p(G)) \leq \mathrm{O}_p(G)$ и среди G-нормальных p-подгрупп, минимальных по отношению к свойству «не содержаться в гиперцентре», мы можем обнаружить гольфандову p-подгруппу.

Поставим следующую проблему.

Проблема 1. *Пусть $\mathscr{K}$ — класс всех гольфандовых p-элементарных G-расширений, где G — конечная группа с минимальной нормальной p-подгруппой L. Доказать, что для класса $\mathscr{K}$ существует универсальное гольфандово p-элементарное расширение.*

В случае, когда G — группа Шмидта, решение проблемы 1 дает теорема Гольфанда [2] (новое доказательство теоремы Гольфанда приведено в [7]). В общем случае проблема 1 остается открытой.

Проблема 2. *Выяснить, в каких случаях p-длина конечной p-разрешимой группы равна* 1, *если ее силовская p-подгруппа изоморфна некоторой гольфандовой p-группе.*

Решение проблемы 2 было ранее получено в некоторых случаях. В 1973 г. В. Д. Мазуров и С. А. Сыскин доказали [8], что конечная разрешимая группа G имеет 2-длину ≤ 1, если ее силовская 2-подгруппа изоморфна нормальной силовской подгруппе некоторой группы Шмидта. Этот же результат доказан и в работе В. С. Монахова [9] 1975 г. В 1987 г. А. Х. Журтов и С. А. Сыскин распространили этот результат на случай $p > 2$; они установили [10], что при любом $p \geq 2$ конечная p-разрешимая группа имеет p-длину ≤ 1, если ее силовская p-подгруппа изоморфна нормальной силовской подгруппе некоторой группы Шмидта. С помощью теории формаций результаты работ [8–10] были расширены в статье [11] на конечные p-разрешимые группы с силовской p-подгруппой, которая изоморфна $\mathfrak{F}$-корадикалу некоторой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы, где $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. В настоящей статье будет доказан следующий результат, решающий проблему 2. В отличие от [11] мы не будем использовать теорию формаций.

Теорема. *Пусть G — конечная p-разрешимая группа, у которой силовская p-подгруппа является гольфандовой p-группой. Тогда либо $l_p(G) = 1$, либо $p = 3$ и G имеет секцию, изоморфную $[Z_3 \times Z_3]\,\mathrm{SL}_2(3)$.*

Здесь $[Z_3 \times Z_3]\,\mathrm{SL}_2(3)$ — полупрямое произведение элементарной абелевой группы $[Z_3 \times Z_3]$ порядка 9 и группы $\mathrm{SL}_2(3)$. Прежде чем доказывать теорему, приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть G — конечная p-разрешимая группа и N — нормальная p-подгруппа из G такая, что $l_p(G/N) = 1$. Если N содержится либо в $Z(G)$, либо в $\Phi(G)$, то $l_p(G) = 1$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что N — минимальная нормальная подгруппа. Пусть

$$H/N = \mathrm{O}_{p',p}(G/N)$$

и $R/N = \mathrm{O}_{p'}(G/N)$. Так как $l_p(G/N) = 1$, то p не делит $|G : H|$. Очевидно, R/N — нормальная холлова p'-подгруппа в H/N. Если $N \leq \Phi(G)$, то H — p-нильпотентная подгруппа в силу [4, теорема 4.2]. Если $N \leq Z(G)$, получаем, что $R = N \times H_{p'}$, где $H_{p'}$ — нормальная холлова p'-подгруппа группы H. Итак, H в обоих случаях p-нильпотентна. $\square$

Лемма 2. *Пусть P — нормальная p-подгруппа группы G. Если $G/C_G(P)$ — p-группа, то P содержится в гиперцентре группы в G.*

Доказательство. Так как $[P](G/C_G(P))$ — p-группа, то P гиперцентральна в полупрямом произведении $[P](G/C_G(P))$. Поэтому ясно, что P гиперцентральна в G. $\square$

Лемма 3. *Любая гольфандова p-группа P является специальной p-группой со следующими свойствами:*

1) *при $p > 2$ экспонента группы P равна p;*

2) *при $p = 2$ экспонента группы P не превышает 4.*

Доказательство стандартно, и приводим его для полноты изложения. Пусть P и E — такие, как в определении 2. Положим $Z = Z(P)$. Результат очевиден при $Z = P$, а также при $p = 2$. Предположим, что P неабелева и $p > 2$. По условию P специальна, а значит, $Z = \Phi(P) = P'$. Очевидно, $|P/Z| > p$. Возьмем любые элементы x, y из P. Так как $x^p \in Z$, ясно, что $[x, y]^p = [x^p, y] = 1$. Очевидно, $(xy)^p = x^p y^p [y, x]^{p(p-1)/2} = x^p y^p$. Таким образом, отображение $\alpha : x \longmapsto x^p$ является E-эндоморфизмом группы P. Значит, $P/\operatorname{Ker}\alpha$ и P^α E-изоморфны. Поскольку $P^\alpha \leq Z$, то, учитывая свойство 3 определения 2, получаем, что E-главные факторы групп P^α и $P/\operatorname{Ker}\alpha$ имеют простые порядки. Отсюда и из $Z \leq \operatorname{Ker}\alpha$ получаем, что $P = \operatorname{Ker}\alpha$. $\square$

Следующая лемма легко вытекает из определения 2.

Лемма 4. *Пусть N — подгруппа из центра неабелевой гольфандовой p-группы P. Тогда P/N — гольфандова p-группа.*

Лемма 5 (см. [12]). *Пусть P — нормальная силовская p-подгруппа конечной группы G. Тогда $\Phi(P) = \Phi(G) \cap P$.*

Доказательство теоремы. Предположим, что теорема неверна. Тогда среди конечных p-разрешимых групп, для которых теорема не выполняется, выберем группу G, имеющую наименьший порядок. Таким образом, силовская p-подгруппа G_p из G — гольфандова p-группа, $l_p(G) \neq 1$, но G не имеет секций, изоморфных $[Z_3 \times Z_3]\operatorname{SL}_2(3)$. Так как класс нильпотентности группы G_p не больше 2, по [13, VI.6.6] имеем $l_p(G) \leq 2$. Поэтому мы можем считать, что $l_p(G) = 2$ и $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$.

Положим $S = \mathrm{O}_p(G)$. Согласно [14, лемма 6.4.3] $C_G(S) \subseteq S$. Следовательно, если $G_p \leq M < G$, то $S\mathrm{O}_{p'}(M) = S \times \mathrm{O}_{p'}(M)$. Понятно, что $\mathrm{O}_{p'}(M) = 1$, и так как для M теорема верна, то M p-замкнута. Таким образом, в группе G каждая собственная подгруппа, содержащая G_p, p-замкнута. Теперь ясно, что G_p содержится в единственной максимальной подгруппе, которая как раз совпадает с $N_G(G_p)$.

По теореме С. А. Чунихина (см. [4, теорема 18.12]) G содержит холлову $\{p,r\}$-подгруппу G_pG_r для любого простого r. Если $G_pG_r \neq G$, то $G_p \trianglelefteq G_pG_r$. Поэтому мы можем считать, что $G = G_pG_r$ для некоторого простого r.

Положим $Z = Z(G_p)$. Теперь покажем, что $Z_G = \bigcap\limits_{x\in G} Z^x = 1$. Если $Z_G \neq 1$, то рассматриваем подгруппу $C_G(Z_G)$, которая является нормальной в G и содержит G_p. Так как G не p-замкнута, то $C_G(Z_G) = G$. Если $Z = Z_G$, то по [13, VI.6.6] имеем $l_p(G/Z) = 1$, и тогда по лемме 1 группа G имеет единичную p-длину. Будем считать, что $1 \neq Z_G < Z$. Поскольку $|G/Z_G| < |G|$ и по лемме 4 группа G_p/Z_G гольфандова, получаем, что $l_p(G/Z_G) = 1$. Тогда по лемме 1 имеем $l_p(G) = 1$; противоречие.

Итак, получаем, что $Z_G = 1$. Тогда $S' = \Phi(S) = 1$. Поэтому S — элементарная абелева группа. Кроме того, $S \supseteq Z$ и $S = C_G(S)$. Рассмотрим $\overline{G} = G/S$. Очевидно, $\overline{G}_p$ — элементарная абелева p-группа. Согласно [13, VI.6.6] $l_p(\overline{G}) = 1$. Так как G не имеет никакой собственной нормальной подгруппы, строго содержащей G_p, получаем, что $\overline{G} = \overline{G}_p\overline{G}_r$ p-нильпотентна. Ясно, что $N_{\overline{G}}(\overline{G}_p)$ является единственной максимальной подгруппой в $\overline{G}$, содержащей $\overline{G}_p$. По лемме 5 $\Phi(\overline{G}_r) = \overline{G}_r \cap \Phi(\overline{G})$. Применяя лемму 7.9 из [4], видим, что $\overline{G}_r/\Phi(\overline{G}_r)$ — прямое произведение дополняемых минимальных нормальных подгрупп в $\overline{G}$. Так как $N_{\overline{G}}(\overline{G}_p)$ — единственная максимальная подгруппа в $\overline{G}$, содержащая $\overline{G}_p$, то $\overline{G}_r/\Phi(\overline{G}_r)$ — главный фактор группы $\overline{G}$. Следовательно, $\overline{G}_p$ действует неприводимо на $\overline{G}_r/\Phi(\overline{G}_r)$. Если $\bar{x} \in \overline{G}_p$ порождает тождественный автоморфизм на $\overline{G}_r/\Phi(\overline{G}_r)$, то $\bar{x}$ действует тривиально на $\overline{G}_r$ ввиду теоремы Холла (см. [15, теорема 12.2.2]). Так как $\mathrm{O}_p(\overline{G}) = 1$, получаем, что $C_{\overline{G}_p}(\overline{G}_r/\Phi(\overline{G}_r)) = 1$. Таким образом, $\overline{G}_p$ можно рассматривать как неприводимую абелеву группу автоморфизмов группы $\overline{G}_r/\Phi(\overline{G}_r)$. Таким образом, $|\overline{G}_p| = p$ согласно [13, VI.8.1].

Теперь зафиксируем $s \in S\backslash Z$ и рассмотрим $[G_p, s]$. Ясно, что $[G_p, s] \leq Z$. Так как $[xy, s] = [x, s]^y[y, s] = [x, s][y, s]$ для любых $x, y \in G_p$, то $[G_p, s] = \{[x, s] \mid$

$x \in G_p\}$ и отображение

$$f : x \longmapsto [x, s], \quad x \in G_p,$$

является эпиморфизмом группы G_p на $[G_p, s]$. Ядро эпиморфизма f равно S. Следовательно, $G_p/S \simeq [G_p, s]$ имеет порядок p. По условию найдутся конечная группа E и в ней нормальная подгруппа P со следующими свойствами: 1) $G_p \simeq P \trianglelefteq E$; 2) $\Phi(P) = P \cap \Phi(E)$; 3) $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы E; 4) если N — собственная подгруппа из P', то $N \trianglelefteq E$ и P/N является специальной p-группой. Ясно, что в Z имеется подгруппа Z_0 такая, что $|Z : Z_0| = p$ и $[G_p, s] \subseteq Z_0$ при $|Z| > p$. Ввиду отмеченных свойств 1–4 G_p/Z_0 — экстраспециальная p-группа. Кроме того, S/Z_0 — максимальная абелева подгруппа индекса p в G_p/Z_0. Теперь мы можем применить лемму 5.1.9 из [14], согласно которой имеем равенство $|S/Z_0 : Z/Z_0| = p$. Тогда $|G_p/Z| = p^2$. Если $|Z| > p$, то $[G_p, s] \leq Z_0$ и sZ_0 содержится в $Z(G_p/Z_0) = Z/Z_0$, а значит, $s \in Z$. Получили противоречие. Следовательно, доказали, что $|G_p| = p^3$. Если $\Phi(G) \cap S \neq 1$, то, применяя [13, VI.6.6] и лемму 1, получим, что $l_p(G) = 1$. Снова получаем противоречие. Поэтому $\Phi(G) \cap S = 1$ и по лемме 7.9 из [4] S имеет дополнение H в G. Тогда $S = Z_p \times Z_p$ и $G = [Z_p \times Z_p]H$, где $H \simeq \overline{G} = G/S$ и Z_p — группа порядка p. Так как H порождается двумя силовскими p-подгруппами, то, применяя лемму 8.6.7 из [14], получаем $H \leq \mathrm{SL}_2(p)$.

Пусть $p = 2$. Тогда G_p является либо диэдральной группой, либо группой кватернионов. Так как S — элементарная абелева подгруппа порядка 4 в G_p, мы рассматриваем только случай, когда G_p — диэдральная группа порядка 8. Но по лемме 7.7.2 из [16] группа автоморфизмов диэдральной 2-группы порядка не меньше 8 является 2-группой. Следовательно, ввиду леммы 2 P содержится в гиперцентре группы E. Последнее противоречит определению гольфандовой подгруппы.

Пусть $p > 2$. Применяя лемму 8.6.12 из [14], сразу получаем $p = 3$ и $H \simeq \mathrm{SL}_2(3)$. $\square$

Из доказанной теоремы вытекают результаты о p-длине из работ [8–11]. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *p-насыщенной* (см. [17]), если из $G/\Phi(\mathrm{O}_p(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. Например, класс всех конечных p-сверхразрешимых групп с абелевой холловой p'-подгруппой является p-насыщенной, но не насыщенной формацией.

Следующий результат является прямым следствием доказанной теоремы и теоремы 2 из [6].

Следствие. *Пусть G — конечная p-разрешимая группа с экстраспециальной силовской p-подгруппой P. Предположим, что P изоморфна $\mathfrak{F}$-корадикалу некоторой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы, где $\mathfrak{F}$ — некоторая p-насыщенная формация. Тогда либо $l_p(G) = 1$, либо $p = 3$ и $\mathrm{SL}_2(3)$ содержится среди секций группы G.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. *Гольфанд Ю. А.* О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 8. С. 1313–1315.
3. *Suzuki M.* Group theory. II. New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verl., 1986.
4. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
5. *Wenbin Guo.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press / Kluwer Acad. Publ., 2000.

6. *Yi Xiaolan.* On finite minimal non $\mathfrak{F}$-groups // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2007. N 6. P. 203–206.
7. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Robinson Derek J. S.* On finite minimal non-nilpotent groups // Proc Amer. Math. Soc. 2005. V. 133, N 12. P. 3455–3462.
8. *Мазуров В. Д., Сыскин С. А.* О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 2. С. 217–222.
9. *Монахов В. С.* Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы: сб. науч. статей под науч. ред. Л. А. Шеметкова. Минск: Наука и техника, 1975. С. 70–100.
10. *Журтов А. Х., Сыскин С. А.* О группах Шмидта // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 2. С. 74–78.
11. *Shemetkov L. A., Yi Xiaolan.* On the p-length of finite p-soluble groups // Тр. Ин-та математики. 2008. V. 16, N 1. P. 93–96.
12. *Baer R.* Supersoluble immersion // Canad. J. Math. 1959. V. 11, N 2. P. 353–369.
13. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
14. *Kurzweil H., Stellmacher B.* The theory of finite groups: an introduction. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2004.
15. *Hall M.* The theory of groups. New York: The Macmillan Comp., 1959.
16. *Gorenstein D.* Finite groups. New York; Evanston; London: Harper and Row, 1968.
17. *Баллестер-Болинше А., Кальво К., Шеметков Л. А.* О частично насыщенных формациях конечных групп // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 6. С. 3–24.

Статья поступила 17 февраля 2009 г.,
окончательный вариант — 16 сентября 2009 г.

Yi Xiaolan (И Сяолан)
Department of Mathematics, Zhejiang University,
310007 Hangzhou, P. R. China
yixiaolan2005@126.com