*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2010. Том 51, № 3*

*УДК 514.763+512.812.4+517.911*

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИПШИЦЕВЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ В $\mathbb{R}^3$

**А. В. Грешнов**

**Аннотация.** Для одного класса липшицевых базисных векторных полей в $\mathbb{R}^3$ рассмотрены некоторые индуцированные ими непрерывные метрические функции. Доказано, что эти функции являются квазиметриками в области определения векторных полей. При некоторых ограничениях для рассматриваемых классов векторных полей доказаны аналоги теорем Рашевского — Чоу и Ball-Box. Методы доказательств не используют существования нильпотентного касательного конуса.

**Ключевые слова:** липшицево векторное поле, квазиметрика, обобщенное неравенство треугольника, горизонтальная кривая.

## Введение

В недавних работах С. К. Водопьянова и М. Б. Кармановой ([1–3], см. библиографию в них) исследовалась, в частности, задача о существовании нильпотентного касательного конуса для многообразий Карно $X$ при гладкости базисных векторных полей класса $C^1$ («минимальная гладкость векторных полей», см. [1]). Векторные поля $X_i$, $i = 1, \dots, N$, определенные в некоторой области $O \subset \mathbb{R}^N$, будем называть *базисными* в $O$, если $\operatorname{rank}\langle X_1(g), \dots, X_N(g)\rangle = N$ $\forall g \in O$. Используя существование нильпотентного касательного конуса всюду в области определения векторных полей, а также его специфические свойства, в [1–3] предложили метод, позволяющий доказать ряд базовых фактов так называемой «субримановой геометрии» уже исходного пространства $X$ «минимальной гладкости», в частности, обобщенное неравенство треугольника для некоторых метрических функций, индуцированных рассматриваемыми в [1–3] векторными полями, соответствующую локальную аппроксимационную теорему (см. [2, 3]), обобщение теоремы Рашевского — Чоу и др. Отметим, что для доказательства существования нильпотентного касательного конуса в рамках методов работ [1–7] гладкость векторных полей (хотя бы $C^1$) играет важную роль; в частности, это позволяет определить нильпотентный касательный конус во всех точках области определения векторных полей. Однако если мы будем рассматривать не гладкие векторные поля, а, например, липшицевы, то эти методы не работают, так как липшицевы функции дифференцируемы лишь почти всюду; поэтому невозможно определить нильпотентный касательный конус во всех точках области определения липшицевых векторных полей $X_1, \dots, X_N$, так как соответствующие пределы $\varepsilon$-«масштабированных» векторных полей $\varepsilon^{\deg X_i} X_i$, $i = 1, \dots, N$, под действием соответствующего оператора растяжения (см., например, [1–5]) в фиксированной точке могут и не существовать. Естественно

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457).

возникает вопрос: возможно ли доказать обобщенное неравенство треугольника (для соответствующих метрических функций) или аналог теоремы Рашевского — Чоу в случае липшицевых векторных полей? В настоящей работе в простейшем случае липшицевых векторных полей $X, Y, T$ (см. (1.1)), являющихся в некотором смысле обобщением алгебры Ли канонической группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ [8], в $\mathbb{R}^3$ получен утвердительный ответ (см. теорему 2.1). Следующий вопрос настоящей работы: в каком случае рассматриваемые базисные липшицевы векторные поля действительно порождают «субриманову структуру», другими словами, в каком случае из рассматриваемых нами базисных липшицевых векторных полей можно выделить действительно *горизонтальное* подрасслоение, и определить стандартным образом *метрику Карно — Каратеодори* (см. [4])? Для получения утвердительного ответа мы ввели некоторую функцию $M(s,u)$ (см. (2.6)), играющую в некотором смысле роль «коммутатора» липшицевых векторных полей. Если значение данной функции не равно 0 в некоторой точке $u$ области определения $O$ векторных полей, то в некоторой области $O_u \subset O$ любые две точки, принадлежащие $O_u$, можно соединить абсолютно непрерывным горизонтальным путем (аналог теоремы Рашевского — Чоу), см. теорему 2.2, и определить на $O_u$ метрику Карно — Каратеодори; при некоторых дополнительных условиях на функцию $M(s,u)$ (аналог известного *условия Хёрмандера*) мы можем доказать аналог известной теоремы Ball-Box [9] (см. теорему 2.3). Метод доказательства теорем 2.1–2.3 основан на непосредственном изучении решений систем о. д. у. с правой частью, зависящей от $X, Y, T$. Также существенным при доказательстве теорем 2.2, 2.3 являются свойства функции $M(s,u)$, о которой говорилось выше. В заключение отметим недавнюю работу Рампаццо и Суссманна [10], в которой на основе методов аппроксимации введено понятие коммутатора для липшицевых векторных полей на некоторых подмножествах их области определения.

## § 1. Обозначения, определения и вспомогательные результаты

На протяжении всей статьи будем рассматривать векторные поля

$$X = (1, 0, f(x,y)), \quad Y = (0, 1, g(x,y)), \quad T = (0,0,1), \tag{1.1}$$

где $f$, $g$ — липшицевы функции в некоторой области $O \subset \mathbb{R}^3$ (мы заранее не предполагаем, что $0 \in O$) с константой Липшица $L$. Из теорем о существовании и единственности решений о. д. у. (см., например, [11]) вытекает существование положительной константы $A > 0$ такой, что для всех чисел $a, b, c$ таких, что $|(a,b,c)|_\infty = \max\{|a|, |b|, |c|\} < A$, решение $w(s)$ задачи Коши

$$\dot{w}(s) = (aX + bY + cT)(w(s)), \quad s \in [0,1], \quad w(0) = u,$$

существует и единственно для любой точки $u \in O$. Введем в рассмотрение отображение

$$\theta_u : (a,b,c) \to \exp(aX + bY + cT)(u) = u + \int_0^1 (aX + bY + cT)(w(s))\, ds,$$

где точка $(a,b,c)$ принадлежит некоторой окрестности начала координат $\mathbb{R}^3$.

**Лемма 1.1.** *Найдутся область* $\widetilde{O} \subset O$ *и положительные константы* $\kappa_1$, $\kappa_2$ *такие, что для любой точки* $u \in \widetilde{O}$ *отображение* $\theta_u : B_e(0, \kappa_1) \to O_u$ *является гомеоморфизмом, при этом* $B_e(u, \kappa_2) \subset O_u$.

Доказательство. Лемма 1.1 вытекает из теорем о существовании, единственности и непрерывной зависимости от параметров решений о. д. у. (см., например [11]).

**Лемма 1.2.** *Для всех точек* $u \in \widetilde{O}$ *и любых чисел* $a$, $b$, $c$ *таких, что* $|(a, b, c)|_\infty < \kappa_1$, *выполняется*

$$\exp(aX + bY + cT)(u) = \exp(cT) \circ \exp(aX + bY)(u).$$

Доказательство проводится непосредственно проверкой на основе леммы 1.1 с использованием координатной записи векторных полей $X$, $Y$, $T$.

Определение 1.1. Функция $d : A \times A \to \mathbb{R}^+ \cup 0$ (см., например, [5, 12]), где $A$ — некоторое множество, называется *квазиметрикой*, если

1) $d(u, v) \geq 0$ (*аксиома неотрицательности*), $d(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$ (*аксиома тождества*);

2) $d(u, v) \leq \kappa_1 d(v, u)$ для некоторой константы $\kappa_1$, не зависящей от выбора $u, v$; в случае, когда $\kappa_1 = 1$, говорят, что $d$ удовлетворяет *аксиоме симметричности*;

3) $d(u, v) \leq \kappa_2(d(u, w) + d(w, v))$ для некоторой константы $\kappa_2$, не зависящей от выбора $u, v, w \in A$ (*обобщенное неравенство треугольника*).

Определение 1.2. Путь $\gamma(s) : [0, t] \to \mathbb{R}^3$ будем называть *горизонтальным*, если для почти всех $s \in [0, t]$ существует производная

$$\dot{\gamma}(s) = (\alpha(s)X + \beta(s)Y)(\gamma(s)), \tag{1.2}$$

где $\alpha(s)$, $\beta(s)$ — некоторые измеримые функции.

Параметризованная кривая $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $s \in [0, t]$, абсолютно непрерывна, если абсолютно непрерывны функции $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$. Если $\gamma(s)$ — абсолютно непрерывная горизонтальная кривая, то, используя (1.2), получаем

$$\alpha(s) = \dot{x}(s), \quad \beta(s) = \dot{y}(s),$$
$$z(t) = z(0) + \int\limits_0^t (\dot{x}(s) f(x(s), y(s)) + \dot{y}(s) g(x(s), y(s)))\, ds. \tag{1.3}$$

Длину $l$ абсолютно непрерывной горизонтальной кривой $\gamma(s)$ будем вычислять по формуле

$$l(\gamma) = \int\limits_0^t (\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s))^{\frac{1}{2}}\, ds. \tag{1.4}$$

**Свойство 1.1.** *Параметризованная кривая* $\gamma(s) = \exp(s(\alpha X + \beta Y))(g)$, $g \in O$, $s \in [-s_1, s_2]$, $\alpha = \mathrm{const}$, $\beta = \mathrm{const}$, *горизонтальна, и*

$$l(\gamma)|_{[-s_1, s_2]} = (s_1 + s_2)(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. С учетом (1.1) свойство 1.1 очевидно.

Выше мы ввели понятие горизонтальной кривой формальным образом, т. е. не предполагали, что любые две точки из $O$ можно соединить горизонтальной кривой конечной длины (см. [4]). С неформальной точки зрения класс горизонтальных путей является допустимым классом путей при определении метрики Карно — Каратеодори на вполне неголономных римановых многообразиях (см. [4, 13]). С точки зрения теории оптимального управления и механики параметризованные горизонтальные кривые являются допустимым классом кривых, на которых рассматривается задача об условном экстремуме при наличии неголономных условий связи (см., например, [14]). Дифференциальные свойства горизонтальных кривых изучались в работе [15] в связи с вопросами квазиконформного анализа на группах Карно. В недавних работах [2, 16] на пространствах Карно — Каратеодори и некоторых их обобщениях изучались различные дифференциальные свойства горизонтальных кривых, связанные с геометрической теорией меры.

## § 2. Доказательство основных результатов

Рассмотрим следующую метрическую функцию:

$$d(v,u)=\max\{|a|,|b|,|c|^{1/2}\mid v=\exp(aX+bY+cT)(u)\}.$$

Из теорем о существовании, единственности и непрерывной зависимости решений о. д. у. от параметров вытекает, что функция $d(v,u)$ непрерывна по каждому аргументу.

**Теорема 2.1.** *Метрическая функция $d$ является квазиметрикой на $\widetilde{O}$.*

Доказательство. Из определения функции $d$ следует, что она удовлетворяет аксиомам тождества и симметричности. Следовательно, для доказательства теоремы 2.1 остается проверить обобщенное неравенство треугольника. Положим $w=(x,y,z)$. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{w}(s)=(a\varepsilon X+b\varepsilon Y+c\varepsilon^2T)(w(s)),\ s\in[0,1],\quad w(0)=(u_1,u_2,u_3)=u,$$

где $|(a,b,c)|_\infty=1$, $\varepsilon>0$. Полагая $w=(x,y,z)$, имеем

$$x(t)=u_1+a\varepsilon t,\quad y(t)=u_2+b\varepsilon t,$$

$$z(t)=u_3+c\varepsilon^2t+a\varepsilon\int_0^t f(u_1+a\varepsilon s,u_2+b\varepsilon s)\,ds+b\varepsilon\int_0^t g(u_1+a\varepsilon s,u_2+b\varepsilon s)\,ds. \tag{2.1}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{\widetilde{w}}(s)=(\tilde{a}\epsilon X+\tilde{b}\epsilon Y+\tilde{c}\epsilon^2T)(\widetilde{w}(s)),\ s\in[0,1],\quad \widetilde{w}(0)=w(1),$$

где $|(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})|_\infty=1$, $\epsilon>0$. Полагая $\widetilde{w}=(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, имеем

$$\tilde{x}(t)=x(1)+\tilde{a}\epsilon t,\quad \tilde{y}(t)=y(1)+\tilde{b}\epsilon t,$$

$$\begin{gathered}\tilde{z}(t)=z(1)+\tilde{c}\epsilon^2t+\tilde{a}\epsilon\int_0^t f(x(1)+\tilde{a}\epsilon s,y(1)+\tilde{b}\varepsilon s)\,ds\\ +\tilde{b}\epsilon\int_0^t g(x(1)+\tilde{a}\varepsilon s,y(1)+\tilde{b}\varepsilon s)\,ds.\end{gathered} \tag{2.2}$$

По лемме 1.1 найдутся числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ такие, что

$$\exp(\alpha X + \beta Y + \gamma T)(u) = \widetilde{w}(1). \tag{2.3}$$

Левая часть равенства (2.3) имеет вид

$$\left(u_1+\alpha, u_2+\beta, u_3+\gamma+\alpha\int\limits_0^1 f(u_1+\alpha s, u_2+\beta s)\,ds+\beta\int\limits_0^1 g(u_1+\alpha s, u_2+\beta s)\,ds\right), \tag{2.4}$$

а правая часть равенства (2.3) определяется при помощи (2.1), (2.2). Следовательно,

$$u_1 + \alpha = u_1 + a\varepsilon + \tilde{a}\epsilon \Rightarrow |\alpha| \le \varepsilon + \epsilon, \quad u_2 + \beta = u_2 + b\varepsilon + \tilde{b}\epsilon \Rightarrow |\beta| \le \varepsilon + \epsilon. \tag{2.5}$$

Оценим величину $|\gamma|$. Используя (2.1), (2.2), (2.4), (2.5), можем записать

$$\begin{aligned}
\gamma = {}& -(a\varepsilon + \tilde{a}\epsilon)\int\limits_0^1 f(u_1 + (a\varepsilon + \tilde{a}\epsilon)s, u_2 + (b\varepsilon + \tilde{b}\epsilon)s)\,ds \\
& - (b\varepsilon + \tilde{b}\epsilon)\int\limits_0^1 g(u_1 + (a\varepsilon + \tilde{a}\epsilon)s, u_2 + (b\varepsilon + \tilde{b}\epsilon)s)\,ds \\
& + c\varepsilon^2 + a\varepsilon\int\limits_0^1 f(u_1 + a\varepsilon s, u_2 + b\varepsilon s)\,ds + b\varepsilon\int\limits_0^1 g(u_1 + a\varepsilon s, u_2 + b\varepsilon s)\,ds \\
& + \tilde{c}\epsilon^2 + \tilde{a}\epsilon\int\limits_0^1 f(u_1 + a\varepsilon + \tilde{a}\epsilon s, u_2 + b\varepsilon + \tilde{b}\epsilon s)\,ds + \tilde{b}\epsilon\int\limits_0^1 g(u_1 + a\varepsilon + \tilde{a}\epsilon s, u_2 + b\varepsilon + \tilde{b}\epsilon s)\,ds \\
= {}& (c\varepsilon^2 + \tilde{c}\epsilon^2) + a\varepsilon\int\limits_0^1 (f(u_1 + a\varepsilon s, u_2 + b\varepsilon s) - f(u_1 + (a\varepsilon + \tilde{a}\epsilon)s, u_2 + (b\varepsilon + \tilde{b}\epsilon)s))\,ds \\
& + \tilde{a}\epsilon\int\limits_0^1 (f(u_1 + a\varepsilon + \tilde{a}\epsilon s, u_2 + b\varepsilon + \tilde{b}\epsilon s) - f(u_1 + (a\varepsilon + \tilde{a}\epsilon)s, u_2 + (b\varepsilon + \tilde{b}\epsilon)s))\,ds \\
& + b\varepsilon\int\limits_0^1 (g(u_1 + a\varepsilon s, u_2 + b\varepsilon s) - g(u_1 + (a\varepsilon + \tilde{a}\epsilon)s, u_2 + (b\varepsilon + \tilde{b}\epsilon)s))\,ds \\
& + \tilde{b}\epsilon\int\limits_0^1 (g(u_1 + a\varepsilon + \tilde{a}\epsilon s, u_2 + b\varepsilon + \tilde{b}\epsilon s) - g(u_1 + (a\varepsilon + \tilde{a}\epsilon)s, u_2 + (b\varepsilon + \tilde{b}\epsilon)s))\,ds \\
& = (c\varepsilon^2 + \tilde{c}\epsilon^2) + I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $|c\varepsilon^2 + \tilde{c}\epsilon^2| \le (\varepsilon + \epsilon)^2$. Теперь оценим интегралы $I_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Имеем

$$\begin{aligned}
|I_1| \le a\varepsilon\int\limits_0^1 |f(u_1 + a\varepsilon s, u_2 + b\varepsilon s) - f(u_1 + (a\varepsilon + \tilde{a}\epsilon)s, u_2 + (b\varepsilon + \tilde{b}\epsilon)s)|\,ds \\
\le a\varepsilon\int\limits_0^1 2L|(\tilde{a}\epsilon s, \tilde{b}\epsilon s)|_\infty\,ds \le L\varepsilon\epsilon \le L(\varepsilon + \epsilon)^2;
\end{aligned}$$

$$|I_2| \le \tilde a\epsilon \int\limits_0^1 |f(u_1 + a\varepsilon + \tilde a\epsilon s, u_2 + b\varepsilon + \tilde b\epsilon s) - f(u_1 + (a\varepsilon + \tilde a\epsilon)s, u_2 + (b\varepsilon + \tilde b\epsilon)s)|\, ds$$

$$\le \tilde a\epsilon \int\limits_0^1 2L|(a\varepsilon(1-s), b\varepsilon(1-s))|_\infty\, ds \le L\varepsilon\epsilon \le L(\varepsilon+\epsilon)^2;$$

интегралы $I_3$, $I_4$ оцениваются аналогично. Тогда получаем

$$d(\widetilde w(1), u) \le (1+4L)^{\frac12}(\varepsilon+\epsilon) = (1+4L)^{\frac12}(d(w(1), u) + d(\widetilde w(1), w(1))).$$

Так как точки $u$, $w(1)$, $\widetilde w(1)$ выбирались произвольно, доказаны обобщенное неравенство треугольника и вместе с ним теорема 2.1.

Обозначение 2.1. В дальнейшем открытый шар в квазиметрике $d$ с центром в точке $x$ радиуса $R$ будем обозначать символом $\mathrm{Box}(x, R)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$M(s_0, u) = \frac{1}{s_0}\int\limits_0^{s_0} K(s, s_0, u)\, ds,$$

где

$$K(s, s_0, u) = \frac{(g(u_1+s_0, u_2+s) - g(u_1, u_2+s)) - (f(u_1+s, u_2+s_0) - f(u_1+s, u_2))}{s_0}, \tag{2.6}$$

$u = (u_1, u_2, u_3) \in \widetilde O$. Из (2.6) вытекает, что

$1^0$) $K(s, s_0, u) \in C([0, s_0] \times (0, s') \times \widetilde O)$, где $s'$ — некоторая положительная константа, и $|K(s, s_0, u)| \le 2L$ равномерно в $[0, s_0] \times (0, s') \times \widetilde O$;

$2^0$) $M(s_0, u) \in C((0, s') \times \widetilde O)$, где $s'$ — константа из $1^0$, и $|M(s_0, u)| \le 2L$ равномерно в $(0, s') \times \widetilde O$.

**Свойство 2.1.** *Пусть $f$, $g \in C^1(\widetilde O)$. Тогда $\lim\limits_{s_0\to 0} M(s_0, u) = [X, Y](u)$, где $u \in \widetilde O$.*

Доказательство. Имеем

$$g(u_1+s_0, u_2+s) - g(u_1, u_2+s) = \frac{\partial g}{\partial x}(u_1, u_2+s)s_0 + o(s_0),$$

$$f(u_1+s, u_2+s_0) - f(u_1+s, u_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(u_1+s, u_2)s_0 + o(s_0).$$

Подставляя эти тождества в (2.6), получаем

$$K(s, s_0, u) = \frac{\partial g}{\partial x}(u_1, u_2+s) - \frac{\partial f}{\partial y}(u_1+s, u_2) + o(1),$$

откуда в силу непрерывности частных производных вытекает, что $\lim\limits_{s_0\to 0} M(s_0, u) = [X, Y](u)$.

**Теорема 2.2.** *Предположим, что в некоторой точке* $u = (u_1, u_2, u_3) \in \widetilde{O}$ *выполняется* $M(s_0, u) \neq 0$ *для некоторого достаточно малого числа* $s_0$. *Тогда найдется окрестность* $O_u$ *точки* $u$ *такая, что любые две точки* $u^1$, $u^2 \in O_u$ *можно соединить абсолютно непрерывной горизонтальной кривой.*

Доказательство. Для определенности будем считать, что $M(s_0, u) > 0$. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = 1, \\ \dot{y}_1(s) = 0, \\ \dot{z}_1(s) = f(x_1, y_1), \end{cases} \qquad (x_1, y_1, z_1)(0) = u, \quad s \in [0, s_0]. \tag{2.7}$$

Следовательно, для решения задачи Коши (2.7) выполняются равенства

$$x_1(s_0) = u_1 + s_0, \quad y_1(s_0) = u_2, \quad z_1(s_0) = u_3 + \int\limits_0^{s_0} f(u_1 + s, u_2)\, ds.$$

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{gathered} \dot{x}_2(s) = 0, \quad \dot{y}_2(s) = 1, \quad \dot{z}_2(s) = g(x_2, y_2), \\ (x_2, y_2, z_2)(0) = (x_1, y_1, z_1)(s_0), \quad s \in [0, s_0]. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Тогда для решения задачи Коши (2.8) выполняются равенства

$$x_2(s_0) = u_1 + s_0, \quad y_2(s_0) = u_2 + s_0,$$

$$z_2(s_0) = u_3 + \int\limits_0^{s_0} f(u_1 + s, u_2)\, ds + \int\limits_0^{s_0} g(u_1 + s_0, u_2 + s)\, ds.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered} \dot{x}_3(s) = -1, \quad \dot{y}_3(s) = 0, \quad \dot{z}_3(s) = -f(x_3, y_3), \\ (x_3, y_3, z_3)(0) = (x_2, y_2, z_2)(s_0), \quad s \in [0, s_0]. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Тогда для решения задачи Коши (2.9) выполняются равенства

$$x_3(s_0) = u_1, \quad y_3(s_0) = u_2 + s_0,$$

$$\begin{aligned} z_3(s_0) = u_3 + \int\limits_0^{s_0} f(u_1 + s, u_2)\, ds + \int\limits_0^{s_0} g(u_1 + s_0, u_2 + s)\, ds \\ - \int\limits_0^{s_0} f(u_1 + s_0 - s, u_2 + s_0)\, ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{gathered} \dot{x}_4(s) = 0, \quad \dot{y}_4(s) = -1, \quad \dot{z}_4(s) = -g(x_4, y_4), \\ (x_4, y_4, z_4)(0) = (x_3, y_3, z_3)(s_0), \quad s \in [0, s_0]. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Тогда для решения задачи Коши (2.10) выполняются равенства

$$x_4(s_0) = u_1, \quad y_4(s_0) = u_2,$$

$$z_4(s_0) = u_3 + \int\limits_0^{s_0} f(u_1+s,u_2)\,ds + \int\limits_0^{s_0} g(u_1+s_0,u_2+s)\,ds - \int\limits_0^{s_0} f(u_1+s_0-s,u_2+s_0)\,ds - \int\limits_0^{s_0} g(u_1,u_2+s_0-s)\,ds.$$

Используя элементарные линейные замены переменной $s$, получаем

$$\begin{aligned} &z_4(s_0)-u_3 \\ &= \int\limits_0^{s_0} (f(u_1+s_0-s,u_2)-f(u_1+s_0-s,u_2+s_0))\,ds + \int\limits_0^{s_0} (g(u_1+s_0,u_2+s)-g(u_1,u_2+s))\,ds \\ &= \int\limits_0^{s_0} (g(u_1+s_0,u_2+s)-g(u_1,u_2+s))\,ds - \int\limits_0^{s_0} (f(u_1+s,u_2+s_0)-f(u_1+s,u_2))\,ds \\ &= s_0\int\limits_0^{s_0} K(s,s_0,u)\,ds = s_0^2 M(s_0,u). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Учитывая $2^0$ и (2.11), можем сделать следующий вывод: для любой точки $\exp(tT)(u)$, где $t\in\big(0,s_0^2M(s_0,u)\big]$, найдется «ломаная»

$$p(s) = \begin{cases} \exp(sX)(u), & s\in[0,t_0],\\ \exp((s-t_0)Y)\circ\exp(t_0X)(u), & s\in[t_0,2t_0],\\ \exp(-(s-2t_0)X)\circ\exp(t_0Y)\circ\exp(t_0X)(u), & s\in[2t_0,3t_0],\\ \exp(-(s-3t_0)Y)\circ\exp(-t_0X)\circ\exp(t_0Y)\circ\exp(t_0X)(u), & s\in[3t_0,4t_0], \end{cases} \tag{2.12}$$

такая, что

$$p(4t_0) = \exp(-t_0Y)\circ\exp(-t_0X)\circ\exp(t_0Y)\circ\exp(t_0X)(u) = \exp(tT)(u),$$

при этом равномерно относительно $t\in(0,s_0]$ выполняется оценка $t=O\big(t_0^2\big)$.

Из $2^0$ вытекает, что найдется окрестность $\widetilde{O}_u$ точки $u$ такая, что $M(s_0,v)\geq h>0$, $h=\mathrm{const}$, равномерно относительно точек $v\in\widetilde{O}_u$. Теперь рассмотрим такую окрестность $O'_u\subset\widetilde{O}_u$ точки $u$, что для любых двух точек $u^1,u^2\in O'_u$, $u^1=\big(u_1^1,u_2^1,u_3^1\big)$, $u^2=\big(u_1^2,u_2^2,u_3^2\big)$, выполняется следующее свойство: если $u^2=\exp(aX+bY+cT)(u^1)$, то $u^3=\big(u_1^3,u_2^3,u_3^3\big)=\exp(aX+bY)(u^1)\in O'_u$. Используя лемму 1.2, имеем $u^2=\exp(cT)(u^3)$; также полагаем, что область $O'_u$ мала настолько, что равномерно относительно выбора точек $u^1$, $u^2$ выполняется оценка $0<c<s_0^2M(s_0,u^3)$ (здесь мы предполагаем, что $u_3^3\leq u_2^3$, в противном случае полагаем, что $|c|<s_0^2M(s_0,u^2)$). Тогда горизонтальная кривая, соединяющая точки $u^1$, $u^2$, строится следующим образом: точки $u^1$ и $u^3$ соединяются кривой $\exp(s(aX+bY))(u^1)$, $s\in[0,1]$, точки $u^3$ и $u^2$ — «ломаной» вида (2.12). Теорема 2.2 доказана.

Учитывая теорему 2.2 и рассматривая в качестве допустимого класс всевозможных абсолютно непрерывных горизонтальных кривых, стандартным образом (см., например, [17]) определим в области $O'_u$ следующую внутреннюю метрику $\rho$.

Определение 2.1. Метрика $\rho(v,w)=\inf l(\gamma)$, где $\gamma\subset O'_u$ — всевозможные абсолютно непрерывные горизонтальные пути, соединяющие точки $v,w\in O'_u$, называется *метрикой Карно — Каратеодори.*

В дальнейшем открытый шар в метрике $\rho$ с центром в точке $x$ радиуса $R$ мы будем обозначать символом $B(x,r)$.

**Теорема 2.3.** *Предположим, что найдется положительная константа* $h_1$ *такая, что*

$$0<h_1<|M(s,v)|\quad \forall s\in(0,s_0]\ \forall v\in O'_u. \tag{2.13}$$

*Тогда в области* $O'_u$ *квазиметрика* $d$ *и метрика Карно — Каратеодори* $\rho$ *билипшицево эквивалентны.*

Доказательство. Учитывая $2^0$, для определенности можно полагать, что $M(s,v)>0$ при всех $s\in(0,s_0]$ и всех $v\in O'_u$. Из леммы 1.2 вытекает, что

$$\operatorname{Box}(v,r)=\{\exp(\epsilon^2cT)\circ\exp(\varepsilon(aX+bY))(v)\mid |(a,b,c)|_\infty=1,\ \epsilon,\varepsilon<r\}. \tag{2.14}$$

В дальнейшем мы рассматриваем только такие $v,r$, что $\operatorname{Box}(v,r)\subset O'_u$. Очевидно, что отрезки интегральных линий $\exp(s(\alpha X+\beta Y))(v)$, $s\in[0,\tau]$, $v\in O'_u$, где $\tau$, $\alpha$, $\beta$ достаточно малы по модулю, являются кратчайшими в метрике $\rho$. Рассмотрим произвольную точку

$$w=\exp(\epsilon^2cT)\circ\exp(\varepsilon(aX+bY))(v)\in\operatorname{Box}(v,r)$$

(см. (2.14)). Рассмотрим точку $w$ как $u^2$, а точку $v$ как $u^1$ (см. обозначения теоремы 2.2). Соединим точки $w$, $v$ горизонтальной кривой, построенной в теореме 2.2. Свойства «ломаной» (2.12) позволяют нам сделать вывод о том, что найдется константа $C_1=C_1(h_1,L)$, не зависящая от выбора точек $w\in\operatorname{Box}(v,r)$ и $v\in O_u$, такая, что

$$\rho(v,w)\le C_1(\epsilon+\varepsilon)\le 2C_1d(v,w)\Rightarrow \operatorname{Box}(v,r)\subset B(v,2C_1r).$$

Пусть $v=(v_1,v_2,v_3)$. Рассмотрим кратчайшую в метрике Карно — Каратеодори $\gamma(s)=(x(s),y(s),z(s))$, $\gamma(0)=v$, которая соединяет точки $v$ и $w$. Полагаем, что $\gamma(s)$ параметризована длиной дуги (см. (1.4)). Тогда, используя (1.3), можем записать, что

$$z(s)=v_3+\int\limits_0^s(\dot xf(x,y)+\dot yg(x,y))(t)\,dt=v_3+(x(s)-v_1)f(v_1,v_2)+(y(s)-v_2)g(v_1,v_2)$$
$$+\int\limits_0^s(\dot x(f(x,y)-f(v_1,v_2))+\dot y(g(x,y)-g(v_1,v_2)))(t)\,dt,$$

при этом

$$\left|\int\limits_0^s(\dot x(f(x,y)-f(v_1,v_2))+\dot y(g(x,y)-g(v_1,v_2)))(t)\,dt\right|$$
$$\le\int\limits_0^s|\dot x(f(x,y)-f(v_1,v_2))+\dot y(g(x,y)-g(v_1,v_2))|(t)\,dt$$
$$\le\int\limits_0^s\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}(2L)^{1/2}t\,dt=O(s^2).$$

Таким образом,

$$z(s) = v_3 + (x(s) - v_1)f(v_1, v_2) + (y(s) - v_2)g(v_1, v_2) + O(s^2),$$

где асимптотика $O(s^2)$ равномерна по $s$ и $v$. Рассмотрим параметризованную горизонтальную кривую

$$\exp(t(\alpha X + \beta Y))(v) = (v_1 + \alpha t, v_2 + \beta t, \hat{z}(t)),$$

где

$$\alpha = \frac{x(s) - v_1}{s}, \quad \beta = \frac{y(s) - v_2}{s}.$$

Используя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$\hat{z}(s) = v_3 + \int_0^s (\alpha f(v_1 + \alpha t, v_2 + \beta t) + \beta g(v_1 + \alpha t, v_2 + \beta t))\, dt$$
$$= v_3 + s(\alpha f(v_1, v_2) + \beta g(v_1, v_2)) + G(v, s),$$

при этом с учетом липшицевости функций $f$, $g$ несложно убедиться, что $G(v, s) = O(s^2)$ равномерно по $s$ и $v$. В итоге

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)) = (v_1 + \alpha s, v_2 + \beta s, \hat{z}(s) + O(s^2)),$$

где асимптотика $O(s^2)$ равномерна по $s$ и $v$. Используя лемму 1.2, приходим к тому, что

$$B(v, s) \subset \mathrm{Box}(v, K_1 s)$$

для некоторой константы $K_1 = K_1(h_1, L)$, и теорема 2.3 доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Субриманова геометрия при минимальной гладкости векторных полей // Докл. РАН. 2008. Т. 422, № 5. С. 583–588.
2. *Водопьянов С. К.* Дифференцируемость отображений в геометрии многообразий Карно // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 251–271.
3. *Vodopyanov S. K.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 247–302. (Contemp. Math.; V. 424).
4. *Gromov M.* Carnot–Caratheodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
5. *Грешнов А. В.* Метрики равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори и их касательных конусов // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 259–292.
6. *Mitchell J.* On Carnot–Carathéodory metrics // J. Differ. Geom. 1985. V. 21. P. 35–45.
7. *Belläiche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 1–78.
8. *Koranyi A., Riemann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.
9. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.
10. *Rampazzo F., Sussmann H.* Commutators of flow maps of nonsmooth vector fields // J. Differ. Equations. 2007. V. 232, N 1. P. 134–175.
11. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
12. *Stein E. M.* Harmonic analysis: Real-variables methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
13. *Берестовский В. Н.* Однородные пространства с внутренней метрикой. Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 1988.

**14.** *Liu W., Sussmann H. J.* Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-two distributions // Mem. Amer. Math. Soc. 1995. V. 118.
**15.** *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. (2). 1989. V. 119. P. 1–60.
**16.** *Грешнов А. В.* О дифференцируемости горизонтальных кривых в квазипространствах Карно — Каратеодори // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 67–86.
**17.** *Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.* Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.

*Статья поступила 1 июля 2009 г.*

Грешнов Александр Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
greshnov@math.nsc.ru