Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 517.962.2

О СОХРАНЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Ю. Александров, А. П. Жабко

Аннотация. Исследуется проблема сохранения устойчивости при переходе от обыкновенных дифференциальных уравнений к разностным. С помощью метода функций Ляпунова определяются условия, при выполнении которых из асимптотической устойчивости нулевых решений систем дифференциальных уравнений следует, что нулевые решения соответствующих разностных систем также являются асимптотически устойчивыми. Доказываются теоремы об устойчивости возмущенных систем. Находятся оценки времени переходных процессов для некоторого класса систем нелинейных разностных уравнений. Исследуются условия устойчивости сложных систем по нелинейному приближению.

Ключевые слова: разностная система, функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость, сложная система, устойчивость по нелинейному приближению.

1. Введение

В широком классе случаев при исследовании математических моделей реальных процессов и явлений непрерывные системы приближенно заменяются дискретными [1–3]. В частности, большинство численных методов решения дифференциальных уравнений основано на сведении их к уравнениям в конечных разностях [4, 5].

Важной проблемой, возникающей при такой замене, является проблема сохранения качественных характеристик исследуемых систем (интегралов движения, интегральных инвариантов, устойчивости решений и т. д.). Известно [2, 5], что во многих случаях требуется коррекция разностных схем для обеспечения согласованности между свойствами решений непрерывных и дискретных уравнений. Указанная коррекция заключается в построении консервативных численных методов, основанных на модификации вычислительных схем путем введения управлений в процессе вычислений. При этом значения управляющих параметров на каждом шаге интегрирования определяются из условия сохранения известных характеристик рассматриваемой системы [2, 4–8].

Однако использование консервативных методов приводит к существенному усложнению вычислительных схем. Методы становятся численно-аналитическими [6]. Поэтому с практической точки зрения весьма актуальной является

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 08–08–92208ГФЕН-а).

задача выделения классов систем, для которых сохранение качественных характеристик при переходе к дискретному виду имеет место и без дополнительной коррекции разностных схем.

В настоящей работе исследуются некоторые классы систем обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующих им разностных систем. С помощью метода функций Ляпунова определяются условия согласованности между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле асимптотической устойчивости нулевого решения.

2. Постановка задачи

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} p_{sj} f_j(x_j), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь p_{sj} — постоянные коэффициенты, функции $f_j(x_j)$ определены и непрерывны при $|x_j| < H$ $(0 < H \leq +\infty)$ и обладают свойством $x_j f_j(x_j) > 0$ при $x_j \neq 0$. При указанных предположениях система (1) имеет нулевое решение.

Уравнения вида (1) применяются при исследовании широкого класса систем автоматического регулирования [9–11]. Они также используются при моделировании нейронных сетей [12].

Важной задачей, возникающей при изучении таких уравнений, является задача анализа устойчивости нулевого решения системы (1). Для нахождения условий устойчивости используется прямой метод Ляпунова. В соответствии с подходом, предложенным в [10], функция Ляпунова строится в виде

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \int_0^{x_s} f_s(\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — положительные постоянные. Из условия $x_j f_j(x_j) > 0$ при $x_j \neq 0$, которому удовлетворяют функции $f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)$, следует, что функция Ляпунова (2) положительно определена. С помощью функции (2) в работах [10–13] получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1).

Далее наряду с уравнениями (1) исследуем соответствующую систему разностных уравнений

$$y_s(k+1) = y_s(k) + h \sum_{j=1}^{n} p_{sj} f_j(y_j(k)), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Здесь h — шаг дискретизации $(h > 0)$, а целочисленный аргумент k во всех рассматриваемых в статье разностных уравнениях принимает значения $0, 1, \ldots$.

Определим условия, при выполнении которых из асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (3).

Заметим, что для решения ряда задач кроме согласованности между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле устойчивости требуется также сохранение таких характеристик, как устойчивость по отношению к постоянно действующим возмущениям, скорость затухания переходных процессов и область асимптотической устойчивости.

Особый интерес в теории автоматического управления представляют системы дифференциальных уравнений, нулевые решения которых асимптотически устойчивы в целом [14]. При этом следует отметить, что требование асимптотической устойчивости в целом нулевого решения соответствующей разностной системы может приводить к существенным ограничениям на правые части изучаемых уравнений.

Действительно, пусть функции $f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)$ имеют вид

$$f_j(x_j) = x_j^{\mu}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где μ — положительное рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, $\mu \neq 1$. Таким образом, уравнения (1) представляют собой систему с однородными правыми частями. Предположим, что нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво, причем для нее существует непрерывно дифференцируемая однородная функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (см. [15]). Известно [14], что тогда область асимптотической устойчивости нулевого решения совпадает со всем n-мерным евклидовым пространством $\mathbb{E}^n$.

В статье [16] доказано, что если $\mu > 1$, то при любом шаге дискретизации h нулевое решение соответствующей разностной системы (3) также будет асимптотически устойчиво. В то же время на примере скалярного уравнения

$$y(k+1) = y(k) - hy^{\mu}(k)$$

получаем, что при $\mu > 1$ система (3), вообще говоря, не является диссипативной [15]. У нее могут существовать неограниченные решения. Следовательно, нулевое решение не будет асимптотически устойчивым в целом.

С другой стороны, нетрудно показать, что при $0 < \mu < 1$ система (3) равномерно диссипативна, но при этом нулевое решение может не являться асимптотически устойчивым.

Таким образом, если функции $f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)$ имеют вид (4), то требования асимптотической устойчивости нулевого решения и ограниченности каждого решения системы (3) противоречат друг другу: для асимптотической устойчивости нужно, чтобы выполнялось неравенство $\mu > 1$, а для ограниченности решений — неравенство $0 < \mu < 1$.

В настоящей работе наряду с исследованием условий согласованности между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле устойчивости нулевого решения определяются также классы допустимых функций $f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)$, для которых нулевое решение разностной системы (3) является асимптотически устойчивым в целом. Кроме того, изучаются условия устойчивости для возмущенных систем, устанавливаются оценки скорости стремления решений к началу координат, доказывается теорема об устойчивости сложных систем по нелинейному приближению.

3. Достаточные условия асимптотической устойчивости

Далее будем считать, что правые части уравнений (1) удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям.

Предположение 1. *Пусть существуют положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, при которых квадратичная форма*

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{s,j=1}^{n} \lambda_s p_{sj} x_s x_j$$

отрицательно определена.

Замечание 1. Условия существования таких значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ исследовались в работах [10, 13, 17].

Замечание 2. Известно [10], что если выполнено предположение 1, то при любых допустимых функциях $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, а функция Ляпунова (2) при данных значениях коэффициентов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Предположение 2. *Для любого числа $H_1 \in (0, H)$ функции $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ в области $\|\mathbf{x}\| < H_1$ (здесь и всюду далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора) удовлетворяют условию Липшица, т. е. можно указать положительную постоянную $L = L(H_1)$ такую, что если $|x'_j| < H_1$, $|x''_j| < H_1$, то справедливы неравенства*

$$|f_j(x'_j) - f_j(x''_j)| \le L|x'_j - x''_j|, \quad j = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Покажем, что при выполнении предположений 1 и 2 имеет место согласованность между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле устойчивости нулевого решения.

Теорема 1. *Существует число $h_0 > 0$ такое, что при всех $h \in (0, h_0)$ нулевое решение системы* (3) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть при построении функции Ляпунова (2) коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ выбираются в соответствии с предположением 1. Рассмотрим приращение этой функции на решениях системы (3). Имеем

$$\Delta V = V(\mathbf{y}(k+1)) - V(\mathbf{y}(k)) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \int\limits_{y_s(k)}^{y_s(k+1)} f_s(\tau)\, d\tau$$

$$= h \sum_{s=1}^{n} \lambda_s f_s(y_s(k) + \theta_{sk} \Delta y_s(k)) \sum_{j=1}^{n} p_{sj} f_j(y_j(k)) = h \sum_{s,j=1}^{n} \lambda_s p_{sj} f_s(y_s(k)) f_j(y_j(k))$$

$$+ h \sum_{s,j=1}^{n} \lambda_s p_{sj} f_j(y_j(k))(f_s(y_s(k) + \theta_{sk}\Delta y_s(k)) - f_s(y_s(k))),$$

где $\Delta y_s(k) = y_s(k+1) - y_s(k)$, $\theta_{sk} \in (0, 1)$, $s = 1, \dots, n$.

Зададим число H_1, $0 < H_1 < H$, и найдем для него постоянную Липшица $L(H_1)$. Используя предположения 1 и 2, получаем, что можно указать число $\delta > 0$, для которого при $\|\mathbf{y}(k)\| < \delta$ справедливы оценки

$$\Delta V \le -c_1 h \sum_{s=1}^{n} f_s^2(y_s(k)) + h^2 L(H_1) \sum_{s,i,j=1}^{n} \lambda_s\, |p_{si} f_i(y_i(k))|\, |p_{sj} f_j(y_j(k))|$$

$$\le -h\,(c_1 - h c_2 L(H_1)) \sum_{s=1}^{n} f_s^2(y_s(k)).$$

Здесь c_1, c_2 — положительные постоянные.

Таким образом, если $h_0 < c_1/(c_2 L(H_1))$, то при $h \in (0, h_0)$ и $\|\mathbf{y}(k)\| < \delta$ имеем

$$\Delta V \le -c_3 h \sum_{s=1}^{n} f_s^2(y_s(k)), \tag{6}$$

где $c_3 > 0$. Значит, функция $V(\mathbf{x})$ удовлетворяет всем требованиям дискретного аналога теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [3, с. 27–30].

Следствие 1. *Если по заданному числу H_1 постоянную Липшица $L(H_1)$ для функций $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ можно выбирать так, чтобы выполнялось предельное соотношение*

$$L(H_1) \to 0 \quad \text{при } H_1 \to +0, \tag{7}$$

то нулевое решение системы (3) *будет асимптотически устойчиво при любом шаге дискретизации h.*

Действительно, в оценках приращения функции Ляпунова $V(\mathbf{x})$ на решениях системы (3), полученных при доказательстве теоремы 1, постоянные c_1 и c_2 не зависят ни от шага дискретизации h, ни от величины δ. Поэтому для любого фиксированного $h > 0$ число H_1 можно выбрать настолько малым, чтобы имело место неравенство $hc_2L(H_1) < c_1$. Но тогда найдется $\tilde{\delta} > 0$ такое, что при $\|\mathbf{y}(k)\| < \tilde{\delta}$ справедлива оценка (6).

Например, условие (7) будет выполнено, если функции $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ имеют вид

$$f_j(x_j) = x_j^{\mu_j}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{8}$$

где μ_j — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $\mu_j > 1$.

Следствие 2. *Пусть функции $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ определены и непрерывны при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ и удовлетворяют условию Липшица с константой, не зависящей от выбора числа H_1, т. е. можно указать положительную постоянную L, для которой неравенства* (5) *выполняются при любых $x_j', x_j'' \in (-\infty, +\infty)$. Если справедливы предельные соотношения*

$$\int\limits_0^{x_j} f_j(\tau)\,d\tau \to +\infty \quad \text{при } |x_j| \to \infty, \quad j = 1, \dots, n,$$

то существует такое $h_0 > 0$, что для всех $h \in (0, h_0)$ нулевое решение системы (3) *асимптотически устойчиво в целом.*

Действительно, в данном случае число h_0 можно выбрать так, чтобы при $h \in (0, h_0)$ оценка (6) имела место для любых $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{E}^n$. Таким образом, функция (2) будет удовлетворять требованиям дискретного аналога теоремы Барбашина — Красовского об асимптотической устойчивости в целом [3, с. 34, 35].

Например, условия следствия 2 будут выполнены, если в системе (3) допустимые функции $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ определяются по формулам

$$f_j(x_j) = \frac{x_j^{\mu_j}}{1 + x_j^{\nu_j}}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где μ_j — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, ν_j — рациональные числа с четными числителями и нечетными знаменателями, $\mu_j \ge 1$, $\nu_j > 0$, $|\mu_j - \nu_j| \le 1$.

4. Устойчивость возмущенных систем

Рассмотрим теперь возмущенную систему

$$y_s(k+1) = y_s(k) + h\sum_{j=1}^{n} p_{sj} f_j(y_j(k)) + hq_s(k, \mathbf{y}(k)), \quad s = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Здесь функции $q_s(k,\mathbf{x})$ заданы при $k=0,1,\dots$, $\|\mathbf{x}\|<\rho$ $(0<\rho\le H)$, непрерывны по $\mathbf{x}$ и удовлетворяют неравенствам

$$|q_s(k,\mathbf{x})|\le b_s\left(\sum_{j=1}^{n}|f_j(x_j)|\right)^{\sigma},\quad s=1,\dots,n,$$

где $b_s>0$, $\sigma>0$. При указанных условиях система (9) также имеет решение $\mathbf{y}(k)\equiv\mathbf{0}$. По-прежнему считаем, что выполнены предположения 1 и 2.

Исследуем вопрос: при каких условиях возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения?

Теорема 2. *Если $\sigma>1$, то существует число $h_0>0$ такое, что при всех $h\in(0,h_0)$ нулевое решение системы* (9) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова (2), коэффициенты которой выбраны в соответствии с предположением 1. Ее приращение на решениях возмущенной системы можно представить в виде

$$\Delta V=W_1(\mathbf{y}(k))+W_2(k,\mathbf{y}(k)).$$

Здесь W_1 — приращение функции (2) на решениях системы (3), а

$$W_2=h\sum_{s=1}^{n}\lambda_s f_s\left(y_s(k)+h\sum_{j=1}^{n}p_{sj}f_j(y_j(k))+h\theta_{sk}q_s(k,\mathbf{y}(k))\right)q_s(k,\mathbf{y}(k)),$$

причем $\theta_{sk}\in(0,1)$, $s=1,\dots,n$.

Как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что существуют числа $h_0>0$ и $\delta>0$ такие, что если $h\in(0,h_0)$, $\|\mathbf{y}(k)\|<\delta$, то

$$W_1(\mathbf{y}(k))\le-\tilde c_1 h\sum_{s=1}^{n}f_s^2(y_s(k)),\quad \tilde c_1=\mathrm{const}>0.$$

Для функции $W_2(k,\mathbf{y}(k))$ при достаточно малых значениях $\|\mathbf{y}(k)\|$ и всех $k=0,1,\dots$ справедливы неравенства

$$|W_2(k,\mathbf{y}(k))|\le\tilde c_2 h\sum_{s=1}^{n}|q_s(k,\mathbf{y}(k))|\left(|f_s(y_s(k))|+h\sum_{j=1}^{n}|f_j(y_j(k))|\right.$$
$$\left.+h|q_s(k,\mathbf{y}(k))|\right)\le h(1+h)\tilde c_3\left(\sum_{s=1}^{n}f_s^2(y_s(k))\right)^{\frac{\sigma+1}{2}}.$$

Здесь $\tilde c_2,\tilde c_3$ — положительные постоянные.

Значит, если $\sigma>1$, то найдется такое $\tilde\delta>0$, что функция $W_1(\mathbf{x})+W_2(k,\mathbf{x})$ будет отрицательно определена на множестве $\|\mathbf{x}\|<\tilde\delta$, $k=0,1,\dots$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\sigma>1$, а для функций $f_1(x_1),\dots,f_n(x_n)$ постоянную Липшица $L(H_1)$ можно выбирать так, чтобы выполнялось предельное соотношение* (7). *Тогда нулевое решение системы* (9) *асимптотически устойчиво при любом шаге дискретизации h.*

Замечание 3. Теорема 2 представляет собой теорему об устойчивости по первому в широком смысле [13] приближению. Она утверждает, что возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения, если их порядки превосходят порядки функций, входящих в правые части невозмущенных уравнений. В работе [13] аналогичный результат установлен для системы дифференциальных уравнений, соответствующей системе (9).

Покажем далее, что для некоторых классов нестационарных систем указанное в теореме 2 условие асимптотической устойчивости можно ослабить.

Пусть функции $f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)$ определяются по формулам (8), где μ_j — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $\mu_j > 1$. Таким образом, система (3) имеет вид

$$y_s(k+1) = y_s(k) + h\sum_{j=1}^{n} p_{sj} y_j^{\mu_j}(k), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

По-прежнему будем считать, что выполнено предположение 1.

Рассмотрим возмущенную систему

$$y_s(k+1) = y_s(k) + h\sum_{j=1}^{n} (p_{sj} + b_{sj}(k)) y_j^{\mu_j}(k), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Здесь функции $b_{sj}(k)$, $s, j = 1, \ldots, n$, заданы и ограничены при $k = 0, 1, \ldots$.

Положим

$$\varphi_{sj}(0) = 0, \quad \varphi_{sj}(k) = \sum_{m=0}^{k-1} b_{sj}(m), \quad k = 1, 2, \ldots, \ s, j = 1, \ldots, n.$$

Пусть функции $\varphi_{sj}(k)$ ограничены при $k = 0, 1, \ldots$.

В данном случае порядки возмущений совпадают с порядками функций, входящих в правые части невозмущенных уравнений. При этом не предполагается, что функции $b_{sj}(k)$ являются малыми по сравнению с коэффициентами p_{sj}. Например, они могут иметь вид $b_{sj}(k) = A_{sj}\sin k$, $s, j = 1, \ldots, n$, где на постоянные коэффициенты A_{sj} никаких дополнительных ограничений не накладывается.

Теорема 3. *Для любого $h > 0$ нулевое решение системы* (11) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Зафиксируем шаг дискретизации h. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{V}(k, \mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \frac{x_s^{\mu_s+1}}{\mu_s + 1} - h\sum_{s,j=1}^{n} \lambda_s \varphi_{sj}(k) x_s^{\mu_s} x_j^{\mu_j}.$$

Здесь положительные коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ выбраны в соответствии с предположением 1. Так как $\mu_j > 1$, а функции $\varphi_{sj}(k)$ ограничены, то в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и при всех $k = 0, 1, \ldots$ выполнено неравенство

$$a_1 \sum_{s=1}^{n} x_s^{\mu_s+1} \le \widetilde{V}(k, \mathbf{x}) \le a_2 \sum_{s=1}^{n} x_s^{\mu_s+1},$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Вычислим приращение функции $\widetilde{V}(k,\mathbf{x})$ на решениях возмущенной системы. Имеем

$$\Delta\widetilde{V}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\lambda_s}{\mu_s+1}\left(y_s^{\mu_s+1}(k+1)-y_s^{\mu_s+1}(k)\right)$$
$$-h\sum_{s,j=1}^{n}\lambda_s\varphi_{sj}(k+1)y_s^{\mu_s}(k+1)y_j^{\mu_j}(k+1)+h\sum_{s,j=1}^{n}\lambda_s\varphi_{sj}(k)y_s^{\mu_s}(k)y_j^{\mu_j}(k)$$
$$=h\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\left(y_s(k)+\theta_{sk}\Delta y_s(k)\right)^{\mu_s}\sum_{j=1}^{n}\left(p_{sj}+b_{sj}(k)\right)y_j^{\mu_j}(k)$$
$$-h\sum_{s,j=1}^{n}\lambda_s\varphi_{sj}(k+1)\left(y_s^{\mu_s}(k+1)y_j^{\mu_j}(k+1)-y_s^{\mu_s}(k)y_j^{\mu_j}(k)\right)$$
$$-h\sum_{s,j=1}^{n}\lambda_s b_{sj}(k)y_s^{\mu_s}(k)y_j^{\mu_j}(k)=h\sum_{s,j=1}^{n}\lambda_s p_{sj}y_s^{\mu_s}(k)y_j^{\mu_j}(k)$$
$$+h\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\left(\left(y_s(k)+\theta_{sk}\Delta y_s(k)\right)^{\mu_s}-y_s^{\mu_s}(k)\right)\sum_{j=1}^{n}\left(p_{sj}+b_{sj}(k)\right)y_j^{\mu_j}(k)$$
$$-h\sum_{s,j=1}^{n}\lambda_s\varphi_{sj}(k+1)\left(y_s^{\mu_s}(k+1)y_j^{\mu_j}(k+1)-y_s^{\mu_s}(k)y_j^{\mu_j}(k)\right).$$

Здесь $\Delta y_s(k)=y_s(k+1)-y_s(k)$, $\theta_{sk}\in(0,1)$, $s=1,\dots,n$. Следовательно, при достаточно малых значениях $\|\mathbf{y}(k)\|$ и всех $k=0,1,\dots$ справедлива оценка

$$\Delta\widetilde{V}\le -c_1\sum_{s=1}^{n}y_s^{2\mu_s}(k)+c_2\sum_{s,i,j=1}^{n}|y_s(k)|^{\mu_s}|y_i(k)|^{\mu_i}|y_j(k)|^{\mu_j-1},$$

где $c_1,c_2>0$.

Используя свойства обобщенно-однородных функций [14, с. 187–191], нетрудно показать, что функция $\Delta\widetilde{V}$ отрицательно определена. Теорема доказана.

Замечание 4. В [18] исследовалась система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s=\sum_{j=1}^{n}(p_{sj}+b_{sj}(t))x_j^{\mu_j},$$

где $\mu_j>1$ — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, p_{sj} — постоянные коэффициенты, функции $b_{sj}(t)$ непрерывны и ограничены при $t\ge 0$ вместе с интегралами $\int_0^t b_{sj}(\tau)d\tau$. Было показано, что при выполнении предположения 1 нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво. Таким образом, если условие ограниченности функций $\varphi_{sj}(k)$ при $k=0,1,\dots$ рассматривать в качестве дискретного аналога условия ограниченности при $t\ge 0$ интегралов $\int_0^t b_{sj}(\tau)d\tau$, то теорема 3 согласуется с доказанной в [18] теоремой об асимптотической устойчивости нулевого решения соответствующей системы дифференциальных уравнений.

5. Оценки решений

Рассмотрим невозмущенную систему (10). При этом по-прежнему считаем, что показатели степеней $\mu_1, \ldots, \mu_n$ являются рациональными числами с нечетными числителями и знаменателями, $\mu_j > 1$, $j = 1, \ldots, n$. Не умаляя общности, будем предполагать, что $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n$.

В данном случае функция Ляпунова, построенная по формуле (2), имеет вид

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \frac{x_s^{\mu_s+1}}{\mu_s+1}.$$

Если выполнено предположение 1, то для любого шага дискретизации h нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво, причем приращение функции $V(\mathbf{x})$ на решениях этой системы при соответствующем выборе коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и при достаточно малых значениях $\|\mathbf{y}(k)\|$ удовлетворяет неравенству

$$\Delta V \leq -c \sum_{s=1}^{n} y_s^{2\mu_s}(k), \quad c = \mathrm{const} > 0.$$

Оценим скорость стремления к началу координат решений уравнений (10). Из доказательства теоремы 1 следует существование числа δ, $0 < \delta < 1$, такого, что если $k_0 \geq 0$, $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, то при всех $k \geq k_0$ имеем

$$V(\mathbf{y}(k+1)) \leq V(\mathbf{y}(k)) - c \sum_{s=1}^{n} y_s^{2\mu_s}(k) \leq V(\mathbf{y}(k)) - c \sum_{s=1}^{n} |y_s(k)|^{\frac{2\mu_n(\mu_s+1)}{\mu_n+1}},$$

где $\mathbf{y}(k)$ — решение, проходящее при $k = k_0$ через точку $\mathbf{y}_0$.

Значит, для $k = k_0, k_0+1, \ldots$ выполняется соотношение

$$V(\mathbf{y}(k+1)) \leq V(\mathbf{y}(k)) - \tilde{c}\, V^{\frac{2\mu_n}{\mu_n+1}}(\mathbf{y}(k)).$$

Здесь $\tilde{c}$ — положительная постоянная, не зависящая от начальных данных рассматриваемого решения.

Применяя лемму, доказанную в работе [8], получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Существуют положительные числа δ_1, d_{1s}, d_{2s}, $s = 1, \ldots, n$, такие, что для любого решения $\mathbf{y}(k) = (y_1(k), \ldots, y_n(k))^*$ системы (10) с начальными данными $\mathbf{y}(k_0) = \mathbf{y}_0$, удовлетворяющими условиям $k_0 \geq 0$, $\|\mathbf{y}_0\| < \delta_1$, при всех $k \geq k_0$ справедливы оценки*

$$|y_s(k)| \leq d_{1s}\,(1 + d_{2s}(k-k_0))^{-\frac{\mu_n+1}{(\mu_s+1)(\mu_n-1)}}, \quad s = 1, \ldots, n.$$

Замечание 5. В теореме 4 значения постоянных δ_1, d_{1s}, d_{2s}, $s = 1, \ldots, n$, вообще говоря, зависят от выбранного шага дискретизации h.

Замечание 6. Показатели степеней в оценках, найденных для решений разностной системы (10), совпадают с показателями степеней в оценках, установленных в [18] для соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Покажем далее, что при выполнении некоторых дополнительных условий для системы (10) можно получить более точные оценки решений по сравнению с оценками, указанными в теореме 4.

Предположение 3. *Пусть для любого рационального числа $\gamma \geq 1$ с нечетными числителем и знаменателем существуют положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, при которых функция*

$$\widehat{W}(\mathbf{x}) = \sum_{s,j=1}^{n} \lambda_s p_{sj} x_s^{\gamma} x_j$$

отрицательно определена.

Если выполнено предположение 3, то для системы (1) можно построить семейство функций Ляпунова вида

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \int\limits_{0}^{x_s} f_s^{\gamma}(\tau)\, d\tau,$$

удовлетворяющих требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Замечание 7. В работе [19] получены необходимые и достаточные условия существования такого семейства функций Ляпунова для двумерных ($n = 2$) систем вида (1).

Замечание 8. Известно [20], что если

$$p_{sj} \geq 0 \quad \text{при } s \neq j,\ s, j = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

и вещественные части всех собственных чисел матрицы $\mathbf{P} = (p_{sj})_{s,j=1}^{n}$ отрицательны, то для системы (1) выполнено предположение 3.

Для системы (10) соответствующее семейство функций Ляпунова имеет вид

$$\widehat{V}(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \frac{x_s^{\gamma\mu_s+1}}{\gamma\mu_s + 1}. \tag{13}$$

Как и при доказательстве теоремы 1, нетрудно показать, что для каждой функции из семейства (13) существуют постоянные $\hat{\delta} > 0$ и $\hat{c} > 0$ такие, что если начальные данные решения $\mathbf{y}(k) = (y_1(k), \ldots, y_n(k))^*$ системы (10) удовлетворяют условиям $k_0 \geq 0$, $\|\mathbf{y}_0\| < \hat{\delta}$, то

$$\widehat{V}(\mathbf{y}(k+1)) \leq \widehat{V}(\mathbf{y}(k)) - \hat{c}\,\widehat{V}^{\frac{(\gamma+1)\mu_n}{\gamma\mu_n+1}}(\mathbf{y}(k))$$

при всех $k \geq k_0$.

Снова применяя лемму из [8], получаем, что при достаточно малых значениях $\hat{\delta}$ для решений, начинающихся при $k = k_0 \geq 0$ в $\hat{\delta}$-окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, при всех $k \geq k_0$ справедливы оценки

$$|y_s(k)| \leq \hat{d}_{1s}(1 + \hat{d}_{2s}(k - k_0))^{-\frac{\gamma\mu_n+1}{(\gamma\mu_s+1)(\mu_n-1)}}, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Здесь $\hat{d}_{1s}$, $\hat{d}_{2s}$, $s = 1, \ldots, n$, — положительные постоянные.

Функции $g_s(\gamma) = (\gamma\mu_n + 1)/(\gamma\mu_s + 1)$, $s = 1, \ldots, n$, монотонно возрастают на промежутке $(0, +\infty)$. Поэтому оценки (14) будут тем точнее (тем меньше будут показатели степеней в полученных неравенствах), чем больше выбрано значение параметра γ.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 5. *Пусть выполнено предположение 3. Тогда существуют положительные числа $\bar{\delta}$, $\bar{d}_{1s}$, $\bar{d}_{2s}$, $s = 1, \dots, n$, такие, что для любого решения $\mathbf{y}(k) = (y_1(k), \dots, y_n(k))^*$ системы* (10) *с начальными данными $\mathbf{y}(k_0) = \mathbf{y}_0$, удовлетворяющими условиям $k_0 \ge 0$, $\|\mathbf{y}_0\| < \bar{\delta}$, при всех $k \ge k_0$ справедливы оценки*

$$|y_s(k)| \le \bar{d}_{1s}(1 + \bar{d}_{2s}(k - k_0))^{-\frac{q_s \mu_n}{\mu_s(\mu_n - 1)}}, \quad s = 1, \dots, n, \tag{15}$$

где q_s — любое число из интервала $(0, 1)$, если $\mu_s < \mu_n$, и $q_s = 1$, если $\mu_s = \mu_n$, $s = 1, \dots, n$.

Замечание 9. Оценки (15) тем точнее, чем ближе значения $q_1, \dots, q_{n-1}$ к единице.

Замечание 10. В теореме 5 значения постоянных $\bar{\delta}$, $\bar{d}_{1s}$, $\bar{d}_{2s}$, $s = 1, \dots, n$, вообще говоря, зависят от выбора чисел $q_1, \dots, q_{n-1}$ и от величины шага дискретизации h.

6. Некоторое обобщение полученных результатов

Покажем далее, что результаты, полученные в настоящей работе, можно распространить на системы более общего вида.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} p_{sj} f_j^{\alpha_{sj}}(x_j), \quad s = 1, \dots, n, \tag{16}$$

и соответствующую ей разностную систему

$$y_s(k+1) = y_s(k) + h \sum_{j=1}^{n} p_{sj} f_j^{\alpha_{sj}}(y_j(k)), \quad s = 1, \dots, n. \tag{17}$$

Здесь p_{sj} — постоянные коэффициенты, α_{sj} — положительные рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $h > 0$ — шаг дискретизации. Не умаляя общности, можно считать, что $\alpha_{ss} = 1$, $s = 1, \dots, n$.

Пусть $f_j(x_j)$ определены и непрерывны при $|x_j| < H$ $(0 < H \le +\infty)$, обладают свойством $x_j f_j(x_j) > 0$ при $x_j \ne 0$ и для этих функций выполнено предположение 2. Функции $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$, удовлетворяющие данным условиям, будем называть *допустимыми*.

Системы (16) и (17) имеют нулевые решения. Определим условия, при выполнении которых из асимптотической устойчивости нулевого решения системы (16) следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (17).

Определение 1. Будем говорить, что система (16) *абсолютно устойчива*, если ее нулевое решение асимптотически устойчиво при любых допустимых функциях $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$.

Рассмотрим сначала случай, когда для коэффициентов p_{sj} в изучаемых уравнениях справедливы неравенства (12). Например, эти неравенства будут иметь место, если система (16) получена в качестве системы сравнения для некоторой сложной (многосвязной) системы [21].

Теорема 6. *Пусть система* (16) *абсолютно устойчива. Тогда для любых допустимых функций $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ существует число $h_0 > 0$ такое, что при всех $h \in (0, h_0)$ нулевое решение системы* (17) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из абсолютной устойчивости системы (16) следует [22], что положительные постоянные $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и рациональные числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ с нечетными числителями и знаменателями, $\gamma_s \geq 1$, $s = 1, \dots, n$, можно выбрать так, чтобы функция

$$\widetilde{W}(\mathbf{x}) = \sum_{s,j=1}^{n} \lambda_s p_{sj} x_s^{\gamma_s} x_j^{\alpha_{sj}} \tag{18}$$

была отрицательно определена.

Согласно свойствам обобщенно-однородных функций [14, с. 187–191] для отрицательной определенности $\widetilde{W}(\mathbf{x})$ необходимо, чтобы имели место соотношения

$$\alpha_{sj} \geq \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_s + 1}, \quad s, j = 1, \dots, n. \tag{19}$$

Заметим, что если какой-то из коэффициентов p_{sj} равен нулю, то соответствующий ему показатель степени α_{sj} можно считать сколь угодно большим.

Используя выбранные значения параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, функцию Ляпунова для системы (17) строим в виде

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \int_0^{x_s} f_s^{\gamma_s}(\tau)\, d\tau. \tag{20}$$

Из условия $x_j f_j(x_j) > 0$ при $x_j \neq 0$, которому удовлетворяют допустимые функции, следует, что функция (20) положительно определена. Рассмотрим ее приращение на решениях уравнений (17).

Аналогично доказательству теоремы 1, нетрудно доказать существование числа $\delta > 0$, для которого при $\|\mathbf{y}(k)\| < \delta$ справедлива оценка

$$\Delta V \leq -c_1 h \sum_{s=1}^{n} f_s^{\gamma_s+1}(y_s(k)) + c_2 h \sum_{s,i,j=1}^{n} h^{\gamma_s} \left| f_i(y_i(k)) \right|^{\gamma_s \alpha_{si}} \left| f_j(y_j(k)) \right|^{\alpha_{sj}}$$
$$+ c_3 h^2 \sum_{s,i,j=1}^{n} \left| f_s(y_s(k)) \right|^{\gamma_s - 1} \left| f_i(y_i(k)) \right|^{\alpha_{si}} \left| f_j(y_j(k)) \right|^{\alpha_{sj}},$$

где c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные.

Учитывая соотношения (19), получаем, что число $h_0 > 0$ можно выбрать так, чтобы при $\|\mathbf{y}(k)\| < \delta$ и всех $h \in (0, h_0)$ имело место неравенство

$$\Delta V \leq -\frac{c_1}{2} h \sum_{s=1}^{n} f_s^{\gamma_s+1}(y_s(k)).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть система* (16) *абсолютно устойчива. Если для функций* $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ *постоянную Липшица* $L(H_1)$ *можно выбирать так, чтобы имело место предельное соотношение* (7)*, то нулевое решение системы* (17) *асимптотически устойчиво при любом шаге дискретизации* h.

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициенты p_{sj} могут не удовлетворять условиям (12). Построим вспомогательную систему

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} \bar{p}_{sj} f_j^{\alpha_{sj}}(x_j), \quad s = 1, \dots, n, \tag{21}$$

где $\bar{p}_{ss} = p_{ss}$, $\bar{p}_{sj} = |p_{sj}|$ при $s \neq j$, $s, j = 1, \dots, n$.

Теорема 7. *Пусть система* (21) *абсолютно устойчива. Тогда для любых допустимых функций* $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ *существует число* $h_0 > 0$ *такое, что при всех* $h \in (0, h_0)$ *нулевое решение системы* (17) *асимптотически устойчиво.*

Для доказательства настоящей теоремы положительные постоянные $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и рациональные числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ с нечетными числителями и знаменателями, $\gamma_s \geq 1$, $s = 1, \dots, n$, следует выбрать так, чтобы функция

$$\overline{W}(\mathbf{x}) = \sum_{s,j=1}^{n} \lambda_s \bar{p}_{sj} x_s^{\gamma_s} x_j^{\alpha_{sj}}$$

являлась отрицательно определенной. Тогда при данных значениях параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ функция (18) также будет отрицательно определена. Дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 6.

Пример 1. Пусть система (16) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -f_1(x_1) + f_3^{3/7}(x_3), \\ \dot{x}_2 = -f_2(x_2) + f_1^{5/3}(x_1), \\ \dot{x}_3 = -f_3(x_3) + a f_2^{\mu}(x_2), \end{cases} \tag{22}$$

где a — положительный параметр, μ — положительное рациональное число с нечетными числителем и знаменателем. Известно [22], что система (22) абсолютно устойчива тогда и только тогда, когда $\mu \geq 7/5$, причем если $\mu = 7/5$, то параметр a должен удовлетворять неравенству $a < 1$.

Предположим, что допустимые функции $f_1(x_1), f_2(x_2), f_3(x_3)$ определяются по формулам $f_1(x_1) = x_1^3$, $f_2(x_2) = x_2^5$, $f_3(x_3) = x_3^7$. Рассмотрим соответствующую разностную систему

$$\begin{cases} y_1(k+1) = y_1(k) + h\big(-y_1^3(k) + y_3^3(k)\big), \\ y_2(k+1) = y_2(k) + h\big(-y_2^5(k) + y_1^5(k)\big), \\ y_3(k+1) = y_3(k) + h\big(-y_3^7(k) + a y_2^{5\mu}(k)\big). \end{cases} \tag{23}$$

Применяя следствие из теоремы 6, получаем, что если система (22) абсолютно устойчива, то нулевое решение разностной системы (23) будет асимптотически устойчивым при любом шаге дискретизации h.

7. Устойчивость сложных систем по нелинейному приближению

Покажем теперь, что результаты настоящей статьи и предложенные в ней способы анализа устойчивости решений разностных систем можно использовать для получения условий устойчивости сложных систем по нелинейному приближению.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{G}_i(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m, \tag{24}$$

описывающая динамику сложной (многосвязной, крупномасштабной) системы [15, 21], состоящей из m взаимодействующих подсистем. Здесь $\mathbf{x}_i$ — векторы состояний размерности n_i, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_m^*)^*$; элементы векторов $\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i)$ являются непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка μ_i, $\mu_i > 1$; векторные функции $\mathbf{G}_i(t, \mathbf{x})$ непрерывны при $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < H$ ($H = \text{const} > 0$) и удовлетворяют условиям $\mathbf{G}_i(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ для всех $t \geq 0$. При указанных предположениях система (24) имеет нулевое решение. Функции $\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i)$ определяют внутренние связи подсистем, а функции $\mathbf{G}_i(t, \mathbf{x})$ характеризуют взаимодействие между подсистемами.

Будем считать, что нулевые решения изолированных подсистем

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, m, \tag{25}$$

асимптотически устойчивы. Совокупность изолированных подсистем (25) можно рассматривать в качестве системы нелинейного приближения для (24). В статьях [23, 24] установлены условия асимптотической устойчивости нулевого решения сложной системы (24) по нелинейному приближению (25). Для получения этих условий в [23] предложен подход, основанный на применении векторных функций Ляпунова и метода сравнения [15, 21]. В [24] использовались результаты работы [23] и проводилось их дальнейшее развитие. Однако в отличие от [23] функции Ляпунова строились в скалярном виде. Основная цель настоящего раздела статьи — распространить результаты работ [23, 24] на многосвязные системы разностных уравнений.

Пусть задана система

$$\mathbf{y}_i(k+1) = \mathbf{y}_i(k) + h\mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i(k)) + h\sum_{j=1}^{l_i} \mathbf{Q}_{ij}(k, \mathbf{y}(k)), \quad i = 1, \dots, m. \tag{26}$$

Здесь $\mathbf{y}_i(k) \in \mathbb{E}^{n_i}$, $\mathbf{y}(k) = (\mathbf{y}_1^*(k), \dots, \mathbf{y}_m^*(k))^*$; $h > 0$ — шаг дискретизации; вектор-функции $\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i)$ обладают указанными выше свойствами; вектор-функции $\mathbf{Q}_{ij}(k, \mathbf{x})$ определены при $k = 0, 1, \dots$, $\|\mathbf{x}\| < H$ ($H = \text{const} > 0$), непрерывны по $\mathbf{x}$ и удовлетворяют неравенствам $\|\mathbf{Q}_{ij}(k, \mathbf{x})\| \leq c_{ij}\, \|\mathbf{x}_1\|^{\alpha_{ij}^{(1)}} \dots \|\mathbf{x}_m\|^{\alpha_{ij}^{(m)}}$, $c_{ij} > 0$, $\alpha_{ij}^{(s)} \geq 0$, $s = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, l_i$, $i = 1, \dots, m$. Будем предполагать, что $\sum\limits_{s=1}^{m} \alpha_{ij}^{(s)} > 0$, $j = 1, \dots, l_i$, $i = 1, \dots, m$. Тогда система (26) имеет нулевое решение.

Рассмотрим соответствующие изолированные подсистемы

$$\mathbf{y}_i(k+1) = \mathbf{y}_i(k) + h\mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i(k)), \quad i = 1, \dots, m. \tag{27}$$

В работе [16] доказано, что если нулевые решения систем дифференциальных уравнений (25) асимптотически устойчивы, то при любом шаге дискретизации h нулевые решения разностных систем (27) также являются асимптотически устойчивыми. Определим условия устойчивости нулевого решения сложной системы (26) по нелинейному приближению (27).

Теорема 8. *Пусть существуют положительные числа $\xi_1, \dots, \xi_m$, удовлетворяющие неравенствам*

$$-\mu_i\xi_i + \sum_{s=1}^{m} \alpha_{ij}^{(s)} \xi_s > 0, \quad j = 1, \dots, l_i, \ i = 1, \dots, m. \tag{28}$$

Тогда при любом шаге дискретизации h нулевое решение системы (26) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из асимптотической устойчивости нулевых решений изолированных подсистем (25) следует [14, с. 189–192], что для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ существует функция Ляпунова $V_i(\mathbf{x}_i)$, обладающая свойствами:

1) $V_i(\mathbf{x}_i)$ определена и непрерывно дифференцируема при всех $\mathbf{x}_i \in \mathbb{E}^{n_i}$;

2) $V_i(\mathbf{x}_i)$ — положительно определенная функция;

3) $V_i(\mathbf{x}_i)$ — однородная функция порядка $\gamma_i - \mu_i + 1$;

4) функция $(\partial V_i / \partial \mathbf{x}_i)^* \, \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i)$ отрицательно определена.

При этом в качестве $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ можно выбирать любые рациональные числа с четными числителями и нечетными знаменателями, для которых выполнены неравенства $\gamma_i > \mu_i$, $i = 1, \dots, m$.

Для сложной системы (26) функцию Ляпунова строим в виде

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} V_i(\mathbf{x}_i). \tag{29}$$

Функция (29) положительно определена. Вычислим ее приращение на решениях рассматриваемой системы. Имеем

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{m} (V_i\left(\mathbf{y}_i(k) + h\mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i(k))\right) - V_i(\mathbf{y}_i(k))) \\ + h \sum_{i=1}^{m} \mathbf{R}_i^*(k, \mathbf{y}(k)) \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i} (\mathbf{y}_i(k) + h\mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i(k)) + h\theta_{ik}\mathbf{R}_i(k, \mathbf{y}(k))),$$

где $\mathbf{R}_i(k, \mathbf{y}(k)) = \sum\limits_{j=1}^{l_i} \mathbf{Q}_{ij}(k, \mathbf{y}(k))$, $\theta_{ik} \in (0, 1)$. Следовательно, найдется такое $\delta > 0$, что при $\|\mathbf{y}(k)\| < \delta$ и при всех $k = 0, 1, \dots$ справедлива оценка

$$\Delta V \le -a_1 \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{y}_i(k)\|^{\gamma_i} + a_2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l_i} (\|\mathbf{y}_1(k)\|^{\alpha_{ij}^{(1)}} \dots \|\mathbf{y}_m(k)\|^{\alpha_{ij}^{(m)}})^{\gamma_i - \mu_i + 1} \\ + a_3 \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{y}_i(k)\|^{\gamma_i - \mu_i} \sum_{j=1}^{l_i} \|\mathbf{y}_1(k)\|^{\alpha_{ij}^{(1)}} \dots \|\mathbf{y}_m(k)\|^{\alpha_{ij}^{(m)}}.$$

Здесь $a_1, a_2, a_3 > 0$. Заметим, что величины δ, a_1, a_2, a_3, вообще говоря, зависят от выбранного шага дискретизации h.

Пусть положительные постоянные $\xi_1, \dots, \xi_m$ удовлетворяют условиям (28). Не умаляя общности, можно считать, что ξ_i — рациональные числа с нечетными числителями и четными знаменателями, причем $1/\xi_i > \mu_i$, $i = 1, \dots, m$. Если порядки однородности функций Ляпунова $V_1(\mathbf{x}_1), \dots, V_m(\mathbf{x}_m)$ определить по формулам $\gamma_i = 1/\xi_i$, $i = 1, \dots, m$, то для достаточно малых значений $\|\mathbf{y}(k)\|$ и при всех $k = 0, 1, \dots$ будет выполнено неравенство

$$\Delta V \le -\frac{a_1}{2} \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{y}_i(k)\|^{\gamma_i}.$$

Теорема доказана.

Замечание 11. Сформулированные в теореме 8 достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения разностной системы (26) совпадают с условиями асимптотической устойчивости, полученными в [24] для многосвязных систем дифференциальных уравнений.

Замечание 12. Доказанная теорема позволяет свести вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения исследуемой разностной системы к вопросу о существовании положительного решения системы линейных неравенств (28). Условия разрешимости таких систем получены в работах [22, 25].

Пример 2. Пусть система (26) имеет вид

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1(k+1) = \mathbf{y}_1(k) + h\mathbf{F}_1(\mathbf{y}_1(k)) + h\mathbf{Q}_1(k, \mathbf{y}_m(k)), \\ \mathbf{y}_i(k+1) = \mathbf{y}_i(k) + h\mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i(k)) + h\mathbf{Q}_i(k, \mathbf{y}_{i-1}(k)), \quad i = 2, \dots, m. \end{cases}$$

Таким образом, рассмотрим систему с замкнутой петлей обратной связи. Будем считать, что при $k = 0, 1, \dots$, $\|\mathbf{x}\| < H$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{Q}_1(k, \mathbf{x}_m)\| \le c_1 \|\mathbf{x}_m\|^{\alpha_1}, \quad \|\mathbf{Q}_i(k, \mathbf{x}_{i-1})\| \le c_i \|\mathbf{x}_{i-1}\|^{\alpha_i}, \quad i = 2, \dots, m.$$

Здесь $c_1, \dots, c_m$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — положительные постоянные.

Выпишем неравенства (28), соответствующие исследуемой системе. Имеем

$$\alpha_1\xi_m > \mu_1\xi_1, \quad \alpha_i\xi_{i-1} > \mu_i\xi_i, \quad i = 2, \dots, m. \tag{30}$$

Получаем, что для существования положительных чисел $\xi_1, \dots, \xi_m$, удовлетворяющих условиям (30), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\alpha_1 \dots \alpha_m > \mu_1 \dots \mu_m$.

8. Заключение

В работе рассмотрены некоторые классы систем нелинейных дифференциальных уравнений и соответствующих им разностных систем. Найдены условия, при выполнении которых имеет место согласованность между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле асимптотической устойчивости нулевого решения. Следует отметить, что в настоящей статье при построении разностных схем использовался метод Эйлера. Однако предложенные способы анализа устойчивости решений нелинейных систем могут применяться и в случаях, когда вычислительная схема получена с помощью метода Рунге — Кутты или Адамса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Видаль П.* Нелинейные импульсные системы. М.: Энергия, 1974.
2. *Зубов В. И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судпромгиз, 1980.
3. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
5. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге — Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988.
6. *Зубов В. И.* Консервативные численные методы интегрирования дифференциальных уравнений в нелинейной механике // Докл. РАН. 1997. Т. 354, № 4. С. 446–448.
7. *Sanz-Serna J. M.* Symplectic integrators for Hamiltonian problems: an overview // Acta Numer. 1992. V. 354. P. 243–286.
8. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1217–1225.
9. *Летов А. М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Гостехиздат, 1955.
10. *Барбашин Е. А.* О построении функций Ляпунова для нелинейных систем // Тр. 1-го конгр. ИФАК. М., 1961. С. 742–751.

11. *Персидский С. К.* К вопросу об абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 1969. № 12. С. 5–11.
12. *Дудников Е. Е., Рыбашов М. В.* Сеть нейронов с нелинейными обратными связями // Автоматика и телемеханика. 1997. № 6. С. 64–73.
13. *Зубов В. И.* Асимптотическая устойчивость по первому, в широком смысле, приближению // Докл. РАН. 1996. Т. 346, № 3. С. 295–296.
14. *Зубов В. И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромгиз, 1959.
15. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
16. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* Об устойчивости решений нелинейных разностных систем // Изв. вузов. Математика. 2005. № 2. С. 3–12.
17. *Kazkurewicz E., Bhaya A.* Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston: Birkhauser, 1999.
18. *Александров А. Ю.* Об устойчивости по нелинейному приближению одного класса неавтономных систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 7. С. 993–995.
19. *Александров А. Ю.* О построении функций Ляпунова для нелинейных систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 291–297.
20. *Александров А. Ю., Платонов А. В.* Построение функций Ляпунова для одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 2. С. 267–270.
21. *Шильяк Д.* Децентрализованное управление сложными системами. М.: Мир, 1994.
22. *Aleksandrov A. Yu., Platonov A. V.* Aggregation and stability analysis of nonlinear complex systems // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 342, N 2. P. 989–1002.
23. *Косов А. А.* Об устойчивости сложных систем по нелинейному приближению // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 10. С. 1432–1434.
24. *Александров А. Ю.* Об устойчивости сложных систем в критических случаях // Автоматика и телемеханика. 2001. № 9. С. 3–13.
25. *Платонов А. В.* Об устойчивости нелинейных сложных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 4. С. 41–46.

Статья поступила 20 февраля 2009 г.

Александров Александр Юрьевич, Жабко Алексей Петрович
Санкт-Петербургский гос. университет,
Университетский пр., 35, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504
alex@vrm.apmath.spbu.ru,
zhabko@apmath.spbu.ru