*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2010. Том 51, № 2*

*УДК 517.9*

# АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА РИМАНОВЫХ SOL–МНОГООБРАЗИЯХ В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ

**А. А. Яковлев**

**Аннотация.** Получена адиабатическая асимптотика функции распределения спектра оператора Лапласа на римановом Sol-многообразии с одномерным инвариантным слоением.

**Ключевые слова:** оператор Лапласа, Sol-многообразие, слоение, след оператора, функция распределения спектра, адиабатические пределы.

## 1. Введение

Работа посвящена исследованию асимптотического поведения спектра оператора Лапласа на римановых Sol-многообразиях со слоением в адиабатическом пределе. Под адиабатическими асимптотическими задачами в спектральной теории дифференциальных операторов понимаются задачи исследования асимптотического поведения спектра самосопряженного эллиптического дифференциального оператора в частных производных, зависящего от малого параметра, в случае, когда малый параметр входит только в коэффициенты, стоящие перед производными по отношению к выбранной группе переменных (см., например, [1]).

Асимптотические задачи такого рода впервые возникли в квантовой молекулярной физике в работе Борна и Оппенгеймера в 1927 г., в которой предложено для описания квантовых уровней энергии молекулы использовать приближение, основанное на малости отношения массы электрона к массе ядра, что приводит к изучению асимптотического поведения спектра оператора Шредингера

$$H = -\frac{h^2}{2m}\Delta_x - \frac{h^2}{2M}\Delta_y + V(x,y),$$

описывающего квантовую теорию молекулы (квантового гамильтониана), в пределе $m/M \to 0$. Математическое обоснование приближения Борна — Оппенгеймера началось значительно позже, в начале 80-х годов прошлого века, и активно продолжается до настоящего времени (см., например, [2] и приведенные там ссылки). В дальнейшем аналогичные задачи также изучались и нашли свое применение в других областях механики и квантовой физики таких, как теория оболочек, физика анизотропных сред, квантовая механика кристаллов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00208).

В 1985 г. Виттен применил метод адиабатических пределов при изучении глобальных гравитационных аномалий в теории струн [3]. Виттен рассматривал адиабатические пределы для римановых расслоений над окружностью. Он связал адиабатический предел $\eta$-инварианта оператора Дирака на тотальном пространстве расслоения с так называемой глобальной аномалией в теории струн. Результат Виттена был строго обоснован в работах [4, 5] и распространен в работе [6] на случай риманова расслоения над компактным многообразием произвольной размерности. Различные аспекты адиабатических пределов для расслоений изучались в работах [7–12].

Техника адиабатических пределов нашла многочисленные применения в локальной теории индекса (см., например, обзор [13]). Отметим также применение адиабатических пределов для описания типа теории Ходжа спектральной последовательности Лере для расслоений, найденное в работе [10]. Некоторые из этих результатов обобщены на случай римановых слоений [14–16].

Асимптотическое поведение функции распределения спектра оператора Лапласа в адиабатическом пределе рассматривалось ранее в работе [16] для римановых слоений и в работе [17] для одномерных слоений на римановых многообразиях Гейзенберга (см. также [18]).

Ниже мы понимаем адиабатические пределы в том смысле, в котором они введены Виттеном в работе [3]. Точнее, пусть $(M, \mathscr{F})$ — замкнутое многообразие со слоением, снабженное римановой метрикой $g$. Таким образом, касательное расслоение $TM$ к $M$ представляется в виде прямой суммы

$$TM = F \oplus H,$$

где $F = T\mathscr{F}$ — касательное расслоение к $\mathscr{F}$ и $H = F^{\perp}$ — ортогональное дополнение к $F$. Пусть $g_F$ ($g_H$) обозначает ограничение метрики $g$ на $F$ ($H$). Тем самым $g = g_F + g_H$. Определим однопараметрическое семейство $g_\varepsilon$ римановых метрик на $M$ по формуле

$$g_\varepsilon = g_F + \varepsilon^{-2} g_H, \quad \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Рассмотрение семейства римановых многообразий $(M, g_\varepsilon)$ и исследование его свойств при $\varepsilon \to 0$ будем называть *переходом к адиабатическому пределу.*

В данной работе рассматриваются адиабатические пределы на римановых Sol-многообразиях и основным результатом является вычисление асимптотики функции распределения спектра оператора Лапласа в адиабатическом пределе.

Результаты работы частично анонсированы в [19].

Автор благодарен Ю. А. Кордюкову за постановку задачи и внимание к работе и И. А. Тайманову за полезные замечания.

## 2. Обозначения и основные результаты

Рассмотрим действие дискретной группы $\mathbb{Z}$ на цилиндре $\widetilde{M}^3 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, определяемое диффеоморфизмом

$$T_A : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R},$$

задаваемым по формуле

$$T_A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ z + 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $(x,y)$ — стандартные периодические по модулю 1 координаты на торе $\mathbb{T}^2$, $z\in\mathbb{R}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ и $|\operatorname{tr} A|>2$.

Определение 1. Sol-*многообразием* $M_A^3$ называется фактор-пространство $\widetilde{M}^3/\mathbb{Z}$.

Хорошо известно, что $M_A^3$ является компактным многообразием. Обозначим через $\lambda$ и $\lambda^{-1}$ собственные значения матрицы $A$ и предположим, что $\lambda>1$. Пусть $\{e_u,e_v\}$ — соответствующий положительно ориентированный базис собственных векторов матрицы $A$. Введем другую, более удобную нам, координатную систему $(u,v,w)$ на $\widetilde{M}^3$ по формулам

$$(x,y)=ue_u+ve_v,\quad w=z\ln\lambda.$$

В координатах $(u,v,w)$ преобразование $T_A$ принимает следующий вид:

$$T_A:\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} \lambda u\\ \lambda^{-1}v\\ w+\ln\lambda\end{pmatrix}.$$

Заметим, что в новых координатах $(u,v)$ периодичность на торе $\mathbb{T}^2$ определяется следующим образом: две точки $(u,v)$ и $(u',v')$ определяют одну и ту же точку на $\mathbb{T}^2$, если и только если $(u-u',v-v')=k\big(c_1^1,c_1^2\big)+m\big(c_2^1,c_2^2\big)$, где $k,m\in\mathbb{Z}$ и $\big\{e_1=\big(c_1^1,c_1^2\big),\ e_2=\big(c_2^1,c_2^2\big)\big\}$ — базис целочисленной решетки $\Gamma$ тора $\mathbb{T}^2$, определяемый уравнением

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1\\ c_1^2 & c_2^2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1\\ c_1^2 & c_2^2\end{pmatrix}.$$

Известно, что $\widetilde{M}^3$ может быть реализовано как подгруппа Ли группы Ли $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, состоящая из матриц вида

$$\gamma(u,v,w)=\begin{pmatrix} e^w & 0 & u\\ 0 & e^{-w} & v\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Групповая операция на $\widetilde{M}^3$ задается формулой

$$\gamma(u,v,w)\gamma(u_0,v_0,w_0)=\gamma(u+e^wu_0,v+e^wv_0,w+w_0).$$

Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{m}^3$ группы Ли $\widetilde{M}^3$ является подалгеброй Ли алгебры Ли $\mathrm{gl}(3,\mathbb{R})$, состоящей из матриц вида

$$X(u,v,w)=\begin{pmatrix} w & 0 & u\\ 0 & -w & v\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

где $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$. Операция в алгебре Ли $\mathfrak{m}^3$ задается по формуле

$$[X(u,v,w),X(u_0,v_0,w_0)]=X(wu_0-w_0u,-wv_0+w_0v,0).$$

Обозначим через

$$U=X(1,0,0),\quad V=X(0,1,0),\quad W=X(0,0,1)$$

стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{m}^3$.

Другим способом алгебру Ли $\mathfrak{m}^3$ можно определить как алгебру Ли левоинвариантных векторных полей на $\widetilde{M}^3$. Левоинвариантные векторные поля, соответствующие матрицам $U, V, W$ в точке $\gamma_0 = \gamma(u_0, v_0, w_0)$, имеют следующий вид:

$$U = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\gamma_0 \exp(tU)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(e^{w_0}t, 0, 0) = e^{w_0}\frac{\partial}{\partial u};$$

$$V = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\gamma_0 \exp(tV)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(0, e^{-w_0}t, 0) = e^{-w_0}\frac{\partial}{\partial v};$$

$$W = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\gamma_0 \exp(tW)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(0, 0, t + w_0) = \frac{\partial}{\partial w}.$$

Определение 2. *Римановым* Sol-*многообразием* $M_A^3$ называется компактное многообразие $G_A \backslash \widetilde{M}^3$ с метрикой $g$: $G_A$ — дискретная подгруппа группы Ли $\widetilde{M}^3$, состоящая из $\gamma(u, v, w) \in \widetilde{M}^3$ таких, что

$$(u, v) = k\bigl(c_1^1, c_1^2\bigr) + l\bigl(c_2^1, c_2^2\bigr) \in \Gamma, \quad w = m \ln \lambda,\ k, l, m \in \mathbb{Z},$$

$g$ — риманова метрика на $G_A \backslash \widetilde{M}^3$, чей подъем на $\widetilde{M}^3$ инвариантен при левых сдвигах на элементы группы $\widetilde{M}^3$ (такие метрики мы называем *локально левоинвариантными*).

Легко видеть, что локально левоинвариантная метрика $g$ единственным образом определяется своим значением в единице $\gamma(0, 0, 0)$ группы Ли $\widetilde{M}^3$, которое задается симметрической положительно определенной $3 \times 3$-матрицей.

Предположим, что $g$ определяется в единице $G_A\gamma(0, 0, 0)$ единичной матрицей

$$g(G_A\gamma(0, 0, 0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, базис $U, V, W$ является ортонормированным. Тогда в локальных координатах метрика $g$ имеет вид

$$g(G_A\gamma(u, v, w)) = (U^*)^2 + (V^*)^2 + (W^*)^2 = e^{-2w}du^2 + e^{2w}dv^2 + dw^2,$$

где $U^*, V^*, W^*$ — двойственный базис к базису $U, V, W$:

$$U^* = e^{-w}du, \quad V^* = e^{w}dv, \quad W^* = dw.$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотрим левоинвариантное векторное поле на $\widetilde{M}^3$, ассоциированное с

$$X(1, \alpha, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{m}^3.$$

Орбиты соответствующего векторного поля на $M_A^3$ определяют одномерное слоение $\mathscr{F}$. Слой $L_{G_A\gamma(u,v,w)}$ слоения $\mathscr{F}$, проходящий через точку $G_A\gamma(u, v, w) \in M_A^3$, имеет вид

$$L_{G_A\gamma(u,v,w)} = \bigl\{G_A\gamma(u + e^{w}t, v + \alpha e^{-w}t, w) \in M_A^3 : t \in \mathbb{R}\bigr\}.$$

Обозначим, как и выше, через $F = T\mathscr{F}$ касательное расслоение к слоению $\mathscr{F}$ и через $H = F^{\perp}$ — ортогональное дополнение к $F$, т. е. касательное расслоение $TM$ к многообразию $M$ представимо в виде $TM = F \oplus H$. Имеем соответствующее разложение римановой метрики

$$g = g_F + g_H.$$

Легко видеть, что $F = \langle U_1 \rangle$, $H = \langle U_2, U_3 \rangle$, где

$$U_1 = \frac{U + \alpha V}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{e^w \frac{\partial}{\partial u} + \alpha e^{-w} \frac{\partial}{\partial v}}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \left( \frac{e^w}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \frac{\alpha e^{-w}}{\sqrt{1+\alpha^2}}, 0 \right),$$

$$U_2 = \frac{\alpha U - V}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \alpha \frac{e^w \frac{\partial}{\partial u} - w \frac{\partial}{\partial v}}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \left( \frac{\alpha e^w}{\sqrt{1+\alpha^2}}, -\frac{e^{-w}}{\sqrt{1+\alpha^2}}, 0 \right),$$

$$U_3 = W = \frac{\partial}{\partial w} = (0, 0, 1).$$

Выберем произвольный вектор $\xi = YU_2 + ZU_3 \in H_{\gamma(u,v,w)}$ ($|\xi|_g^2 = |\xi|_{g_H}^2 = Y^2 + Z^2$) и сдвинем его вдоль орбит траектории векторного поля $X = X(1, \alpha, 0)$. Получим вектор

$$(\exp tX)_* \xi = (\alpha e^w Y + te^w Z, -e^{-w} Y - \alpha te^{-w} Z, Z) \in H_{(u+e^w t, v+\alpha e^{-w} t, w)}.$$

Вычислим квадрат длины вектора $(\exp tX)_* \xi$ относительно $g_H$ (трансверсальной части метрики $g$):

$$\begin{aligned} ((\exp tX)_* \xi, (\exp tX)_* \xi)_{g_H} &= ((\exp tX)_* \xi, U_2)_g^2 + ((\exp tX)_* \xi, U_3)_g^2 \\ &= \left( Y + \frac{2\alpha t Z}{\alpha^2 + 1} \right)^2 + Z^2. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\alpha = 0$, то трансверсальная часть метрики инвариантна при действии движения вдоль векторного поля, задаваемого слоением $\mathscr{F}$ (трансверсальное действие изометрично), метрика $g$ трансверсально проектируема и слоение $\mathscr{F}$ риманово. Если $\alpha \neq 0$, то трансверсальная часть метрики зависит от движения вдоль векторного поля, задаваемого слоением $\mathscr{F}$, следовательно, метрика $g$ не является трансверсально проектируемой.

Рассмотрим адиабатический предел, ассоциированный с римановым Sol-многообразием $(G_A \backslash \widetilde{M}^3, g)$, где $g$ — локально левоинвариантная метрика, соответствующая единичной матрице, и слоением $\mathscr{F}$. Тогда риманова метрика $g_\varepsilon$ на $(G_A \backslash \widetilde{M}^3)$, определяемая по формуле (1), в локальных координатах $(u, v, w)$ имеет вид

$$g_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2 + \alpha^2}{\varepsilon^2(1+\alpha^2)} e^{-2w}\, du^2 + 2\frac{(1-\varepsilon^{-2})\alpha}{(1+\alpha^2)}\, dudv + \frac{\alpha^2\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2(1+\alpha^2)} e^{2w} dv^2 + \varepsilon^{-2}\, dw^2. \quad (3)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим оператор Лапласа — Бельтрами на функциях, определенный метрикой $g_\varepsilon$:

$$\Delta_\varepsilon = d^*_{g_\varepsilon} d,$$

где $d : C^\infty(\Gamma \backslash H) \to C^\infty(\Gamma \backslash H, \Lambda^1 T^*(\Gamma \backslash H))$ — дифференциал де Рама, $d^*_{g_\varepsilon} : C^\infty(\Gamma \backslash H, \Lambda^1 T^*(\Gamma \backslash H)) \to C^\infty(\Gamma \backslash H)$ — сопряженный оператор к $d$ относительно скалярных произведений, определяемых метрикой $g_\varepsilon$. Оператор $\Delta_\varepsilon$ является самосопряженным эллиптическим дифференциальным оператором с положительно определенным скалярным главным символом в гильбертовом пространстве

$L^2(\Gamma\backslash H, g_\varepsilon)$ квадратично интегрируемых функций на $\Gamma\backslash H$, наделенном скалярным произведением, индуцированным метрикой $g_\varepsilon$. Для любого $\varepsilon > 0$ спектр оператора $\Delta_\varepsilon$ состоит из собственных значений конечной кратности:

$$0 = \lambda_0(\varepsilon) < \lambda_1(\varepsilon) \le \dots, \quad \lambda_j(\varepsilon) \to +\infty \quad \text{при } j \to \infty.$$

Основным результатом данной работы является асимптотическая формула функции распределения спектра

$$N_\varepsilon(t) = \sharp\{i : \lambda_i(\varepsilon) \le t\}$$

в адиабатическом пределе.

**Теорема 1.** *Для любого $t > 0$ справедливы следующие асимптотические формулы для функции распределения спектра $N_\varepsilon(t)$ оператора Лапласа — Бельтрами, определенного метрикой $g_\varepsilon$:*

*при $\alpha \neq 0$*

$$N_\varepsilon(t) = \frac{1}{4\pi^2} t^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}),$$

*при $\alpha = 0$*

$$N_\varepsilon(t) = \frac{1}{6\pi^2} t^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}).$$

Асимптотическое поведение функции распределения спектра оператора Лапласа в адиабатическом пределе рассматривалось ранее в работе [16] для римановых слоений и в работе [17] для одномерных слоений на римановых многообразиях Гейзенберга (см. также [18]). Во всех рассмотренных случаях функция $N_\varepsilon(t)$ имеет порядок $\varepsilon^{-q}$, где $q$ — коразмерность слоения (в нашем случае $q = 2$), но коэффициенты при $\varepsilon^{-q}$ в каждом случае различны. Отметим также, что формулы, приведенные в теореме, отличны от классической формулы Вейля, которая описывает асимптотическое поведение функции распределения спектра $N_\varepsilon(t)$ оператора Лапласа $\Delta_\varepsilon$ при $t \to \infty$ (см. [20]).

При $\alpha \neq 0$ доказательство теоремы использует вычисление спектра оператора Лапласа на римановом Sol-многообразии, приведенное в работе [20], являющейся продолжением исследований геодезических потоков на римановых Sol-многообразиях (см. [21, 22]), и квазиклассические спектральные асимптотики [23] для модифицированного оператора Матье

$$H_\varepsilon = -\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + a\,\mathrm{ch}(2\mu x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

При $\alpha = 0$ слоение является римановым и метрика — трансверсально проектируемой, тем самым применим общий результат об асимптотическом поведении функции распределения спектра оператора Лапласа в адиабатическом пределе, ассоциированном с римановым слоением, полученный в работе [16].

## 3. Спектр оператора Лапласа и модифицированный оператор Матье

Начнем с того, что предварительно приведем описание спектра оператора Лапласа на Sol-многообразии в терминах собственных значений модифицированного оператора Матье.

Оператор Лапласа, соответствующий метрике (3), в координатах $(u, v, w)$ имеет вид

$$\Delta_\varepsilon = -\frac{1+\varepsilon^2\alpha^2}{1+\alpha^2} e^{2w} \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{2\alpha(1-\varepsilon^2)}{1+\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \frac{\alpha^2+\varepsilon^2}{1+\alpha^2} e^{-2w} \frac{\partial^2}{\partial v^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2}. \tag{4}$$

Для вывода этой формулы можно воспользоваться следующим, хорошо известным утверждением (см., например, [24]).

**Предложение 2.** *Пусть $U_1, U_2, U_3$ — $g$-ортонормированный базис в алгебре Ли $\mathfrak{h}$ группы Ли $H$. Оператор Лапласа — Бельтрами записывается в виде*

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{3} \widehat{U}_i^2 f,$$

*где $\widehat{U}_i$ обозначает левоинвариантный дифференциальный оператор первого порядка на $C^\infty(H)$, соответствующий элементу $U_i \in \mathfrak{h}$:*

$$\widehat{U}_i f(\gamma) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma \exp(tU_i)).$$

В качестве ортонормированного базиса можно взять базис

$$U_1 = X\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}, \frac{\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}, 0\right), \quad U_2 = X\left(\frac{-\varepsilon\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}, 0\right),$$
$$U_3 = X(0,0,\varepsilon).$$

Положим

$$E_\varepsilon = \frac{1+\varepsilon^2\alpha^2}{1+\alpha^2}, \quad F_\varepsilon = \frac{\alpha(1-\varepsilon^2)}{1+\alpha^2}, \quad G_\varepsilon = \frac{\alpha^2+\varepsilon^2}{1+\alpha^2}. \tag{5}$$

Так как коэффициенты оператора Лапласа (4) зависят только от $w$, используя метод разделение переменных, видим, что собственные функции оператора $\Delta_\varepsilon$ имеют вид

$$\Psi_\varepsilon(u,v,w) = e^{2\pi i(\gamma,(u,v))} f_\varepsilon(w),$$

где $\gamma \in \Gamma^*$, $f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$. Имеет место формула

$$\Delta_\varepsilon \Psi_\varepsilon(u,v,w) = \Bigg(-\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2}$$
$$+ (8\pi^2\sqrt{E_\varepsilon G_\varepsilon}|Q(\gamma)| \cosh(2(w+\alpha(\gamma))) + 8\pi^2 F_\varepsilon Q(\gamma)) f_\varepsilon(w)\Bigg) e^{2\pi i(\gamma,(u,v))}.$$

Напомним, что $\{e_u, e_v\}$ — собственные векторы матрицы $A$ и $\{e_1, e_2\}$ — базис решетки $\Gamma$. Пусть $\{e_u^*, e_v^*\}$— двойственный базис в $\mathbb{R}^2$ к базису $\{e_u, e_v\}$. Поскольку $(\lambda e_u, e_u^*) = (Ae_u, e_u^*) = (e_u, A^* e_u^*) = (e_u, \lambda e_u^*)$, векторы $e_u^*, e_v^*$ являются собственными векторами матрицы $A^*$ с собственными значениями $\lambda, \lambda^{-1}$ соответственно. По определению двойственности имеем $\gamma = (\gamma, e_u)e_u^* + (\gamma, e_v)e_v^*$.

Определим квадратичную форму $Q(\gamma) = (\gamma, e_u)(\gamma, e_v)$ на решетке $\Gamma^*$ и

$$\alpha_\varepsilon(\gamma) = \frac{\ln\left(\sqrt{\frac{|E_\varepsilon|}{|G_\varepsilon|}}\left|\frac{(\gamma,e_u)}{(\gamma,e_v)}\right|\right)}{2}.$$

Справедлива следующая

**Теорема 3** [20]. *Функция $\Psi_\varepsilon = e^{2\pi i(\gamma,(u,v))} f_\varepsilon(w)$ удовлетворяет уравнению $\Delta_\varepsilon \Psi_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon \Psi_\varepsilon$ на $M_A^3$, если и только если $\gamma$ — элемент двойственной решетки к $\Gamma$ и $f_\varepsilon(w)$ удовлетворяет модифицированному уравнению Матье*

$$\left(-\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2} + 8\pi^2 \sqrt{E_\varepsilon G_\varepsilon} |Q(\gamma)| \operatorname{ch}(2(w+\alpha(\gamma)))\right) f_\varepsilon(w) = \mu_\varepsilon f_\varepsilon(w),$$

*где собственные значения $\Lambda_\varepsilon$ и $\mu_\varepsilon$ связаны сдвигом*

$$\Lambda_\varepsilon = \mu_\varepsilon + 8\pi^2 F_\varepsilon Q(\gamma). \tag{6}$$

Ввиду того, что спектр оператора Матье не зависит от сдвига переменной, мы можем перейти к эквивалентной задаче поведения спектра оператора

$$\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2} + 8\pi^2 \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\alpha^2(1-\varepsilon^2)^2}{(1-\alpha^2)^2}} |Q(\gamma)| \operatorname{ch}(2w). \tag{7}$$

Таким образом, спектральная задача для оператора Лапласа (4) на Sol-многообразии $M_A^3$ сводится к спектральной задаче для модифицированного оператора Матье $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$ на $\mathbb{R}$.

Заметим, что $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$ является гиперболической версией стандартного оператора Матье, спектр его дискретный, собственные функции известны как модифицированные функции Матье (см. [25]). Обозначим через $f_{\varepsilon,\gamma,k}(w)$ собственную функцию оператора $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$, соответствующую собственному значению $\mu_{\varepsilon,\gamma,k}$.

Таким образом, с каждым элементом двойственной решетки $\gamma \in \Gamma^*$ мы можем ассоциировать последовательность собственных функций $\Psi_{\varepsilon,\gamma,k}(u,v,z) = e^{2\pi i(\gamma,(u,v))} f_{\varepsilon,\gamma,k}(z)$, $k \in \mathbb{N}$, оператора $\Delta_\varepsilon$. Эти функции корректно определены на накрытии $\tilde{M}^3 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, но не на Sol-многообразии, а именно, они не инвариантны под действием (2). Рассмотрим следующий ряд:

$$\Phi_{\varepsilon,\gamma,k}(u,v,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\varepsilon,\gamma,k}(\lambda^n u, \lambda^{-n} v, w + n\ln\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\varepsilon,A^{*n}\gamma,k}(u,v,w).$$

Ввиду того, что собственные функции оператора Матье $f_{\varepsilon,\gamma,k}(w)$ быстро убывают по $\omega$, этот ряд абсолютно сходится. Легко видеть, что таким образом мы получили собственные функции $\Phi_{\varepsilon,\gamma,k}(u,v,w)$ оператора Лапласа на $M_A^3$.

Заметим, что собственные функции $\Phi_{\varepsilon,\gamma,k}(u,v,w)$ на $M_A^3$ зависят только от орбит $[\gamma] = \{A^{*^n}(\gamma)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ относительно действия $A^*$ на $\Gamma^*$: $\Phi_{\varepsilon,\gamma,k}(u,v,w) = \Phi_{\varepsilon,[\gamma],k}(u,v,w)$.

Будем рассматривать также собственные функции при $\gamma = 0$. Легко видеть, что это экспоненты

$$\Phi_{\varepsilon,0,l}(u,v,w) = e^{\frac{2\pi}{\ln\lambda} ilw}, \quad l \in \mathbb{Z},$$

с собственными значениями $\mu_\varepsilon = \left(\frac{2\pi}{\ln\lambda}\right)^2 \varepsilon^2 l^2$.

**Теорема 4** [20]. *Набор функций, состоящий из* $\Phi_{\varepsilon,[\gamma],k}(u,v,z), [\gamma] \in \Gamma^*\backslash\{0\} /A^*$, *и* $\Phi_{\varepsilon,0,l}(z)$, *образует полный базис собственных функций оператора Лапласа на* Sol-*многообразии* $M_A^3$ *в* $L_2(M_A^3)$.

Нижеприведенные результаты теории чисел хорошо известны (см., например, [26]).

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ — матрица такая, что $|\operatorname{tr} A| > 2$.

Обозначим через $\lambda$ и $\lambda^{-1}$ собственные значения матрицы $A$ и предположим, что $\lambda > 1$.

Рассмотрим $A$ как автоморфизм решетки $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$, порожденной некоторым базисом $e_1, e_2$. Для $A$ можно определить бинарную квадратичную форму $Q_A$ по формуле

$$Av \wedge v = Q_A(v) e_1 \wedge e_2,$$

где $v \in \mathbb{R}^2$. Если $v = xe_1 + ye_2$, то

$$Q_A(v) = Q_A(x,y) = \det \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y & x \\ a_{21}x + a_{22}y & y \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $Q_A(v)$ инвариантна под действием $A$, т. е. $Q_A(v) = Q_A(Av)$.

## 4. Доказательство основной теоремы

Пусть $\{l_1, l_2\}$ — положительно ориентированный базис двойственной решетки $\Gamma^*$. Рассмотрим бинарную квадратичную форму $Q_{A^*}$, определенную выше:

$$A^*\gamma \wedge \gamma = Q_{A^*}(\gamma) l_1 \wedge l_2, \quad \gamma \in \Gamma^*.$$

С другой стороны,

$$A^*\gamma \wedge \gamma = (\lambda(\gamma, e_u)e_u^* + \lambda^{-1}(\gamma, e_v)e_v^*) \wedge ((\gamma, e_u)e_u^* + (\gamma, e_v)e_v^*) \\ = (\gamma, e_u)(\gamma, e_u)(\lambda - \lambda^{-1}) e_u^* \wedge e_v^*.$$

Имеет место соотношение

$$\frac{e_u^* \wedge e_v^*}{l_1 \wedge l_2} = \frac{|e_u^*||e_v^*| \sin\Theta}{\mathscr{A}(\Pi(l_1, l_2))},$$

где $\Theta$— угол между $e_u^*$ и $e_v^*$, $\mathscr{A}(\Pi(l_1, l_2))$— площадь параллелограмма $\Pi(l_1, l_2)$, которая в силу двойственности равна $\mathscr{A}(\Pi(l_1, l_2)) = \frac{1}{\mathscr{A}(\mathbb{T}^2)}$.

В обозначениях разд. 3 двойственная метрика $g_\varepsilon^*$ к метрике $g_\varepsilon$ имеет вид

$$g_\varepsilon^* = \begin{pmatrix} E_\varepsilon & F_\varepsilon \\ F_\varepsilon & G_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\cos(\Theta) = \frac{(e_u^*, e_v^*)}{|e_u^*||e_v^*|} = \frac{F_\varepsilon}{E_\varepsilon G_\varepsilon}, \quad \sin(\Theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\Theta)} = \frac{\sqrt{\det g_\varepsilon^*}}{E_\varepsilon G_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{E_\varepsilon G_\varepsilon}.$$

Заметим, что площадь тора $\mathscr{A}(\mathbb{T}^2)$ в метрике $g_\varepsilon$ равна $\mathscr{A}(\mathbb{T}^2) = \varepsilon^{-1}$. Получаем

$$|Q(\gamma)| = \frac{|Q_{A*}(\gamma)|}{\lambda - \lambda^{-1}}. \tag{8}$$

Рассмотрим случай $\alpha \neq 0$. Предварительно исследуем задачу поведения спектра оператора Матье $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$ при $\varepsilon \to 0$, которая в силу (8) примет вид

$$\left(-\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2} + a(\varepsilon)|Q_{A^*}(\gamma)| \operatorname{ch}(2w)\right) f_{\varepsilon,\gamma}(w) = \mu_{\varepsilon,\gamma} f_{\varepsilon,\gamma}(w),$$

где

$$a(\varepsilon) = \frac{8\pi^2 \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\alpha^2(1-\varepsilon^2)^2}{(1+\alpha^2)^2}}}{\lambda - \lambda^{-1}}.$$

Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} a(\varepsilon) = \frac{8\pi^2 \alpha}{(1 + \alpha^2)(\lambda - \lambda^{-1})} \neq 0. \tag{9}$$

Более того,

$$a(\varepsilon) = \frac{8\pi^2}{\lambda - \lambda^{-1}} \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha^2} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}\varepsilon^2 + \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha}\varepsilon^2\right) + o(\varepsilon^2) \\ = \frac{8\pi^2}{\lambda - \lambda^{-1}} \left(F_\varepsilon + \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha}\varepsilon^2\right) + o(\varepsilon^2). \tag{10}$$

Ввиду того, что $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma} \geq a(\varepsilon)|Q_{A^*}(\gamma)|$ и при $\gamma \neq 0$ потенциал оператора $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$ отстоит от нуля, а также с учетом связи собственных значений оператора Лапласа $\Delta_\varepsilon$ и собственных значений модифицированного оператора Матье (6), имеем

$$N_\varepsilon(t) = \sum_{\gamma: a(\varepsilon)|Q_{A^*}(\gamma)| < t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda - \lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma)} N_\varepsilon{}^\gamma \left( t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda - \lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma) \right), \tag{11}$$

где $N_\varepsilon^\gamma(t)$— функция распределения спектра оператора $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$ при фиксированном $\gamma$. Заметим, что количество элементов $\gamma$, удовлетворяющих условию

$$a(\varepsilon)|Q_{A^*}(\gamma)| < t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda - \lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma),$$

при $Q_{A^*}(\gamma) > 0$ равномерно ограничено сверху при $\varepsilon \to 0$, а при $Q_{A^*}(\gamma) < 0$ неограниченно растет при $\varepsilon \to 0$, поскольку согласно (10) на $Q_{A^*}(\gamma)$ имеем условие вида

$$-\frac{(\lambda - \lambda^{-1})\alpha}{4\pi^2(1+\alpha^2)} t\varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}) < Q_{A^*}(\gamma) < 0.$$

Отметим, что при $\gamma = 0$ имеем одномерный оператор Лапласа, определенный на периодических функциях с периодом $\ln\lambda$. Легко видеть, что собственными функциями этого оператора являются экспоненты $e^{\frac{2\pi}{\ln\lambda} ilw}$, $l \in \mathbb{Z}$, с собственными значениями

$$\mu_\varepsilon = \left(\frac{2\pi}{\ln\lambda}\right)^2 \varepsilon^2 l^2.$$

Таким образом,

$$N_\varepsilon^{\gamma=0}(t) = \frac{\ln\lambda}{\pi}\varepsilon^{-1}\sqrt{t} + o(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \to 0.$$

При фиксированном $\gamma \neq 0$ рассмотрим оператор

$$\widetilde{\mathscr{M}}_{\varepsilon,\gamma} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2} + a(0)|Q_{A^*}(\gamma)| \operatorname{ch}(2w).$$

Обозначим через $\widetilde{N}_\varepsilon^\gamma(t)$ функцию распределения оператора $\widetilde{\mathscr{M}}_{\varepsilon,\gamma}$. Применяя к оператору $\widetilde{\mathscr{M}}_{\varepsilon,\gamma}$ квазиклассическую формулу Вейля для функции распределения спектра оператора Шредингера (см. [23]), имеем

$$\begin{aligned}\mathscr{N}_\varepsilon(t, Q_{A^*(\gamma)}) &= \widetilde{N}_\varepsilon^\gamma \left( t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda - \lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\varepsilon^{-1} \oint \sqrt{t - \frac{8\pi^2 F_0}{\lambda - \lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma) - a(0)|Q_{A^*}(\gamma)| \cosh(2x)}\, dx + o(\varepsilon^{-1}),\end{aligned}$$

где

$$F_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}, \quad a(0) = \frac{8\pi^2 F_0}{\lambda - \lambda^{-1}}. \tag{12}$$

Делая замену переменных $\cosh(2x) = \xi$ и полагая $g = \frac{a(0)|Q_{A^*}(\gamma)|}{t - \frac{8\pi^2 F_0}{\lambda - \lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma)}$, получаем

$$\mathscr{N}_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma)) = 2\varepsilon^{-1} \frac{\sqrt{t - \frac{8\pi^2 F_0}{\lambda - \lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma)}}{2\pi} \int_1^{1/g} \frac{\sqrt{1 - g\xi}}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\, d\xi + o(\varepsilon^{-1}).$$

Интеграл $\int\limits_1^{1/g}\frac{\sqrt{1-g\xi}}{\sqrt{\xi^2-1}}\,d\xi$ может быть вычислен в терминах полных эллиптических интегралов первого и второго рода:

$$\int\limits_1^{1/g}\frac{\sqrt{1-g\xi}}{\sqrt{\xi^2-1}}\,d\xi = 2\sqrt{1+g}\,(K(k)-E(k))\,, \tag{13}$$

где

$$K(k)=\int\limits_0^1\frac{dx}{((1-x^2)(1-k^2x^2))^{\frac12}},\quad E(k)=\int\limits_0^1\left(\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}\right)^{\frac12}dx,$$

$$k^2=\frac{1-g}{1+g},\quad g=\frac{a(0)|Q_{A^*}(\gamma)|}{t-\frac{8\pi^2F_0}{\lambda-\lambda^{-1}}Q_{A^*}(\gamma)}.$$

Имеем

$$k^2=\frac{t-\frac{8\pi^2F_0}{\lambda-\lambda^{-1}}Q_{A^*}(\gamma)-a(0)|Q_{A^*}(\gamma)|}{t-\frac{8\pi^2F_0}{\lambda-\lambda^{-1}}Q_{A^*}(\gamma)+a(0)|Q_{A^*}(\gamma)|}.$$

Таким образом,

$$\mathscr{N}_\varepsilon(t,Q_{A^*}(\gamma))=2\varepsilon^{-1}\frac{\sqrt{t-\frac{8\pi^2F_0}{\lambda-\lambda^{-1}}Q_{A^*}(\gamma)}}{\pi}\sqrt{1+g}\,(K(k)-E(k))+o(\varepsilon^{-1}).$$

Учитывая (12), получаем

$$\mathscr{N}_\varepsilon(t,Q_{A^*}(\gamma))=2\varepsilon^{-1}\frac{\sqrt{t-\frac{8\pi^2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{(\lambda-\lambda^{-1})}Q_{A^*}(\gamma)}}{\pi}\sqrt{1-\frac{\frac{8\pi^2}{(\lambda-\lambda^{-1})}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}Q_{A^*}(\gamma)}{t-\frac{8\pi^2}{(\lambda-\lambda^{-1})}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}Q_{A^*}(\gamma)}}$$
$$\times\left(K\left(\sqrt{\frac{t}{t-\frac{16\pi^2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{(\lambda-\lambda^{-1})}Q_{A^*}(\gamma)}}\right)-E\left(\sqrt{\frac{t}{t-\frac{16\pi^2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{(\lambda-\lambda^{-1})}Q_{A^*}(\gamma)}}\right)\right)+o(\varepsilon^{-1}).$$

Таким образом,

$$\mathscr{N}_\varepsilon(t,Q_{A^*}(\gamma))=\varepsilon^{-1}V_\varepsilon(t,Q_{A^*}(\gamma))+o(\varepsilon^{-1}), \tag{14}$$

где

$$V_\varepsilon(t,Q_{A^*}(\gamma))=\sqrt{t}\frac{\sqrt{1-\frac{16\pi^2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{t(\lambda-\lambda^{-1})}Q_{A^*}(\gamma)}}{\pi}$$
$$\times\left(K\left(\sqrt{\frac{1}{1-\frac{16\pi^2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{t(\lambda-\lambda^{-1})}Q_{A^*}(\gamma)}}\right)-E\left(\sqrt{\frac{1}{1-\frac{16\pi^2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{t(\lambda-\lambda^{-1})}Q_{A^*}(\gamma)}}\right)\right).$$

Согласно известному факту теории чисел о количестве целых точек под гиперболой (см., например, [27]), число точек $M(Q_0)$ решетки $\Gamma^*$ по модулю $A^*$ со значениями $Q_0<Q_{A^*}<0$ пропорционально площади фундаментальной области, а именно

$$M(Q_0)=\frac{2}{\lambda-\lambda^{-1}}|Q_0|+o(Q_0),\quad Q_0\to-\infty.$$

Положим

$$V_\varepsilon(t) = \sum_{\gamma: -\frac{(\lambda-\lambda^{-1})\alpha}{4\pi^2(1+\alpha^2)} t\varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}) < Q_{A^*}(\gamma) < 0} V_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma)). \tag{15}$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$V_\varepsilon(t) = \int\limits_{-\frac{(\lambda-\lambda^{-1})\alpha t}{4\pi^2(1+\alpha^2)}\varepsilon^{-2}}^{0} M'(Q_{A^*}) V_\varepsilon(t, Q_{A^*})\, dQ_{A^*} + o(\varepsilon^{-1})$$

$$= \frac{4\sqrt{t}}{(\lambda-\lambda^{-1})\pi} \int\limits_{-\frac{(\lambda-\lambda^{-1})\alpha t}{4\pi^2(1+\alpha^2)}\varepsilon^{-2}}^{0} \sqrt{1 - \frac{16\pi^2 \frac{\alpha}{1+\alpha^2} Q_{A^*}}{t(\lambda-\lambda^{-1})}}$$

$$\times \left( K\left( \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{16\pi^2 \frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{t(\lambda-\lambda^{-1})} Q_{A^*}}} \right) - E\left( \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{16\pi^2 \frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{t(\lambda-\lambda^{-1})} Q_{A^*}}} \right) \right) dQ_{A^*} + o(\varepsilon^{-1}).$$

Сделав замену переменных

$$Q_{A^*} = \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \frac{(\lambda-\lambda^{-1})t}{16\pi^2} Q,$$

имеем

$$V_\varepsilon(t) = \frac{4}{\lambda-\lambda^{-1}} \sqrt{t} \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \frac{(\lambda-\lambda^{-1})t}{16\pi^3}$$

$$\times \int\limits_{-(2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\varepsilon^{-1})^2}^{0} \sqrt{1-Q} \left( K\left( \frac{1}{\sqrt{1-Q}} \right) - E\left( \frac{1}{\sqrt{1-Q}} \right) \right) dQ + o(\varepsilon^{-1})$$

$$= \frac{1}{4\pi^3} \frac{1+\alpha^2}{\alpha} t^{\frac{3}{2}} \int\limits_{0}^{(2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\varepsilon^{-1})^2} \sqrt{1+Q} \left( K\left( \frac{1}{\sqrt{1+Q}} \right) - E\left( \frac{1}{\sqrt{1+Q}} \right) \right) dQ + o(\varepsilon^{-1}).$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{0}^{(2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\varepsilon^{-1})^2} \sqrt{1+Q} \left( K\left( \frac{1}{\sqrt{1+Q}} \right) - E\left( \frac{1}{\sqrt{1+Q}} \right) \right) dQ.$$

Этот несобственный интеграл сходится в нуле, так как $E$ ограничена, $K$ ведет себя как логарифм (см, например, [28]). На бесконечности

$$K\left(\frac{1}{t}\right) - E\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{4} t^{-2} + o(t^{-2}), \quad t \to +\infty.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{0}^{(2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\varepsilon^{-1})^2} \sqrt{1+Q} \left( K\left( \frac{1}{\sqrt{1+Q}} \right) - E\left( \frac{1}{\sqrt{1+Q}} \right) \right) dQ$$

$$= 2\frac{\pi}{4} \sqrt{\left( 2\frac{\alpha}{1+\alpha^2} \varepsilon^{-1} \right)^2} + o(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \to 0, \tag{16}$$

следовательно,

$$V_\varepsilon(t) = \frac{1}{4\pi^3}\frac{1+\alpha^2}{\alpha}t^{\frac{3}{2}}2\frac{\pi}{4}\sqrt{\left(2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\varepsilon^{-1}\right)^2} + o(\varepsilon^{-1})$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}t^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-1} + o(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \to 0. \quad (17)$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\gamma: -\frac{(\lambda-\lambda^{-1})\alpha}{4\pi^2(1+\alpha^2)}t\varepsilon^{-2}+o(\varepsilon^{-2})<Q_{A^*}(\gamma)<0} \left(\varepsilon^2 N_\varepsilon{}^\gamma\left(t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda-\lambda^{-1}}Q_{A^*}(\gamma)\right)\right.$$
$$\left. - \varepsilon V_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma))\right) = o(1) \quad (18)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Действительно, поскольку потенциал $a(\varepsilon)|Q_{A^*}(\gamma)|\operatorname{ch}(2w)$ оператора $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$ стремится к потенциалу $a(0)|Q_{A^*}(\gamma)|\operatorname{ch}(2w)$ оператора $\widetilde{\mathscr{M}}_{\varepsilon,\gamma}$ и отстоит от нуля (см. (9)), при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$N_\varepsilon^\gamma(t) = \widetilde{N}_\varepsilon^\gamma(t) + o(\varepsilon^{-1}).$$

В силу (14) получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(N_\varepsilon{}^\gamma\left(t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda-\lambda^{-1}}Q_{A^*}(\gamma)\right) - \varepsilon^{-1}V_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma))\right) = 0.$$

Поскольку выполнено (17), то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\gamma: -\frac{(\lambda-\lambda^{-1})\alpha}{4\pi^2(1+\alpha^2)}t\varepsilon^{-2}+o(\varepsilon^{-2})<Q_{A^*}(\gamma)<0} \varepsilon V_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma)) < C_1(t),$$

где $C_1(t)$ — некоторая константа. Используя вариационный принцип (см., например, [29]), можно показать, что при $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon^2 N_\varepsilon(t) = \sum_{\gamma: -\frac{(\lambda-\lambda^{-1})\alpha}{4\pi^2(1+\alpha^2)}t\varepsilon^{-2}+o(\varepsilon^{-2})<Q_{A^*}(\gamma)<0} \varepsilon^2 N_\varepsilon{}^\gamma\left(t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda-\lambda^{-1}}Q_{A^*}(\gamma)\right) < C_2(t)$$

с некоторой константой $C_2(t)$ (см. также [30]). Тем самым применима теорема Лебега о мажорантной сходимости и мы получаем (18).

Таким образом, согласно (11) в силу (18), (15), (17) в случае $\alpha \neq 0$ асимптотическая формула функции распределения спектра оператора Лапласа $\Delta_\varepsilon$ в адиабатическом пределе имеет вид

$$N_\varepsilon(t) = \frac{1}{4\pi^2}t^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Выше показано, что в случае $\alpha = 0$ метрика $g$ является трансверсально проектируемой и слоение $\mathscr{F}$ риманово, поэтому доказательство теоремы 1 в случае $\alpha = 0$ проведем, используя общий результат об асимптотическом поведении функции распределения спектра оператора Лапласа в адиабатическом пределе, ассоциированном с римановым слоением, полученный в работе [16].

Индуцированная метрика на слое

$$L_{G_A\gamma(u,v,w)} = \{G_A\gamma(u+e^w t, v, w) \in M_A^3 : t \in \mathbb{R}\},$$

проходящем через точку $\gamma(u,v,w)$, имеет вид

$$g_{\mathscr{F}} = dt^2.$$

Таким образом, послойный оператор Лапласа задается формулой

$$\Delta_F = -e^{2w}\frac{\partial^2}{\partial u^2}.$$

Группоид голономии слоения $\mathscr{F}$ имеет вид $G = M_A^3 \times \mathbb{R}$. Для любого $\gamma(u,v,w) \in M_A^3$ слой слоения $\mathscr{F}$, проходящий через точку $\gamma(u,v,w)$, отождествляется с $\mathbb{R}$ и ограничение оператора $\Delta_F$ на слой совпадает с оператором

$$A = -\frac{d^2}{dt^2},$$

действующим в пространстве $L^2(\mathbb{R}, dt)$.

Найдем спектральный проектор оператора $A$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Справедливо равенство

$$A_1 U(\xi) = FAF^{-1}U(\xi) = |\xi|^2 U(\xi), \quad U \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

где $F$ — преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R})$. Аналогичное равенство получается для спектральных проекторов:

$$\chi_\lambda(A_1) = F\chi_\lambda(A)F^{-1},$$

где $\chi_\lambda$ — характеристическая функция полуоси $(-\infty, \lambda)$. Легко видеть, что оператор $\chi_\lambda(A_1)$ есть оператор умножения на функцию

$$\chi_\lambda(|\xi|^2) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\xi|^2 < \lambda, \\ 0, & \text{если } |\xi|^2 \geq \lambda. \end{cases}$$

Таким образом, спектральный проектор $\chi_\lambda(A)$ оператора $A$ имеет вид

$$\chi_\lambda(A)U(t) \;=\; F^{-1}\chi_\lambda(|\xi|^2)FU(t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\left[i(t-t_1)\xi\right]\chi_\lambda(|\xi|^2)U(t)\,dt_1 d\xi.$$

Ядро спектрального проектора $\chi_\lambda(A)$ оператора $A$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ задается формулой

$$E_\lambda(t,t_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\alpha^2}}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left[i(t-t_1)\xi\right]\chi_\lambda(|\xi|^2)\,d\xi.$$

Касательное ядро $e_\lambda$ оператора $\Delta_F$ связано с ядром $E_\lambda$ спектрального проектора $\chi_\lambda(A)$ оператора $A$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ следующим образом. Для любого $\gamma = (x,y,t) \in G = M_A^3 \times \mathbb{R}$

$$e_\lambda(\gamma) = E_\lambda(0,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\alpha^2}}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-it\xi\right)\chi_\lambda\left(|\xi|\right)d\xi.$$

Ограничение касательного ядра $e_\lambda$ на $M_A^3$ имеет вид

$$e_\lambda(x,y) = E_\lambda(0,0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\alpha^2}} \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_\lambda\left(|\xi|\right)\, d\xi = \frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Получаем, что функция распределения спектра $N_{\mathscr{F}}(\lambda)$ оператора $\Delta_F$ имеет вид

$$N_{\mathscr{F}}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{T}^2} e_\lambda(x,y)\, dxdy = \frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Согласно [16]

$$N_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{t}(t-\tau)\, d_\tau N_{\mathscr{F}}(\tau) + o(\varepsilon^{-2}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Из двух приведенных выше формул непосредственно следует, что

$$N_\varepsilon(t) = \frac{1}{6\pi^2} t^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}), \quad \varepsilon \to 0.$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Маслов В. П.* Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.
2. *Hagedorn G., Joye A.* Mathematical analysis of Born–Oppenheimer approximations // Spectral theory and mathematical physics: a Festschrift in honor of Barry Simon's 60th birthday. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 203–226. (Proc. Sympos. Pure Math.; 76, Part 1).
3. *Witten E.* Global gravitational anomalies // Comm. Math. Phys. 1985. V. 100, N 2. P. 197–229.
4. *Bismut J. M., Freed D. S.* The analysis of elliptic families. II. Dirac operators, eta invariants and the holonomy theorem // Comm. Math. Phys. 1986. V. 107, N 1. P. 103–163.
5. *Cheeger J.* $\eta$-Invariants, the adiabatic approximation and conical singularities. I. The adiabatic approximation // J. Differ. Geom. 1987. V. 26, N 1. P. 175–221.
6. *Bismut J. M., Cheeger J.* $\eta$-Invariants and their adiabatic limits // J. Amer. Math. 1989. V. 2, N 33–70. P. .
7. *Colbois B., Courtois G.* Petites valeurs propres et classe d'Euler des $S^1$-fibres // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). 2000. V. 33, N 5. P. 611–645.
8. *Dai X.* Adiabatic limits, non-multiplicity of signature and the Leray spectral sequence // J. Amer. Math. Soc. 1991. V. 4, N 2. P. 265–321.
9. *Dai X.* APS boundary conditions, eta invariants and adiabatic limits // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. V. 354, N 1. P. 107–122.
10. *Mazzeo R. R., Melrose R. B.* The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray's spectral sequence for a fibration // J. Differ. Geom. 1990. V. 31, N 1. P. 185–213.
11. *Jammes P.* Sur le spectre des fibres en tore qui s'effondrent // Manuscripta Math. 2003. V. 110, N 1. P. 13–31.
12. *Jammes P.* Effondrement, spectre et proriétés diophantiennes des flots Riemanniens. (Препринт). math.DG/0505417, 2005.
13. *Bismut J. M.* Local index theory and higher analytic torsion // Proc. Intern. Congr. Math. Berlin, 1998. Doc. Math. 1998. Extra V. I. P. 143–162.
14. *Forman R.* Spectral sequences and adiabatic limits // Comm. Math. Phys. 1995. V. 168, N 1. P. 57–116.
15. *Álvarez López J., Kordyukov Yu. A.* Adiabatic limits and spectral sequences for Riemannian foliations // Geom. Funct. Anal. 2000. V. 10, N 5. P. 977–1027.
16. *Kordyukov Yu. A.* Adiabatic limits and spectral geometry of foliations // Math. Ann. 1999. V. 313, N 4. P. 763–783.
17. *Яковлев А. А.* Адиабатические пределы на римановых многообразиях Гейзенберга // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 2. С. 149–160.
18. *Kordyukov Yu. A., Yakovlev A. A.* Adiabatic limits and the spectrum of the Laplacian on foliated manifolds // $C^*$-algebras and elliptic theory. II. Trends Math. Basel: Birkhauser, 2008. P. 123–144. E-print arXiv:math/0703785.

**19.** *Яковлев А. А.* Адиабатические пределы на римановых Sol-многообразиях // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 2. С. 318–320.
**20.** *Bolsinov A. V., Dullin H. R., Veselov A. P.* Spectra of Sol-manifolds: arithmetic and quantum monodromy // Comm. Math. Phys. 2006. V. 264, N 3. P. 583–611.
**21.** *Bolsinov A. V., Taimanov I. A.* Integrable geodesic flows with positive topological entropy // Invent. Math. 2000. V. 140, N 3. P. 639–650.
**22.** *Болсинов А. В., Тайманов И. А.* Интегрируемые геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2000. Т. 231. С. 42–58.
**23.** *Helffer B., Martinez A., Robert D.* Ergodicite et limite semi-classique // Comm. Math. Phys. 1987. V. 109, N 2. P. 313–326.
**24.** *Gordon C. S., Wilson E. N.* The spectrum of the Laplacian on Riemannian–Heisenberg manifolds // Michigan Math. J. 1986. V. 33, N 2. P. 253–271.
**25.** *Whitteker E. T., Watson G. N.* A Course in modern analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
**26.** *Landau E.* Elementary number theory. New York: Chelsea, 1958.
**27.** *Loo Keng Hua.* Introduction to number theory. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982.
**28.** *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. Т. 3.
**29.** *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М.: Мир, 1981. Т. 4.
**30.** *Kordyukov Yu. A.* Semiclassical spectral asymptotics on foliated manifolds // Math. Nachr. 2002. V. 245, N 1. P. 104–128.

*Статья поступила 13 декабря 2008 г.*

Яковлев Андрей Александрович
Уфимский гос. технический университет, кафедра математики,
ул. К. Маркса, 12, Уфа 450000
`yakovlevandrey@yandex.ru`