Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 517.926.4

К ВОПРОСУ О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ВХОДОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. А. Щеглова

Аннотация. Рассматривается управляемая линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей при производной искомой вектор-функции. Исследуется вопрос о минимальной размерности вектора управления, при которой система может быть полностью управляема на любом отрезке из области определения. Эта проблема изучается применительно к стационарным системам с регулярным матричным пучком, а также к системам с вещественно-аналитическими и гладкими коэффициентами, для которых определены некоторые структурные формы.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраическое уравнение, алгебро-дифференциальная система, управляемость, минимальное число входов, структурная форма.

§ 1. Введение

Исследуется управляемая линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad t \in I = [t_0, +\infty), \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — известные $(n \times n)$-матрицы; $x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция; $U(t)$ — заданная $(n \times l)$-матрица; $u(t)$ — l-мерная вектор-функция управления. Предполагается, что $\det A(t) \equiv 0$ на I. Такие системы называются *алгебро-дифференциальными* (АДС). Мерой неразрешенности АДС относительно производной служит целочисленная величина r: $0 \le r \le n$, называемая *индексом*.

В статье анализируется вопрос, имеющий большое значение для синтеза систем управления: каково минимальное число входов l $(1 \le l \le n)$, при котором система (1) может быть полностью управляема на любом отрезке из интервала I? Известно, что для систем уравнений, разрешенных относительно производных: $x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0$, минимальное число входов, обеспечивающее управляемость в том или ином смысле, равно единице. В стационарном случае минимальное число входов равно числу нетривиальных инвариантных многочленов матрицы B (см., например, [1, 2]).

Один из подходов к исследованию разрешимости и качественных свойств АДС основан на предварительном преобразовании системы к виду, позволяющему судить о структуре общего решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 22 (проект № 1.7) и гранта президента РФ (НШ–1676.2008.1).

Для исследования линейных АДС в работе [3] впервые введено понятие «сильной стандартной канонической формы», существование которой доказано для систем с вещественно-аналитическими коэффициентами. Эта структурная форма в книге [4] названа *центральной канонической* (ЦКФ).

В монографии [5] для изучения вопросов приводимости введена в рассмотрение так называемая «расщепленная форма», которая определена уже для систем с гладкими коэффициентами. В статье [6] для получения результатов о наблюдаемости АДС вида (1) используется форма, которую можно считать аналогом расщепленной. Для существования всех вышеупомянутых структурных форм не требуется постоянства ранга матрицы при производной искомой вектор-функции. Общим недостатком является отсутствие конструктивных алгоритмов построения в достаточно общих предположениях. В частности, способы преобразования АДС в ЦКФ разработаны лишь для систем, коэффициенты которых постоянны либо представляют собой полиномы [7].

Подход, связанный с преобразованием АДС к виду, разрешенному относительно производной, представляется конструктивным [4, 8]. Но такое преобразование не является эквивалентным, вследствие чего полученная система может иметь решения, не являющиеся решениями исходной АДС. По этой причине проблема существования решения задачи Коши для АДС требует отдельного исследования.

В статье [9] предлагается алгоритм приведения линейной АДС с гладкими коэффициентами к некоторой эквивалентной форме. Существенным ограничением является условие: $\operatorname{rank} A(t) = \text{const}$ на I.

В данной работе вопрос о минимальном числе входов изучается применительно к стационарным АДС с регулярным матричным пучком $\lambda A + B$, а также к системам вида (1), обладающим ЦКФ или так называемой «эквивалентной формой», в которой разделены «алгебраическая» и «дифференциальная» части. В статье [10] получены условия существования линейного дифференциального оператора, преобразующего АДС (1) к эквивалентной форме, построен конструктивный алгоритм нахождения коэффициентов такого оператора. Доказано, что множества решений исходной и преобразованной систем совпадают. При этом на ранг матрицы $A(t)$ не накладывается никаких ограничений.

§ 2. Структурные формы для АДС с переменными коэффициентами

Для системы (1) определим матрицы

$$D_{r,z}(t)=\begin{pmatrix} C_1^1A(t) & O & \dots & O \\ C_2^1A'(t)+C_2^2B(t) & C_2^2A(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1A^{(r-1)}(t)+C_r^2B^{(r-2)}(t) & C_r^2A^{(r-2)}(t)+C_r^3B^{(r-3)}(t) & \dots & C_r^rA(t) \end{pmatrix},$$

$$D_{r,y}(t)=\begin{pmatrix} C_0^0A(t) & O \\ \begin{pmatrix} C_1^0A'(t)+C_1^1B(t) \\ \vdots \\ C_r^0A^{(r)}(t)+C_r^1B^{(r-1)}(t) \end{pmatrix} & D_{r,z}(t) \end{pmatrix},$$

$$D_{r,x}(t) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} B(t) \\ B'(t) \\ \vdots \\ B^{(r)}(t) \end{pmatrix} & D_{r,y}(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее C_i^j — биномиальные коэффициенты.

Определение 1. Система линейных алгебраических уравнений

$$D_{r,x}(t)\,\mathrm{colon}(x, y, z_1, \dots, z_r) + U_r(t)\,\mathrm{colon}(u, u_1, \dots, u_r) = 0, \tag{2}$$

где $x, y, z_j \in \mathbb{R}^n$; $u, u_j \in \mathbb{R}^l$, $j = \overline{1, r}$; $\mathrm{colon}\,(u, u_1, \dots, u_r) = \begin{pmatrix} u \\ u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}$;

$$U_r(t) = \begin{pmatrix} C_1^1 U(t) & O & \dots & O \\ C_2^1 U'(t) & C_2^2 U(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1 U^{(r)}(t) & C_r^2 U^{(r-1)}(t) & \dots & C_r^r U(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

называется *r-продолженной системой* по отношению к системе (1).

Определение 2. *Решением* системы (1) называется n-мерная вектор-функция $x(t) \in \mathbf{C}^1(I)$, обращающая при подстановке уравнение (1) в тождество на I.

2.1. Центральная каноническая форма.

Определение 3. Говорят, что система (1) *имеет на интервале I ЦКФ*, если существуют $(n \times n)$-матрицы $P(t)$, $Q(t) \in \mathbf{C}^1(I)$, обратимые при любом $t \in I$, такие, что заменой переменной $x(t) = Q(t)\,\mathrm{colon}(\chi_1(t), \chi_2(t))$ и умножением слева на матрицу $P(t)$ АДС (1) преобразуется к виду

$$\chi_1'(t) + J(t)\chi_1(t) + U_1(t)u(t) = 0, \tag{4}$$

$$N(t)\chi_2'(t) + \chi_2(t) + U_2(t)u(t) = 0, \quad t \in I, \tag{5}$$

где $J(t)$ — некоторая матрица размера $(n - d) \times (n - d)$, $\mathrm{colon}(U_1(t), U_2(t)) = P(t)U(t)$, $N(t)$ — верхнетреугольная $(d \times d)$-матрица с r нулевыми квадратными блоками на диагонали, так что $N^r(t) \equiv O$ на I.

Теорема 1 [4, с. 131]. *Пусть элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ вещественно-аналитические: $A(t)$, $B(t) \in \mathbf{C}^A(\widetilde{I})$, где $\widetilde{I}$ — открытый интервал такой, что $I \subset \widetilde{I}$. Для* АДС (1) *на I определена* ЦКФ (4), (5) *с преобразующими матрицами $P(t), Q(t) \in \mathbf{C}^A(\widetilde{I})$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$\mathrm{rank}\, D_{r+1,y}(t) = \mathrm{const} \geq (r+1)n \quad \forall t \in I.$$

К сожалению, если входные данные в системе (1) не являются аналитическими, то ЦКФ может не существовать на всем интервале I. О преобразовании АДС с гладкими коэффициентами в ЦКФ можно говорить лишь в локальном смысле.

2.2. Эквивалентная форма.

Лемма 1. *Пусть*

1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^r(I)$;

2) $\operatorname{rank} D_{r,z}(t) = \rho = \mathrm{const}\ \forall t \in I$;

3) *в матрице* $D_{r,x}(t)$ *имеется неособенный при любом* $t \in I$ *минор порядка* $n(r+1)$, *включающий в себя* ρ *столбцов матрицы* $D_{r,z}(t)$ *и* n *первых столбцов матрицы* $D_{r,y}(t)$.

Тогда на I *определен оператор*

$$R = R_0(t) + R_1(t)\frac{d}{dt} + \cdots + R_r(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^r \qquad (6)$$

с непрерывными коэффициентами $R_j(t)$ $(j = \overline{0,r})$, *обладающий свойством: для любых вектор-функций* $\phi(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I)$ *и* $\psi(t) \in \mathbf{C}^r(I)$ *(*n*- и* l*-мерной соответственно)*

$$R[A(t)\phi'(t) + B(t)\phi(t) + U(t)\psi(t)] = \begin{pmatrix} \phi_1'(t) + J_1(t)\phi_1(t) + \sum\limits_{j=0}^{r} L_j(t)\psi^{(j)}(t) \\ \phi_2(t) + J_2(t)\phi_1(t) + \sum\limits_{j=0}^{r} G_j(t)\psi^{(j)}(t) \end{pmatrix},$$

где $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ *— вектор-функции размерностей соответственно* $n-d$ *и* $d = nr-\rho$; *матрицы* $L_j(t)$ *и* $G_j(t)$ *имеют размеры* $(n-d)\times l$ *и* $d \times l$; $\mathrm{colon}(\phi_1(t), \phi_2(t)) = Q_1\phi(t)$, Q_1 *— матрица перестановок строк; матрицы* $J_1(t)$ *и* $J_2(t)$ *имеют размеры* $(n-d)\times(n-d)$ *и* $d\times(n-d)$ *соответственно;*

$$\begin{pmatrix} L_0(t) & L_1(t) & \dots & L_r(t) \\ G_0(t) & G_1(t) & \dots & G_r(t) \end{pmatrix} = (R_0(t)\ \ R_1(t)\ \ \dots\ \ R_r(t))U_r(t). \qquad (7)$$

Замечание 1. В случае вещественно-аналитических коэффициентов можно показать, что значения d и r в теореме 1 и лемме 1 суть одни и те же. В обоих случаях r — это индекс неразрешенности АДС (1).

Допустим, что предположения 1–3 леммы 1 имеют место и известно, какие именно столбцы матрицы $D_{r,x}(t)$ входят в фигурирующий в условии 3 минор. Вычеркнем те столбцы матрицы $\mathrm{colon}(B(t), B'(t), \dots, B^{(r)}(t))$, которые не входят в упомянутый минор. Эти столбцы в системе (2) умножаются на компоненты вектора x_1, а оставшиеся — на компоненты вектора x_2 ($\mathrm{colon}(x_1, x_2) = Q_1x$). После соответствующей перестановки столбцов из $D_{r,x}(t)$ получим матрицу $\Theta_r(t)$:

$$\Theta_r(t) = D_{r,x}(t)\mathrm{diag}\left(Q_1^{-1}\begin{pmatrix} O \\ E_d \end{pmatrix},\ Q_1^{-1},\ \dots,\ Q_1^{-1}\right),$$

E_d — единичная матрица порядка d. По построению матрица $\Theta_r(t)$ имеет на I полный строчный ранг. Запись $\mathrm{diag}\,(A_1, \dots, A_s)$ обозначает квазидиагональную матрицу, на главной диагонали которой расположены блоки, перечисленные в скобках, остальные элементы нулевые.

Коэффициенты $R_j(t)$ оператора (6) определяются единственным образом по формуле

$$(R_0(t)\ \ R_1(t)\ \ \dots\ \ R_r(t)) = (E_n\ \ O\ \ \dots\ \ O)\,\Theta_r^\top(t)\left(\Theta_r(t)\Theta_r^\top(t)\right)^{-1}, \qquad (8)$$

$^\top$ — символ транспонирования.

Рассмотрим систему

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^{r} L_j(t)u^{(j)}(t) = 0, \tag{9}$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^{r} G_j(t)u^{(j)}(t) = 0, \quad t \in I, \tag{10}$$

где матрицы L_j, G_j находятся по формулам (7), (8), (3),

$$\begin{pmatrix} J_1(t) \\ J_2(t) \end{pmatrix} = (R_0(t) \;\; R_1(t) \;\; \dots \;\; R_r(t)) \;\operatorname{colon}(B(t), B'(t), \dots, B^{(r)}(t))Q_1^{-1} \begin{pmatrix} E_{n-d} \\ O \end{pmatrix}.$$

Лемма 2. *Пусть*

1) $A(t), B(t), U(t), u(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$;

2) *выполнены условия* 2, 3 *леммы* 1;

3) $\operatorname{rank} D_{r+1,y}(t) = \operatorname{rank} D_{r,y}(t) + n \;\forall t \in I$.

Тогда любое решение системы (1) *будет решением системы* (9), (10), *и наоборот.*

Определение 4. Систему (9), (10) назовем *эквивалентной формой* для АДС (1).

Лемма 3. *Пусть*

1) $A(t), B(t), U(t), u(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I)$;

2) *выполнены условия* 2, 3 *леммы* 2.

Тогда существует оператор $M = M_0(t) + M_1(t)\frac{d}{dt}$ *такой, что*

$$M[R_0(t)\delta(t) + R_1(t)\delta'(t) + \dots + R_r(t)\delta^{(r)}(t)] = \delta(t) \quad \forall \delta(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I),$$

где $M_0(t), M_1(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ — $(n \times n)$*-матрицы.*

Доказательства лемм 1–3, обоснование формулы (8) и способ нахождения коэффициентов оператора M изложены в статье [10].

§ 3. Минимальное число входов для систем с переменными коэффициентами

Определение 5. Система (1) называется *вполне управляемой* на отрезке $T = [\alpha_0, \alpha_1] \subset I$, если для любых векторов $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u(t) \in \mathbf{C}^r(T)$ такое, что на T существует решение системы (1), удовлетворяющее условиям $x(\alpha_0) = x_0$, $x(\alpha_1) = x_1$.

Определение 6. Будем говорить, что система (1) *управляема на интервале* I, если она вполне управляема на любом отрезке $T \subset I$.

В этом разделе исследуется вопрос о минимальном числе входов l $(1 \le l \le n)$, при котором система (1) может быть управляема на интервале I.

3.1. АДС, имеющие эквивалентную форму.

Теорема 2 [11]. *Пусть выполнены все предположения леммы* 2. *Для полной управляемости системы* (1) *на отрезке* $T = [\alpha_0, \alpha_1] \subset I$ *достаточно выполнения условий:*

1) $\exists \tau \in T : \operatorname{rank} S(\tau) = n - d$, *где*

$$S(t) = (S_0(t)\ S_1(t)\ \dots\ S_r(t)), \tag{11}$$

$$S_0(t) = (L_0(t)\ L_1(t)\ \dots\ L_r(t)), \quad S_i(t) = J_1(t) S_{i-1}(t) + S'_{i-1}(t), \ \ i = \overline{1, n-d-1};$$

2) $\operatorname{rank}(G_0(\alpha_0)\ G_1(\alpha_0) \dots\ G_r(\alpha_0)) = \operatorname{rank}(G_0(\alpha_1)\ G_1(\alpha_1) \dots\ G_r(\alpha_1)) = d.$

Из определения 6 и теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *В предположениях теоремы* 2 *достаточным условием управляемости системы* (1) *на интервале* I *является одновременное выполнение равенств:*

1) $\operatorname{rank} S(t) = n - d$ *почти всюду на* I*;*

2) $\operatorname{rank}(G_0(t)\ G_1(t) \dots\ G_r(t)) = d\ \forall t \in I.$

Замечание 2. Условие 1 следствия является достаточным условием управляемости на I системы (9), а условие 2 — необходимое и достаточное условие управляемости на I системы (10).

Для простейшей АДС индекса 1 минимальное число входов совпадает с размерностью системы, если в соответствующей эквивалентной форме отсутствует невырожденная составляющая (9).

Предложение 1. *Пусть* $A(t) \equiv O$ *на* I*;* $B(t), U(t), u(t) \in \mathbf{C}^1(I)$*;* $\det B(t) \neq 0$ $\forall t \in I$. *Тогда минимальное число входов для системы* (1) $l = n$.

Доказательство опущено.

Следующий пример показывает, что и в более общем случае может оказаться $l = n$, если в АДС (1) отсутствует невырожденная подсистема.

Пример 1. Рассмотрим АДС

$$A(t)x'(t) + x(t) + U(t)u(t) = 0, \ \ t \in I, \tag{12}$$

где $U(t) \in \mathbf{C}^1(I)$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & w(t) \\ v(t) & 0 \end{pmatrix}$, а скалярные функции $w(t), v(t) \in \mathbf{C}^\infty(I)$ выбираются по правилу: $w(t) = 0$, если $v(t) \neq 0$. Предполагается, что $w(t), v(t) \not\equiv 0$ на I.

Решение системы (12) представимо в виде

$$x(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & w(t) \\ 0 & -1 & v(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(t) & O \\ U'(t) & U(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что все условия леммы 2 выполнены при $r = 2$ и

$$(R_0(t)\ R_1(t)\ R_2(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -w(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -v(t) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что преобразовать эту систему в ЦКФ невозможно, поскольку для $A(t)$ не существует матрицы $P(t)$ (даже с элементами из пространства $\mathbf{C}(I)$), невырожденной при любом $t \in I$ и обращающей при умножении слева одну из строк матрицы $A(t)$ в нулевую на I.

Допустим, что число входов l равно 1. Матрицу $U(t)$ будем искать в виде $U(t) = \operatorname{colon}(a(t), b(t))$, где $a(t), b(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ — скалярные функции.

Тождество на I

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & w(t) \\ 0 & 1 & v(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U(t) & O \\ U'(t) & U(t) \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a(t)+w(t)b'(t) & w(t)b(t) \\ b(t)+v(t)a'(t) & v(t)a(t) \end{pmatrix} \equiv 2$$

является необходимым и достаточным условием управляемости системы. Очевидно, что в точках $t \in I$ таких, что $w(t) = v(t) = 0$, этот ранг при надлежащем выборе функций $a(t)$ и $b(t)$ может быть равен только 1.

С другой стороны, если $U(t) = E_2$, то

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & w(t) \\ 0 & 1 & v(t) & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \forall t \in I.$$

Заметим, что для полной управляемости на отрезке $T = [\alpha_0, \alpha_1] \subset I$ таком, что $v(\alpha_0) \neq 0$, $v(\alpha_1) \neq 0$, достаточно взять $a(t) = 1$, $b(t) = 0$. Но для управляемости на интервале I минимальное число входов не может быть меньше двух.

Можно построить систему любой размерности, обладающую подобным свойством.

Покажем, что в условиях леммы 2 для АДС (1) всегда найдется такая $(n\times d)$-матрица $U(t)$, что система (1) будет управляема на интервале I. Матрицу $U(t)$ будем искать, исходя из равенства

$$(R_0(t)\ R_1(t)\ \ldots\ R_r(t))\operatorname{colon}(U(t), U'(t),\ \ldots, U^{(r)}(t)) = \begin{pmatrix} \Omega(t)g(t) & O \\ & E_d \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $\Omega(t)$ — матрицант системы (9), т. е. $(n-d)\times(n-d)$-матрица, являющаяся решением задачи Коши

$$\Omega'(t) + J_1(t)\Omega(t) = 0,\ t \in I, \quad \Omega(\alpha_0) = E_{n-d}; \quad (14)$$

$g(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(I)$ — вектор-функция размерности $n-d$ такая, что матрица

$$(g(t)\ g'(t)\ \ldots\ g^{(n-d-1)}(t)) \quad (15)$$

обратима при всех $t \in I$. В качестве элементов $g(t) = \operatorname{colon}(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_{n-d}(t))$ можно взять, в частности, линейно независимые решения некоторого дифференциального уравнения

$$\zeta^{(n-d)}(t) - c_{n-d-1}(t)\zeta^{(n-d-1)}(t) - \cdots - c_0(t)\zeta(t) = 0$$

с непрерывными на I коэффициентами $c_i(t)$.

Тогда в соответствии с (7)

$$\begin{pmatrix} L_0(t) & L_1(t) & \ldots & L_r(t) \\ G_0(t) & G_1(t) & \ldots & G_r(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} \Omega(t)g(t) & O & P_1(t) \\ \hline & E_d & P_2(t) \end{array}\right),$$

где $P_1(t), P_2(t)$ — некоторые матрицы соответствующих размеров.

Очевидно, что в этом случае предположение 2 следствия 1 выполнено, а матрица (11)

$$S(t) = \Omega(t)(g(t)\ \ O\ \ \widehat{P}_0(t)\ \ g'(t)\ \ O\ \ \widehat{P}_1(t)\ \ \ldots\ \ g^{(n-d-1)}(t)\ \ O\ \ \widehat{P}_{n-d-1}(t))$$

($\widehat{P}_0(t) = \Omega^{-1}(t)P_1(t)$, $\widehat{P}_j(t) = \Omega^{-1}(t)(J_1(t)P_{j-1}(t) + P'_{j-1}(t))$, $j = \overline{1, n-d-1}$) полного ранга по строкам при всех $t \in I$. Согласно следствию 1 это означает управляемость системы (1) на интервале I.

Для того чтобы найти матрицу $U(t)$, подействуем на равенство (13) оператором M, фигурирующим в лемме 3, в результате получим

$$U(t) = M_0(t)\begin{pmatrix} \Omega(t)g(t) & O \\ & E_d \end{pmatrix} + M_1(t)\begin{pmatrix} -J_1(t)\Omega(t)g(t) + \Omega(t)g'(t) & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Тем самым доказан следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены все предположения леммы* 2. *Тогда найдется матрица* $U(t)$ *размера* $n \times d$ *такая, что система* (1) *будет управляема на интервале* I.

Таким образом, минимальное число входов для АДС вида (1) в предположениях леммы 2 не превосходит размерности подсистемы (10). В ряде случаев эту оценку можно улучшить.

Рассмотрим систему (10). Обозначим

$$\begin{pmatrix} \widehat{R}_0(t) & \widehat{R}_1(t) & \dots & \widehat{R}_r(t) \end{pmatrix} = (\, O \quad E_d\,)\,(R_0(t) \;\; R_1(t) \;\; \dots \;\; R_r(t)).$$

Тогда $(G_0(t) \;\; G_1(t) \;\; \dots \;\; G_r(t)) = (\widehat{R}_0(t) \;\; \widehat{R}_1(t) \;\; \dots \;\; \widehat{R}_r(t))U_r(t)$.

Предположим, что в матрице $(\widehat{R}_0(t) \;\; \widehat{R}_1(t) \;\; \dots \;\; \widehat{R}_r(t))$ имеется минор $\mathscr{M}$ порядка d, отличный от нуля при всех значениях $t \in I$. Введем в рассмотрение множества $\eta_j = \{i_{j,1}, i_{j,2}, \dots, i_{j,\sigma_j}\}$, где $i_{j,1} < i_{j,2} < \dots < i_{j,\sigma_j}$ — номера столбцов матрицы $\widehat{R}_j(t)$ ($j = \overline{0, r}$), входящие в минор $\mathscr{M}$; $\sum\limits_{j=0}^{r} \sigma_j = d$.

Обозначим

$$\eta = \bigcup_{j=0}^{r} \eta_j = \{i_1, i_2, \dots, i_\sigma\}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_\sigma.$$

В матрице $\begin{pmatrix} E_\sigma \\ O \end{pmatrix}$ размера $n \times \sigma$ переставим строки следующим образом: 1-ю строку поставим на место с номером i_1, 2-ю — на i_2 и т. д., строку с номером σ сделаем i_σ-й. Обозначим через $\widetilde{P}$ соответствующую матрицу перестановок строк.

Пусть $\operatorname{rank} D_{r,z}(t) = \rho = n(r-1)$ для любого $t \in I$. В этом случае в предположениях леммы 2 $d = n$, т. е. в эквивалентной форме (9), (10) отсутствует невырожденная подсистема (9), и $(\widehat{R}_0(t) \;\; \widehat{R}_1(t) \;\; \dots \;\; \widehat{R}_r(t)) = (R_0(t) \;\; R_1(t) \;\; \dots \;\; R_r(t))$.

Лемма 4. *Пусть*

1) $A(t), B(t), U(t), u(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$;

2) $\operatorname{rank} D_{r,z}(t) = n(r-1)$ $\forall t \in I$;

3) *в матрице* $D_{r,x}(t)$ *имеется неособенный при каждом* $t \in I$ *минор порядка* $n(r+1)$, *включающий в себя* $n(r-1)$ *столбцов матрицы* $D_{r,z}(t)$ *и* n *первых столбцов матрицы* $D_{r,y}(t)$;

4) $\operatorname{rank} D_{r+1,y}(t) = \operatorname{rank} D_{r,y}(t) + n$ $\forall t \in I$;

5) *в матрице* $(R_0(t) \; R_1(t) \; \dots \; R_r(t))$ *имеется минор* $\mathscr{M}$ *порядка* n, *отличный от нуля при всех значениях* $t \in I$.

Если
$$U(t) = \widetilde{P}\begin{pmatrix} E_\sigma \\ O \end{pmatrix}, \tag{16}$$
то система (1) *будет управляема на интервале* I.

Доказательство. В сделанных предположениях справедлива лемма 2.

Переставим столбцы в матрице $(R_0(t)\ \ R_1(t)\ \ \dots\ \ R_r(t))$ так, чтобы все столбцы, входящие в минор $\mathscr{M}$, имели номера, не превосходящие σ. Тогда
$$\begin{pmatrix} R_0(t) \\ R_1(t) \\ \vdots \\ R_r(t) \end{pmatrix} \overline{P} = \begin{pmatrix} R_{0,1}(t) & R_{0,2}(t) \\ R_{1,1}(t) & R_{1,2}(t) \\ \dots & \dots \\ R_{r,1}(t) & R_{r,2}(t) \end{pmatrix},$$
где $\overline{P}$ — соответствующая матрица перестановок, $R_{j,1}(t)$ $(j = \overline{0,r})$ — $(n \times \sigma)$-матрицы.

Пусть $U(t) = \overline{P}\begin{pmatrix} E_\sigma \\ O \end{pmatrix}$, тогда в (10) матрица
$$\begin{aligned} (G_0(t)\ \ G_1(t)\ \ \dots\ \ G_r(t)) &= (R_0(t)\ \ R_1(t)\ \ \dots\ \ R_r(t))U_r(t) \\ &= ((R_{0,1}(t)\ \ R_{0,2}(t))\ \ \dots\ \ (R_{r,1}(t)\ \ R_{r,2}(t)))\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} E_\sigma \\ O \end{pmatrix}\ \dots\ \begin{pmatrix} E_\sigma \\ O \end{pmatrix}\right) \\ &= (R_{0,1}(t)\ \ R_{1,1}(t)\dots R_{r,1}(t)) \end{aligned}$$
будет полного ранга $d = n$ при каждом $t \in I$. Если в (16) положить $\widetilde{P} = \overline{P}$, то в соответствии с условием 2 следствия 1 система (1) будет управляема на интервале I.

Итак, в соответствии с леммой 4 минимальное число входов для системы вида (10) не превосходит числа элементов $\sigma \le d$ множества η. В силу этого обстоятельства в примере 1 $l = d = 2$.

В условиях леммы 4 в матрице $(R_0(t)\ \ R_1(t)\ \ \dots\ \ R_r(t))$ отличный от нуля при всех $t \in I$ минор порядка $d = n$ может оказаться неединственным. Среди всех таких миноров выберем тот, у которого число σ элементов множества η минимально. В соответствии с этим множеством будем строить матрицу $U(t)$, как показано выше.

Пример 2. Эквивалентная форма для АДС
$$\begin{pmatrix} 0 & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad t \ge 0,$$
имеет вид
$$x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -e^t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U(t) & O \\ U'(t) & U(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = 0.$$
В ней отсутствует невырожденная подсистема (9), $r = 2$ и $d = n = 2$. Матрица
$$(\widehat{R}_0(t)\ \ \widehat{R}_1(t)\ \ \widehat{R}_2(t)) = (R_0(t)\ \ R_1(t)\ \ R_2(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет два отличных от нуля при всех $t \in I$ минора второго порядка, которые соответственно включают в себя либо первый и второй, либо второй и четвертый столбцы этой матрицы. Этим минорам соответствуют множества $\eta = \{1, 2\}$, $\eta = \{2\}$. По лемме 4 $l = \sigma = 1$ и $U(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нетрудно проверить, что при таком выборе матрицы $U(t)$ рассматриваемая система будет управляема на I.

Следующая теорема утверждает, что для АДС вида (1), у которой $d < n$, минимальное число входов не превосходит $\sigma + 1$.

Теорема 4. *Пусть*

1) $A(t), B(t), U(t), u(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$;

2) $\operatorname{rank} D_{r,z}(t) = \rho = \mathrm{const}\ \forall t \in I$;

3) *в матрице* $D_{r,x}(t)$ *имеется неособенный при каждом* $t \in I$ *минор порядка* $n(r+1)$, *включающий в себя* ρ *столбцов матрицы* $D_{r,z}(t)$ *и* n *первых столбцов матрицы* $D_{r,y}(t)$;

4) $\operatorname{rank} D_{r+1,y}(t) = \operatorname{rank} D_{r,y}(t) + n\ \forall t \in I$;

5) *в матрице* $(\widehat{R}_0(t)\ \widehat{R}_1(t)\ \ldots\ \widehat{R}_r(t))$ *имеется минор* $\mathscr{M}$ *порядка* d, *отличный от нуля при всех значениях* $t \in I$.

Тогда найдется $(n \times (\sigma + 1))$-*матрица* $U(t)$ *такая, что система* (1) *будет управляема на интервале* I.

Доказательство. Пусть $\widehat{P}$ — $(n \times n)$-матрица перестановок столбцов такая, что

$$R_j(t)\widehat{P} = \begin{pmatrix} \varrho_{j,1}(t) & R_{j,1}(t) & R_{j,2}(t) \\ \varrho_{j,2}(t) & R_{j,3}(t) & R_{j,4}(t) \end{pmatrix} \quad \forall j = \overline{0, r}.$$

Здесь $\varrho_{j,1}(t)$ — $(n-d)$-мерная, а $\varrho_{j,2}(t)$ — d-мерная вектор-функции; матрицы $R_{j,1}(t)$, $R_{j,2}(t)$, $R_{j,3}(t)$, $R_{j,4}(t)$ имеют размеры $(n-d) \times \sigma$, $(n-d) \times (n - \sigma - 1)$, $d \times \sigma$, $d \times (n - \sigma - 1)$ соответственно. При этом все столбцы, присутствующие в миноре $\mathscr{M}$, входят в матрицы $R_{j,3}(t)$, $j = \overline{0, r}$, так что

$$\operatorname{rank}(R_{0,3}(t)\ \ R_{1,3}(t)\ \ \ldots\ \ R_{r,3}(t)) = d \quad \forall t \in I. \tag{17}$$

Матрицу управления для системы (1) будем искать в виде $U(t) = \widehat{P}(\mathscr{Y}(t) + \mathscr{X}(t))$, где $\mathscr{Y}(t) = \begin{pmatrix} E_{\sigma+1} \\ O \end{pmatrix}$, а $\mathscr{X}(t)$ — $(n \times (\sigma + 1))$-матрица такая, что

$$(R_0(t)\ \ R_1(t)\ \ \ldots\ \ R_r(t)) \operatorname{colon}(\widehat{P}\mathscr{X}(t), \ldots, \widehat{P}\mathscr{X}^{(r)}(t)) = \begin{pmatrix} \Omega(t)g(t) - \varrho_{0,1}(t) & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

где $\Omega(t)$ — матрицант системы (9) (см. (14)), а $g(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(I)$ —$(n-d)$-мерная вектор-функция такая, что матрица (15) обратима при каждом $t \in I$.

По лемме 3

$$\mathscr{X}(t) = \widehat{P}^{-1}\Bigg[M_0(t)\begin{pmatrix} \Omega(t)g(t) - \varrho_{0,1}(t) & O \\ O & O \end{pmatrix} + M_1(t)\begin{pmatrix} -J_1(t)\Omega(t)g(t) + \Omega(t)g'(t) - \varrho'_{0,1}(t) & O \\ O & O \end{pmatrix}\Bigg].$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} L_0(t) & L_1(t) & \dots & L_r(t) \\ G_0(t) & G_1(t) & \dots & G_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega(t)g(t) & R_{0,1}(t) & \hat\varrho_{1,1}(t) & R_{1,1}(t) & \dots & \hat\varrho_{r,1}(t) & R_{r,1}(t) \\ \varrho_{0,2}(t) & R_{0,3}(t) & \hat\varrho_{1,2}(t) & R_{1,3}(t) & \dots & \hat\varrho_{r,2}(t) & R_{r,3}(t) \end{pmatrix},$$

где $\hat\varrho_{r,1}(t)$ и $\hat\varrho_{r,2}(t)$ $(j = \overline{1,r})$ — некоторые вектор-функции соответствующих размерностей. Согласно следствию 1 система (1) будет управляема на интервале I.

На самом деле нетрудно построить пример АДС, для которой в предположениях теоремы 4 минимальное число входов не превосходит $\sigma \le d$. Наличие упомянутого свойства у системы обеспечивается весьма специфической структурой матрицы $(R_0(t)\ \ R_1(t)\ \ \dots\ R_r(t))$.

Например, пусть в условиях теоремы 4 $\widehat P$ — матрица перестановок столбцов такая, что

$$R_j(t)\widehat P = \begin{pmatrix} R_{j,1}(t) & R_{j,2}(t) \\ R_{j,3}(t) & R_{j,4}(t) \end{pmatrix} \quad \forall j = \overline{0,r},$$

где матрицы $R_{j,1}(t)$, $R_{j,2}(t)$, $R_{j,3}(t)$, $R_{j,4}(t)$ имеют размеры $(n-d)\times\sigma$, $(n-d)\times(n-\sigma)$, $d\times\sigma$, $d\times(n-\sigma)$ соответственно. При этом все столбцы, присутствующие в миноре $\mathscr{M}$, входят в матрицы $R_{j,3}(t)$, $j=\overline{0,r}$, и имеет место свойство (17). Положим в (1) $U(t) = \widehat P \begin{pmatrix} E_\sigma \\ O \end{pmatrix}$, тогда $\begin{pmatrix} L_0(t) & L_1(t) & \dots & L_r(t) \\ G_0(t) & G_1(t) & \dots & G_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{0,1}(t) & \dots & R_{r,1}(t) \\ R_{0,3}(t) & \dots & R_{r,3}(t) \end{pmatrix}$. Если при этом матрица $\begin{pmatrix} R_{0,1}(t) & \dots & R_{r,1}(t) \end{pmatrix}$ будет полного ранга $n-d$ по строкам почти для всех $t\in I$, то система (1) будет управляема на I и в этом случае $l \le \sigma$. Этим свойством, в частности, будет обладать система из примера 2, если матрицу при $x'(t)$ задать в виде $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Такая АДС будет управляема на интервале $[0,+\infty)$ при $U(t) = \operatorname{colon}(1,0,1)$.

Замечание 3. Обращаться к теореме 4 имеет смысл, если $\sigma < d-2$. В противном случае нужно воспользоваться теоремой 3.

3.2. АДС, имеющие центральную каноническую форму. Информации, которую дает ЦКФ о структуре АДС (1), недостаточно для ответа на вопрос о минимальном числе входов для этой системы. Для получения такого рода результатов приходится накладывать дополнительные ограничения на структуру матрицы $N(t)$ в системе (4), (5).

В соответствии с определением 3 в системе (4), (5) матрица $N(t)$ имеет блочный вид

$$N(t) = \begin{pmatrix} O_{s_1} & \mathscr{N}_1(t) & * & \dots & * \\ O & O_{s_2} & \mathscr{N}_2(t) & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & \mathscr{N}_{r-1}(t) \\ O & O & O & \dots & O_{s_r} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где на диагонали располагаются нулевые квадратные матрицы указанных порядков, $s_1 + s_2 + \dots + s_r = d$, $\mathscr{N}_j(t)$ — некоторые матрицы, $j = \overline{1, r-1}$. Здесь и далее звездочками обозначены матрицы, явный вид которых неважен для дальнейшего анализа.

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *и в системе* (4), (5), (18) *каждая из матриц* $\mathscr{N}_{r-1}(t), \mathscr{N}_{r-2}(t)\mathscr{N}_{r-1}(t), \dots, \mathscr{N}_1(t)\mathscr{N}_2(t)\dots\mathscr{N}_{r-1}(t)$ *определена и имеет полный строчный ранг при любом* $t \in I$. *Тогда найдется* $(n \times s_r)$-*матрица* $U(t)$ *такая, что система* (1) *будет управляема на интервале* I.

Доказательство. Поскольку решения систем (1) и (4), (5) связаны соотношением $x(t) = Q(t)\operatorname{colon}(\chi_1(t), \chi_2(t))$ с обратимой для любого $t \in I$ матрицей $Q(t)$, эти системы управляемы одновременно.

Известно (см., в частности, [2, с. 244]), что минимальное число входов для системы (4) равно единице, поэтому минимальное число входов для системы (1) в условиях теоремы 1 определяется минимальным числом входов для системы (5).

Решение системы (5) представимо в виде

$$\chi_2(t) = -U_2(t)u(t) + F[U_2(t)u(t)] - F^2[U_2(t)u(t)] + \dots + (-1)^r F^r[U_2(t)u(t)],$$

где оператор F на любую достаточно гладкую $(n-d)$-мерную функцию $\phi(t)$ действует по правилу $F[\phi(t)] = N(t)\phi'(t)$.

Матрицу $U_2(t)$ зададим в виде

$$U_2(t) = \operatorname{colon}(O, E_{s_r}). \tag{19}$$

Нетрудно проверить, что в терминах матриц $\mathscr{N}_j(t)$ решение АДС (5) можно записать в виде

$$\chi_2(t) = \mathscr{X}(t)\operatorname{colon}(u(t), u'(t), \dots, u^{(r-1)}(t)),$$

где

$$\mathscr{X}(t) = \begin{pmatrix} O & * & * \dots & * & (-1)^r\mathscr{N}_1(t)\dots\mathscr{N}_{r-1}(t) \\ O & * & * \dots & (-1)^{r-1}\mathscr{N}_2(t)\dots\mathscr{N}_{r-1}(t) & O \\ \vdots & \vdots & \vdots \ \ddots & \vdots & \vdots \\ O & \mathscr{N}_{r-1}(t) & O \dots & O & O \\ -E_{s_r} & O & O \dots & O & O \end{pmatrix}.$$

Следуя логике доказательства теоремы 2 в [11], можно показать, что достаточным условием управляемости на I системы (4), (5) является одновременное выполнение равенств:

1) $\operatorname{rank} S(t) = n - d$ почти всюду на I, где $S(t) = (S_0(t)\ S_1(t)\ \dots\ S_r(t))$,

$$S_0(t) = U_1(t), \quad S_i(t) = J(t)S_{i-1}(t) + S'_{i-1}(t), \ \ i = \overline{1, n-d-1};$$

2) $\operatorname{rank}\ \mathscr{X}(t) = d\ \forall t \in I$.

В предположениях теоремы 5 условие 2 выполнено. Условие 1 будет иметь место, если

$$U_1(t) = (\widetilde{\Omega}(t)\tilde{g}(t) \quad O), \tag{20}$$

где $\widetilde{\Omega}(t)$ — матрицант системы (4), а $\tilde{g}(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(I)$ — вектор-функция размерности $n-d$ такая, что матрица $(\tilde{g}(t)\ \tilde{g}'(t)\ \dots\ \tilde{g}^{(n-d-1)}(t))$ обратима при всех $t \in I$.

Таким образом, АДС (1) будет управляема на интервале I, если

$$U(t) = P(t)\,\mathrm{colon}(U_1(t), U_2(t)),$$

где $U_1(t), U_2(t)$ находятся по формулам (19), (20).

Итак, минимальное число входов для АДС, обладающей ЦКФ (4), (5), в условиях теоремы 5 не превосходит порядка нижнего диагонального блока в матрице $N(t)$ в системе (4), (5). Именно такую ситуацию мы имеем в примере 2, где рассматриваемая система уже представлена в ЦКФ.

§ 4. Минимальное число входов для стационарных АДС

Используемая для анализа АДС с постоянными коэффициентами

$$Ax'(t) + Bx(t) + Uu(t) = 0,\ t \in I, \quad \det A = 0, \tag{21}$$

кононическая форма Кронекера — Вейерштрасса позволяет дать исчерпывающий ответ на вопрос о минимальном числе входов для такой системы.

Предположим, что в системе (21) матричный пучок $\lambda A + B$ регулярен, т. е. $\det\,(\lambda A + B) \not\equiv 0$. Тогда [8, с. 315] найдутся неособенные $(n \times n)$-матрицы P и Q такие, что замена переменной

$$x(t) = Q\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \tag{22}$$

и умножение слева на матрицу P преобразуют АДС (21) к виду

$$x_1'(t) + Jx_1(t) + U_1u(t) = 0, \tag{23}$$

$$Nx_2'(t) + x_2(t) + U_2u(t) = 0, \quad t \in I, \tag{24}$$

где $N = \begin{pmatrix} H_{s_1} & O & \dots & O \\ O & H_{s_2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & H_{s_\nu} \end{pmatrix}$, $H_{s_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица порядка s_i, $i = \overline{1, \nu}$; J — некоторая матрица соответствующего размера; $\mathrm{colon}(U_1, U_2) = PU$.

Известно [1, с. 44, 46], что необходимым и достаточным критерием полной управляемости на произвольном отрезке $T \subset I$ (а также управляемости на интервале I) системы (23) является условие

$$\mathrm{rank}(U_1\ JU_1\ \dots\ J^{n-d-1}U_1) = n - d. \tag{25}$$

Минимальное число входов l $(1 \le l \le n - d)$, при котором можно обеспечить выполнение этого равенства, равно числу q нетривиальных инвариантных многочленов пучка $\lambda E_{n-d} + J$.

Определим минимальное число входов для АДС (24). Система (24) распадается на ν подсистем вида

$$H_{s_i}\xi_i'(t) + \xi_i(t) + \widetilde{U}_iu(t) = 0, \tag{26}$$

где $i=\overline{1,\nu}$, ν — число бесконечных элементарных делителей пучка $\lambda A+B$,

$$\operatorname{colon}(\xi_1(t),\dots,\xi_\nu(t))=x_2(t),\quad \operatorname{colon}(\widetilde{U}_1,\dots,\widetilde{U}_\nu)=U_2.$$

Для решения АДС (26) имеет место представление

$$\xi_i(t)=\sum_{j=0}^{s_i-1}(-1)^{j+1}H_{s_i}^{j}\widetilde{U}_iu^{(j)}(t)=V_i\operatorname{colon}(u(t),u'(t),\dots,u^{(s_{i-1})}(t)),$$

где $V_i=(-\widetilde{U}_i\ \ H_{s_i}\widetilde{U}_i\ \ -H_{s_i}^2\widetilde{U}_i\ \ \dots\ \ (-1)^{s_i}H_{s_i}^{s_i-1}\widetilde{U}_i)$. По этой причине для управляемости системы (26) необходимо и достаточно, чтобы матрица V_i была полного ранга по строкам, т. е. $\operatorname{rank}V_i=s_i$ или $\operatorname{rank}(\widetilde{U}_i\ \ H_{s_i}\widetilde{U}_i\ \ H_{s_i}^2\widetilde{U}_i\ \ \dots\ \ H_{s_i}^{s_i-1}\widetilde{U}_i)=s_i$.

Пусть $\widetilde{U}_i=\operatorname{colon}(U_{i,1},U_{i,2},\dots,U_{i,s_i})$, где $U_{i,j}$ — вектор-строка, $j=\overline{1,s_i}$. Тогда с учетом представления для матрицы H_{s_i}

$$(\widetilde{U}_i\ \ H_{s_i}\widetilde{U}_i\ \ H_{s_i}^2\widetilde{U}_i\ \ \dots\ \ H_{s_i}^{s_i-1}\widetilde{U}_i)=\begin{pmatrix}U_{i,1}&U_{i,2}&U_{i,3}&\dots&U_{i,s_i}\\ U_{i,2}&U_{i,3}&U_{i,4}&\dots&O\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ U_{i,s_i-1}&U_{i,s_i}&O&\dots&O\\ U_{i,s_i}&O&O&\dots&O\end{pmatrix},\quad i=\overline{1,\nu}. \tag{27}$$

Очевидно, что для полноты строчного ранга этой матрицы необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из l компонент строки U_{i,s_i} была отлична от нуля. При этом достаточно, чтобы $l=1$. Таким образом, минимальное число входов для системы (26) равно единице. В этом случае условие $U_{i,s_i}\neq 0$ является необходимым и достаточным для ее управляемости.

Вернемся к системе (24). Ее решение находится по формуле

$$x_2(t)=\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{j+1}N^jU_2u^{(j)}(t),$$

где $r=\max\limits_{1\le i\le\nu}s_i$. Ясно, что необходимым и достаточным условием управляемости АДС (24) является полнота строчного ранга матрицы $(U_2\ NU_2\ \dots\ N^{r-1}U_2)$:

$$\operatorname{rank}(U_2\ \ NU_2\ \ \dots\ N^{r-1}U_2)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\widetilde{U}_1&H_{s_1}\widetilde{U}_1&\dots&H_{s_1}^{r-1}\widetilde{U}_1\\ \widetilde{U}_2&H_{s_2}\widetilde{U}_2&\dots&H_{s_2}^{r-1}\widetilde{U}_2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \widetilde{U}_\nu&H_{s_\nu}\widetilde{U}_\nu&\dots&H_{s_\nu}^{r-1}\widetilde{U}_\nu\end{pmatrix}=d. \tag{28}$$

Принимая во внимание представление (27), нетрудно убедиться, что необходимым и достаточным условием выполнения равенства (28) является полнота строчного ранга матрицы

$$\operatorname{colon}(U_{1,s_1},U_{2,s_2},\dots,U_{\nu,s_\nu}).$$

Условие минимальности числа входов l требует, чтобы эта матрица была обратима. Таким образом, для системы (24) $l=\nu$.

Рассмотрим систему (23), (24). По построению пучки матриц

$$\lambda A + B, \quad \lambda \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ O & N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J & O \\ O & E_d \end{pmatrix} \tag{29}$$

строго эквивалентны. Поэтому они имеют одни и те же инвариантные многочлены. Учитывая вид матрицы N, нетрудно проверить, что все инвариантные многочлены пучка $\lambda N + E_d$ равны 1. Поэтому пучки (29) [8, с. 135] имеют одно и то же число нетривиальных инвариантных многочленов.

В работе [12] доказано, что одновременное выполнение условий (25) и (28) необходимо и достаточно для управляемости АДС (23), (24). Кроме того, показано, что в этом случае управление $u(t)$ можно выбрать сразу для обеих систем в виде полинома достаточно большой степени. Поскольку решения систем (21) и (23), (24) связаны соотношением (22), управляемость одной из них влечет управляемость другой. Таким образом, равенства (25), (28) представляют собой необходимое и достаточное условие управляемости АДС (21).

Итак, минимальное число входов для системы (21) $l = \max\{q, \nu\}$, где q — число нетривиальных инвариантных многочленов, а ν — число бесконечных элементарных делителей пучка $\lambda A + B$.

Таким образом, доказана

Теорема 6. *Пусть в системе* (21) *пучок матриц* $\lambda A + B$ *регулярен. Тогда минимальное число входов для этой системы* $l = \max\{q, \nu\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.
2. *Гайшун И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск: Изд-во Ин-та математики НАН Беларуси, 1999.
3. *Campbell S. L., Petzold L. R.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Algebr. Discrete Math. 1983. N 4. P. 517–512.
4. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996.
5. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.
6. *Campbell S. L., Terrell W. J.* Observability of linear time varying descriptor systems // CRSC Technical Report 072389-01. Center for Research in Scientific Computation, North Carolina Univ., 2003.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
8. *Brenan K. E., Campbell S. L., Petzold L. R.* Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. Philadelphia: SIAM, 1996. (Classics Appl. Math.; 14).
9. *Kunkel P., Mehrmann V.* Canonical forms for linear differential-algebraic equations with variable coefficients // J. Comput. Appl. Math. 1995. N 56. P. 225–251.
10. *Щеглова А. А.* Преобразование линейной алгебро-дифференциальной системы к эквивалентной форме // Тр. IX Четаевской Междунар. конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». Иркутск: Изд-во ИДСТУ СО РАН, 2007. Т. 5. С. 298–307.
11. *Щеглова А. А.* Управляемость нелинейных алгебро-дифференциальных систем // Автоматика и телемеханика. 2008. № 10. С. 57–80.
12. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 62–75.

Статья поступила 9 сентября 2008 г.

Щеглова Алла Аркадьевна
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
shchegl@icc.ru