Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 517.957

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦЕПОЧКИ ВОЛЬТЕРРА С АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЕРИОДИЧЕСКИМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Аг. Х. Ханмамедов

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для полубесконечной цепочки Вольтерра с асимптотически периодическим начальным условием. Изучен вопрос существования решения, имеющего ту же асимптотику на бесконечности, что и начальное условие. Показана возможность применения метода обратной задачи рассеяния к рассматриваемой задаче.

Ключевые слова: цепочка Вольтерра, задача рассеяния, асимптотически периодическое условие, метод обратной задачи, задача Коши, глобальная разрешимость.

1. Введение. Многие интересные физические явления описываются бесконечными динамическими системами такими, как цепочка Вольтерра, цепочка Тоды и т. д. (см. [1–13]). Хорошо известно, что метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) позволяет детально исследовать задачу Коши для упомянутых цепочек в случае быстро убывающих начальных условий [1–3, 5, 8, 14] и в периодическом случае [6–8]. С практической точки зрения интерес представляет также задача Коши с асимптотически периодическим начальным условием. При этом возникает вопрос о возвращении динамической системы к своему начальному состоянию на больших расстояниях (см. [9]).

Для последовательности положительных функций $a_n = a_n(t) > 0$, $a_n \in C^{(1)}[0,\infty)$, рассмотрим следующую задачу для цепочки Вольтерра:

$$\dot{a}_n = \frac{1}{2}a_n\big(a_{n-1}^2 - a_{n+1}^2\big), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

$$a_n(0) - \hat{a}_n \to 0 \quad \text{при } n \to \infty, \tag{1.2}$$

$$a_0 = 0, \tag{1.3}$$

где $\hat{a}_{n+N} = \hat{a}_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, N — натуральное число, а точкой сверху здесь и далее обозначается производная по t.

Будем искать такое решение $a_n(t)$ задачи (1.1)–(1.3), что $a_n(t) - \hat{a}_n$ быстро убывает, т. е. при любом $T > 0$ выполняется условие

$$\|Q_1(T)\|_{C[0,T]} < \infty, \tag{1.4}$$

где $Q_r(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n(t) - \hat{a}_n|$, $r = 1$ (или $r = 3$).

Настоящая работа посвящена изучению задачи (1.1)–(1.3) в классе (1.4). Показана возможность применения МОЗР к задаче (1.1)–(1.3) при $N \le 2$. При этом для начальных условий, имеющих конечный третий момент, дано обоснование МОЗР, которое обеспечивает глобальную разрешимость задачи (1.1)–(1.3) в классе (1.4). Доказана также теорема об отсутствии решения. Отметим, что в случае некоторых цепочек, связанных с изоспектральными деформациями якобиевых матриц, вопрос о глобальной разрешимости исследован в [8, 11] для более широких классов начальных условий. Однако предложенный в данной статье метод может быть использован также в неизоспектральном случае (см. [12]). Заметим, что задача Коши для бесконечной в обе стороны цепочки Вольтерра с асимптотически периодическим условием (с периодом 2) поставлена в работе [9]. Эта задача полностью решена в работе [10]. Тем не менее исследование полубесконечной цепочки по сравнению с бесконечной в обе стороны цепочки сталкивается с трудностями. Особенно эти трудности усугубляются в вопросе обоснования МОЗР, так как здесь придется «разумно переопределить» второй оператор $L-A$ пары, описывающий эволюцию во времени собственных функций вспомогательной спектральной задачи.

В дальнейшем рассмотрении мы исключим случай $N=1$, считая при этом, что последний получается из общего случая при $N=2$ и $\hat{a}_0=\hat{a}_1$.

2. Предварительные сведения. В этом разделе сформулируем некоторые вспомогательные факты, относящиеся к краевой задаче рассеяния для разностного уравнения второго порядка, многие из которых содержатся в работах [14, 15].

Рассмотрим граничную задачу

$$a_{n-1}y_{n-1}+a_ny_{n+1}=\lambda y_n,\ n=1,2,\dots,\quad a_0=\hat{a}_0, \tag{2.1}$$

$$y_0=0, \tag{2.2}$$

в которой коэффициент $a_n>0$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n-\hat{a}_n|<\infty, \tag{2.3}$$

где $\hat{a}_{n+2}=\hat{a}_n>0$, $n=0,1,\dots$.

Пусть Γ — комплексная λ-плоскость с разрезами по отрезкам $[-|\hat{a}_0+\hat{a}_1|, -|\hat{a}_0-\hat{a}_1|]$ и $[|\hat{a}_0-\hat{a}_1|, |\hat{a}_0+\hat{a}_1|]$, а $\partial\Gamma$ — ее «граница», состоящая из точек верхнего и нижнего разрезов упомянутых отрезков. В плоскости Γ рассмотрим функцию

$$z=z(\lambda)=\frac{\lambda^2-\hat{a}_0^2-\hat{a}_1^2}{2\hat{a}_0\hat{a}_1}+\sqrt{\left(\frac{\lambda^2-\hat{a}_0^2-\hat{a}_1^2}{2\hat{a}_0\hat{a}_1}\right)^2-1},$$

где регулярная ветвь радикала выбирается из условия $\sqrt{\left(\frac{\lambda^2-\hat{a}_0^2-\hat{a}_1^2}{2\hat{a}_0\hat{a}_1}\right)^2-1}<0$ при $\lambda>\hat{a}_0+\hat{a}_1$. Отметим, что

$$y_{2n+1-j}=\left(\frac{\hat{a}_0z(\lambda)+\hat{a}_1}{\lambda}\right)^{j-2},\quad j=1,2,$$

служит решением Флоке (см. [8]) уравнения (2.1) при $a_n=\hat{a}_n$, а $z(\lambda)$ — мультипликатор Флоке.

В дальнейшем мы часто будем опускать зависимость функции $z(\lambda)$ от λ. Таким образом, в формулах, где участвуют z и λ, всегда подразумевается, что z является введенной функцией λ.

Обозначим через $f_n(\lambda)$ решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{n\to\infty} f_{2n+1-j}(\lambda)\left(\frac{\hat a_0 z+\hat a_1}{\lambda}\right)^{j-2}=1,\quad j=1,2.$$

Такое решение существует и определяется однозначно. Справедливо [14, 15] представление через оператор преобразования

$$f_{2n+1-j}(\lambda)=\alpha_j(n)\left(\frac{\hat a_0 z+\hat a_1}{\lambda}\right)^{2-j} z^n\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}K_j(n,m)z^m\right\},\ j=1,2,\ n\ge j-1, \tag{2.4}$$

причем

$$\alpha_j(n)=1+o(1),\ n\to\infty,\quad K_j(n,m)=O\Big(\sum_{r=n+[\frac{m}{2}]}|a_r-\hat a_r|\Big),\ n+m\to\infty,$$

где $[x]$ — целая часть x.

Величины $\alpha_j(n)$, $K_j(n,m)$ и коэффициент a_n уравнения (1.1) связаны соотношениями

$$\frac{a_{2n+1-j}}{\hat a_{j-1}}=\left(\frac{\alpha_2(n+2-j)}{\alpha_1(n)}\right)^{1-2[\frac{j}{2}]},\quad j=1,2,\ n\ge j-1, \tag{2.5}$$

$$\frac{a^2_{2n+1-j}-\hat a^2_{j-1}}{\hat a_0\hat a_1}=\left(1-2\left[\frac{j}{2}\right]\right)\left\{K_1\left(n-\left[\frac{j}{2}\right],1\right)-K_2(n,1)\right\},\quad j=1,2,\ n\ge 1, \tag{2.6}$$

$$K_2(n,m+1)-K_1(n,m+1)=\frac{\hat a_0}{\hat a_1}K_1(n,m)-\frac{a^2_{2n}}{\hat a_0\hat a_1}K_2(n+1,m),\quad n\ge 1, \tag{2.7}$$

$$K_1(n-1,m+1)-K_2(n,m+1)=\frac{\hat a_1}{\hat a_0}K_2(n,m)-\frac{a^2_{2n-1}}{\hat a_0\hat a_1}K_1(n,m),\quad n\ge 1,\ m\ge 1. \tag{2.8}$$

Определим решение $\varphi_n(\lambda)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям $\varphi_0(\lambda)\equiv 0$, $\varphi_1(\lambda)\equiv 1$. Тогда [15] верно соотношение

$$\frac{\hat a_1(z^{-1}-z)}{\lambda}\varphi_n(\lambda)=f_0(\lambda)\overline{f_n(\lambda)}-\overline{f_0(\lambda)}f_n(\lambda),\quad \lambda\in\partial\Gamma,\quad \lambda^2\ne(\hat a_0+\hat a_1)^2. \tag{2.9}$$

Функция $f_0(\lambda)$ регулярна в плоскости Γ (за исключением точки $\lambda=0$ при $\hat a_0<\hat a_1$) и может иметь конечное число простых вещественных нулей λ_k, $k=1,\dots,N_0$, лежащих вне $\partial\Gamma$ (см. [15]). При этом собственные значения оператора L, порожденного в пространстве $\ell_2[1,\infty)$ граничной задачей (2.1), (2.2), являются простыми и совпадают с нулями λ_k, $k=1,\dots,N_0$.

Введем обозначения

$$S_0(\lambda)=\frac{\overline{f_0(\lambda)}}{f_0(\lambda)},\quad M_j^{-1}=\|f_n(\lambda_j)\|_{\ell_2[1,\infty)},\ j=1,\dots,N_0.$$

Как показано в [15], векторы $\{u_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{u_n(\lambda_j)\}_{n=1}^{\infty}$, определенные по формулам

$$u_n(\lambda)=\overline{f_n(\lambda)}-S_0(\lambda)f_n(\lambda),\ \lambda\in\partial\Gamma,\quad u_n(\lambda_j)=M_jf_n(\lambda_j),\ j=1,\dots,N_0, \tag{2.10}$$

образуют полный набор нормированных собственных векторов оператора L, т. е. имеет место формула

$$\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{\lambda}{\hat{a}_0\hat{a}_1(z-z^{-1})}u_n(\lambda)\overline{u_m(\lambda)}\,d\lambda+\sum_{j=1}^{N_0}u_n(\lambda_j)u_m(\lambda_j)=\delta_{nm},\quad n,m=1,2,\dots, \tag{2.11}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

Рассмотрим представление (2.4). Согласно этому представлению $f_0(\lambda)$ является нечетной функцией. Поэтому нули λ_j расположены симметрично относительно точки $\lambda=0$, т. е. $\lambda_j=\pm\mu_j$, $\mu_j\geq 0$. Симметричным точкам λ_j отвечают равные нормировочные числа M_j. Положим $z_j=z(\mu_j)$, $j=1,\dots,[\frac{N_0+1}{2}]$. Из определения функции $z(\lambda)$ следует, что числа z_j удовлетворяют неравенствам $0<z_j^2<1$, $(\hat{a}_0z_j+\hat{a}_1)\big(\hat{a}_0z_j^{-1}+\hat{a}_1\big)^{-1}\geq 0$, причем равенство может достигаться в том и только в том случае, когда $\hat{a}_0>\hat{a}_1$. В этом случае одно из чисел z_j равно $-\frac{\hat{a}_1}{\hat{a}_0}$.

Далее, согласно (2.4) коэффициент $S_0(\lambda)=\frac{\overline{f_0(\lambda)}}{f_0(\lambda)}$ можно рассматривать как функцию $S(z)$ от переменного z, причем

$$S(z(\lambda))=S_0(\lambda). \tag{2.12}$$

Набор величин

$$\big\{S(z),|z|=1;z_j,0<z_j^2<1,(\hat{a}_0z_j+\hat{a}_1)\big(\hat{a}_0z_j^{-1}+\hat{a}_1\big)^{-1}\geq 0;\\ M_j,M_j>0,\ j=1,\dots,[(N_0+1)/2]\big\} \tag{2.13}$$

назовем *данными рассеяния* для граничной задачи (2.1), (2.2). Обратная задача рассеяния для последней задачи состоит в восстановлении коэффициента a_n, $n\geq 1$, по данным рассеяния.

В [15] установлены характеристические свойства данных рассеяния, позволяющие по ним восстановить коэффициент a_n уравнения (2.1). Положим

$$F_j(n)=2\sum_{z_k\neq-\frac{\hat{a}_1}{\hat{a}_0}}M_k^2\left(\frac{\hat{a}_0z_k+\hat{a}_1}{\hat{a}_0z_k^{-1}+\hat{a}_1}\right)^{2-j}z_k^n+M_k^2\left(\frac{\hat{a}_0z_k+\hat{a}_1}{\hat{a}_0z_k^{-1}+\hat{a}_1}\right)^{2-j}z_k^n\bigg|_{z_k=-\frac{\hat{a}_1}{\hat{a}_0}}\\ -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}S(z)\left(\frac{\hat{a}_0z+\hat{a}_1}{\hat{a}_0z^{-1}+\hat{a}_1}\right)^{2-j}z^{n-1}\,dz,\quad j=1,2, \tag{2.14}$$

причем второе слагаемое входит в (2.14) тогда и только тогда, когда $\hat{a}_0>\hat{a}_1$.

Справедливо [15] следующее

Утверждение 1. *Для того чтобы набор величин* (2.13) *был данными рассеяния для некоторой граничной задачи* (2.1), (2.2) *с коэффициентом* a_n *из класса* (2.3), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(а) *функция* $S(z)$ *непрерывна на окружности* $|z|=1$ *и*

$$\overline{S(z)}=S(1/z)=S^{-1}(z);$$

(б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n|F_2(n+2p)-F_1(n)|<\infty,\quad p=0,1;$

(в) *приращение* $\Delta\arg S(z)$ *аргумента функции* $S(z)$ *вдоль окружности* $|z|=1$ *связано с числом* N_0 *формулой*

$$\left[\frac{N_0+1}{2}\right]=-\frac{1}{4\pi}\Delta\arg S(z)-\frac{2-S(1)-S(-1)}{4}.$$

При выполнении условий этого утверждения обратная задача рассеяния решается следующим образом. Сначала по данным рассеяния построим величину $F_j(n)$ по формуле (2.14). Тогда коэффициент a_n восстанавливается по любым из формул (2.5), (2.6), где величины $K_j(n,m)$ и $\alpha_j(n)$ находятся из соотношений

$$F_j(2n+m)+K_j(n,m)+\sum_{r=1}^{\infty}K_j(n,r)F_j(2n+m+r)=0,\quad j=1,2,\ n\geq j-1,\ m\geq 1, \tag{2.15}$$

$$\alpha_j^{-2}(n)=1+F_j(2n)+\sum_{m=1}^{\infty}K_j(n,m)F_j(2n+m),\quad j=1,2,\ n\geq 1, \tag{2.16}$$

первое из которых имеет при каждом n единственное решение в $\ell_p[1,\infty)$, $p=1,2$, относительно $K_j(n,m)$.

Уравнения (2.15) назовем *основными уравнениями типа Гельфанда — Левитана — Марченко.* Выведем некоторые оценки относительно решений основных уравнений. Заметим прежде всего, что при выполнении условий утверждения 1 уравнения (2.15) порождаются вполне непрерывными операторами в $\ell_1[1,\infty)$, т. е. оператор $\mathscr{F}_{j,n}$ $(j=1,2)$, действующий по формуле $(\mathscr{F}_{j,n}y)_m=\sum\limits_{k=1}^{\infty}F_j(2n+m+k)y_k$, вполне непрерывен в $\ell_1[1,\infty)$. Поскольку уравнения (2.15) при каждом n имеют единственные решения в $\ell_1[1,\infty)$, оператор $I+\mathscr{F}_{j,n}$ для каждого n имеет ограниченный обратный. Легко видеть, что этот обратный оператор ограничен в $\ell_1[1,\infty)$ по норме равномерно относительно n:

$$\|(I+\mathscr{F}_{j,n})^{-1}\|\leq C,\quad j=1,2,\ n\geq j-1. \tag{2.17}$$

Положим $\sigma(n)=\sum\limits_{m=n}^{\infty}\{|F_1(m)-F_2(m)|+|F_2(m+2)-F_1(m)|\}$. Представляя $F_j(n)$ в виде

$$F_j(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\{F_j(n+2k)-F_j(n+2(k+1))\},$$

находим, что

$$|F_j(n)|\leq\sigma(n),\quad j=1,2. \tag{2.18}$$

Кроме того, в силу основных уравнений (2.15) и оценок (2.17), (2.18) имеем

$$|K_j(n,m)|\leq C\sigma(2n+m),\quad j=1,2, \tag{2.19}$$

где через C, вообще говоря, обозначаются разные постоянные.

С другой стороны, из (2.15) получим

$$\begin{gathered}K_2(n,m)-K_1(n-p,m)+\sum_{r=1}^{\infty}\{K_2(n,r)-K_1(n-p,r)\}F_2(2n+m+r)\\ =F_1(2(n-p)+m)-F_2(2n+m)\\ +\sum_{r=1}^{\infty}K_1(n-p,r)\{F_1(2(n-p)+m+r)-F_2(2n+m+r)\},\quad p=0,1.\end{gathered} \tag{2.20}$$

Воспользовавшись оценками (2.17)–(2.19) и последним уравнением, находим, что

$$\|K_2(n,\cdot)-K_1(n-p,\cdot)\|_{\ell_1[1,\infty)}\le C\sigma(2n-2),\quad p=0,1.$$

Поэтому из уравнения (2.20), принимая во внимание (2.18), (2.19), имеем

$$|K_2(n,m)-K_1(n-p,m)|\le|F_1(2(n-p)+m)-F_2(2n+m)| \\ +C\sigma(2n-2)\sigma(2n-2+m),\quad p=0,1. \tag{2.21}$$

3. Временная динамика данных рассеяния. Предположим теперь, что в уравнении (2.1) стоит коэффициент $a_n(t)$, $n\ge 1$, являющийся решением задачи (1.1)–(1.3) при $N=2$. Установим, каким образом меняются данные рассеяния $\{S(z,t); z_k(t), M_k(t)\}$ во времени.

Теорема 1. *Если в уравнении* (2.1) *с коэффициентом* $a_n=a_n(t)$, $n\ge 1$, *последний является решением задачи* (1.1)–(1.3) *при* $N=2$, *то динамика данных рассеяния граничной задачи* (2.1), (2.2) *описывается формулами*

$$S(z,t)=S(z,0)\exp\{\hat a_0\hat a_1(z^{-1}-z)t\},\quad z_k(t)=z_k(0)=z_k, \\ M_k^2(t)=M_k^2(0)\exp\{\hat a_0\hat a_1(z_k^{-1}-z_k)t\},\quad k=1,\dots,\left[\frac{N_0+1}{2}\right]. \tag{3.1}$$

Доказательство. Вводим операторы $L=L(t)$ и $\mathcal{A}=\mathcal{A}(t)$, полагая

$$(Ly)_1=a_1(t)y_1,\quad (Ly)_n=a_{n-1}(t)y_{n-1}+a_n(t)y_{n+1},\quad n>1,$$

$$(\mathcal{A}y)_j=-\frac12 a_j(t)a_{j+1}(t)y_{j+2},\quad j=1,2,$$

$$(\mathcal{A}y)_n=\frac12\{a_{n-2}(t)a_{n-1}(t)y_{n-2}-a_n(t)a_{n+1}(t)y_{n+2}\},\quad n>2.$$

Операторы L и A при каждом t являются соответственно симметрическим и кососим-метрическим в $\ell_2[1,\infty): L^*=L$, $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$. Более того, эти операторы образуют пару Лакса и соотношение

$$\dot L=\mathcal{A}L-L\mathcal{A} \tag{3.2}$$

равносильно уравнению (1.1) с учетом краевого условия (1.3). Из последнего уравнения вытекает, что оператор $B=\frac{d}{dt}-\mathcal{A}$ переводит дифференцируемые по t решения уравнения $L\psi=\lambda\psi$ в решения этого же уравнения.

Рассмотрим тождество (2.9) с параметром t. Очевидно, что $\varphi=\{\varphi_n(\lambda,t)\}_{n=1}^{\infty}$ является дифференцируемым по t решением уравнения $L\varphi=\lambda\varphi$. Кроме того, $(B\varphi)_1=\frac12 a_1(t)a_2(t)\varphi_3(\lambda,t)=\frac{\lambda^2-a_1^2(t)}{2}$, откуда следует, что

$$B\varphi=\frac{\lambda^2-a_1^2(t)}{2}\varphi. \tag{3.3}$$

С другой стороны, используя (2.4), (2.9), при $n\to\infty$ находим

$$\frac{\hat a_1(z^{-1}-z)}{\lambda}(B\varphi)_{2n+1-j} \\ =\left\{\dot f_0(\lambda,t)+\frac12\hat a_0\hat a_1(z^{-1}-z)f_0(\lambda,t)\right\}\left(\frac{\hat a_0 z^{-1}+\hat a_1}{\lambda}\right)^{2-j}z^{-n} \\ -\left\{\overline{\dot f_0(\lambda,t)}-\frac12\hat a_0\hat a_1(z^{-1}-z)\overline{f_0(\lambda,t)}\right\}\left(\frac{\hat a_0 z+\hat a_1}{\lambda}\right)^{2-j}z^n+o(1),\quad j=1,2.$$

Однако уравнение $L\psi = \lambda\psi$ имеет единственное решение с такой асимптотикой. Следовательно,

$$\frac{\hat{a}_1(z^{-1}-z)}{\lambda}(B\varphi)_n = \left\{\dot{f}_0(\lambda,t) + \frac{1}{2}\hat{a}_0\hat{a}_1(z^{-1}-z)f_0(\lambda,t)\right\}\overline{f_n(\lambda,t)} - \left\{\overline{\dot{f}_0(\lambda,t)} - \frac{1}{2}\hat{a}_0\hat{a}_1(z^{-1}-z)\overline{f_0(\lambda,t)}\right\}f_n(\lambda,t).$$

Подставим (3.3) в последнее равенство и сравним с тождеством (2.9). В результате получим

$$f_0(\dot{\lambda},t) = \frac{1}{2}\left\{\lambda^2 - a_1^2(t) - \hat{a}_0\hat{a}_1(z^{-1}-z)\right\}f_0(\lambda,t),$$

откуда вытекает первое из соотношений (3.1). Кроме того, в силу последнего уравнения имеем

$$f_0(\lambda,t) = f_0(\lambda,0)\exp\left\{\frac{1}{2}(\lambda^2 - \hat{a}_0\hat{a}_1(z^{-1}-z))t - \frac{1}{2}\int\limits_0^t a_1^2(\tau)d\tau\right\},$$

стало быть, нули $\pm\mu_k(t)$ функции $f_0(\lambda,t)$ от t не зависят. Отсюда следует, что числа $z_k(t) = z(\mu_k(t))$ тоже не зависят от t: $z_k(t) = z_k(0) = z_k$.

Для получения динамики нормировок $M_k(t)$ рассмотрим собственную функцию $u^{(k)}(t) = \{u_n(\mu_k,t)\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n(\mu_k,t) = M_k(t)f_n(\mu_k,t)$, оператора L, соответствующую собственному значению μ_k. Так как собственные значения этого оператора простые, то

$$\dot{u}^{(k)}(t) - \mathcal{A}u^{(k)}(t) = Cu^{(k)}(t).$$

Умножив обе части последнего равенства скалярно в $\ell_2[1,\infty)$ на $u^{(k)}(t)$ и воспользовавшись тем, что $u^{(k)}(t)$ — нормированная собственная функция, $\mathcal{A}$ — кососимметрический оператор, получим $C = 0$. Следовательно, $Bu^{(k)}(t) = 0$.

С другой стороны, при $n \to \infty$

$$(Bu^{(k)}(t))_{2n+1-j} = \left\{\dot{M}_k(t) - \frac{1}{2}\hat{a}_0\hat{a}_1\big(z_k^{-1} - z_k\big)M_k(t)\right\}\left(\frac{\hat{a}_0 z + \hat{a}_1}{\lambda}\right)^{2-j} z^n\Big|_{\lambda=\mu_k} + o\big(z_k^n\big),$$

поэтому

$$\dot{M}_k(t) - \frac{1}{2}\hat{a}_0\hat{a}_1\big(z_k^{-1} - z_k\big)M_k(t) = 0,$$

откуда следует справедливость последних тождеств из (3.1). Теорема доказана.

Найденная временная динамика данных рассеяния позволяет найти решение задачи (1.1)–(1.3). Для этого нужно найти данные рассеяния при $t = 0$, затем построить функции $F_j(n,t)$ по формулам (2.15), в которых вместо $S(z,0)$, $M_k^2(0)$ надо использовать (3.1). Далее следует решить уравнения (2.1) с параметром t относительно $K_j(n,m,t)$ и найти $a_n(t)$ по любым из формул (2.5), (2.6) (при включении параметра t).

4. Обоснование МОЗР. Однозначная разрешимость задачи (1.1)–(1.3) при $N = 2$. Описанной в разд. 3 схеме построения решения задачи (1.1)–(1.3) предполагается, что такое решение существует. От последнего предположения можно избавиться, убедившись, что упомянутая схема действительно приводит к решению задачи (1.1)–(1.3).

Пусть выполняется условие $Q_3(0) < \infty$. Вначале докажем, что в этом случае функции $a_n(t) - \hat{a}_n$ и $\dot{a}_n(t)$ быстро убывают. С этой целью используем основные уравнения (2.15) (при включении параметра t). Заметим прежде всего, что в силу формул (2.14), (3.1) ядра $F_j(n,t)$ этих уравнений непрерывно дифференцируемы по t и

$$\dot{F}_j(n,t) = \hat{a}_0 \hat{a}_1 \{F_j(n-1,t) - F_j(n+1,t)\}, \quad j = 1, 2. \tag{4.1}$$

С другой стороны, при условии $Q_3(0) < \infty$ функция $S(z,0)$ дважды непрерывно дифференцируема на единичной окружности. Тогда, подставляя (3.1) в (2.14), делая замену $z = e^{i\xi}$, $-\pi \le \xi \le \pi$, и интегрируя по частям, найдем, что при любом $T > 0$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} |F_j(n,t)| \right\|_{C[0,T]} < \infty. \tag{4.2}$$

Кроме того, преобразуя разности $F_2(n+2p,t) - F_1(n,t)$, $p = 0,1$, с помощью (2.14), (3.1) и интегрируя дважды по частям, получаем, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} n |F_2(n+2p,t) - F_1(n,t)| \right\|_{C[0,T]} < \infty, \quad p = 0, 1. \tag{4.3}$$

В пространстве $\ell_1[1,\infty)$ определим операторы $\mathscr{F}_{j,n}(t)$, полагая

$$(\mathscr{F}_{j,n}(t)y)_m = \sum_{k=1}^{\infty} F_j(2n+m+k,t) y_k, \quad j = 1, 2,\ n \ge j-1.$$

Нормы этих операторов в пространстве $\ell_1[1,\infty)$ удовлетворяют оценкам

$$\|\mathscr{F}_{j,n}(t)\| \le \sum_{k=2n+2}^{\infty} |F_j(k,t)|. \tag{4.4}$$

Согласно (4.2) оператор $\mathscr{F}_{j,n}(t)$ непрерывен по норме на каждом конечном отрезке $[0,T]$. Кроме того, из (4.3) следует, что для любых $n, n \ge j-1$ и $j, j = 1,2$ оператор $I + \mathscr{F}_{j,n}(t)$ имеет при всех $t \in [0,T]$ ограниченный обратный. Так как оператор $I + \mathscr{F}_{j,n}(t)$ непрерывен по норме на $[0,T]$, обратный оператор $(I + \mathscr{F}_{j,n}(t))^{-1}$ также непрерывен (см. [16]) по норме на $[0,T]$ и, в частности, равномерно ограничен на $[0,T]$. Более того, этот обратный оператор ограничен в $\ell_1[1,\infty)$ по норме равномерно относительно $t \in [0,T]$ и $n \ge j-1$, $j = 1,2$. Действительно, в силу (4.2), (4.4) при $n > n_0$ имеем

$$\max_{0 \le t \le T} \|\mathscr{F}_{j,n}(t)\| \le \max_{0 \le t \le T} \sum_{k=2n+2}^{\infty} |F_j(r,t)| < \frac{1}{2},$$

откуда $\|(I + \mathscr{F}_{j,n}(t))^{-1}\| \le (1 - \|\mathscr{F}_{j,n}(t)\|)^{-1} < 2$ при $n > n_0$.

Остается конечное число операторов $(I + \mathscr{F}_{j,n}(t))^{-1}$, $j-1 \le n \le n_0$, $j = 1,2$, каждый из которых равномерно ограничен на $[0,T]$.

Далее, согласно (4.1), (4.3) оператор $I + \mathscr{F}_{j,n}(t)$ сильно непрерывно дифференцируем. Тогда (см. [16]) обратный оператор $(I + \mathscr{F}_{j,n}(t))^{-1}$ также сильно дифференцируем и верна формула

$$[(I + \mathscr{F}_{j,n}(t))^{-1}]'_t = -(I + \mathscr{F}_{j,n}(t))^{-1} [\mathscr{F}_{j,n}(t)]'_t (I + \mathscr{F}_{j,n}(t))^{-1}. \tag{4.5}$$

С другой стороны, при выполнении (4.3) уравнения (2.15) с параметром t для каждого $n \geq j-1$, $j = 1, 2$, однозначно разрешимы в $\ell_1[1, \infty)$. При этом решения $K_j(n, m, t)$, $j = 1, 2$, и согласно (4.5) их производные по t удовлетворяют неравенствам, аналогичным (2.19), (2.21). Поэтому если мы определим функцию $a_n = a_n(t)$ из равенств (2.5), т. е. по формулам

$$a_{2n-j}^2(t) = \hat{a}_j^2 + (-1)^j \hat{a}_0 \hat{a}_1 \{K_1(n-j, 1, t) - K_2(n, 1, t)\}, \quad j = 0, 1, \tag{4.6}$$

то функция $a_n(t) - \hat{a}_n$ и ее производная будут быстро убывающими.

Докажем, что определенная по формулам (4.6) функция $a_n(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) с учетом граничного условия (1.3). Для этого установим некоторые априорные соотношения.

Как отмечалось в предыдущем разделе, если $a_n(t)$ — решение задачи (1.1)–(1.3), то оператор $B = \frac{d}{dt} - \mathcal{A}$ переводит дифференцируемые по t решения уравнения $L\psi = \lambda\psi$ в решения этого же уравнения. Пусть теперь $a_n(t) - \hat{a}_n$, $\dot{a}_n(t)$ — быстро убывающие функции и оператор B преобразует дифференцируемое по t решение ψ уравнения $L\psi = \lambda\psi$ в какое-то решение того же уравнения. Тогда

$$(\dot{L} - \mathcal{A}L + L\mathcal{A})\psi = 0.$$

С другой стороны, при условии $Q_3(0) < \infty$ векторы $\{u_n(\lambda, t)\}_{n=1}^{\infty}$ для всех $\lambda \in \partial\Gamma$ и $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, \ldots, N_0$, в силу (2.4), (2.10), (2.12), (3.1) служат дифференцируемыми по t решениями уравнения $L\psi = \lambda\psi$. Поэтому если мы покажем, что при $\lambda \in \partial\Gamma$, $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, \ldots, N_0$, выполняется равенство

$$LB[u_n(\lambda, t)] = \lambda B[u_n(\lambda, t)], \tag{4.7}$$

то ввиду (2.11) получим соотношение (3.2), которое эквивалентно соотношениям (1.1), (1.3). Следует отметить, что справедливость равенств (4.7) при $n > 2$ можно доказать, как и в [10, 13], сводя эту задачу к проверке равенств $B[f_n(\lambda, t)] = \frac{1}{2}\hat{a}_0\hat{a}_1(z - z^{-1})f_n(\lambda, t)$. Однако для оператора B использованные в [10, 13] априорные соотношения никак не позволяют проверить справедливость последнего равенства при $n = 1$ и $n = 2$. Эта трудность преодолевается при помощи «эффективного переопределения» оператора B и некоторого априорного равенства, характерного для начально-краевой задачи (1.1)–(1.3).

Положим $a_{-1}(t) \equiv \hat{a}_0$, $a_0(t) \equiv \hat{a}_0$ и введем в рассмотрение семейство уравнений

$$a_{n-1}(t)y_{n-1} + a_n(t)y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \geq 0, \tag{4.8}$$

где коэффициенты $a_n(t)$ при $n \geq 1$ определяются из формул (4.6). Согласно (2.10) функции $u_n(\lambda, t)$ для всех $\lambda \in \partial\Gamma$ и $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, \ldots, N_0$, удовлетворяют (4.8) при $n \geq 1$, причем $u_0(\lambda, t) \equiv 0$. Полагая тогда $u_{-1}(\lambda, t) \equiv -u_1(\lambda, t)$, получим решение уравнения (4.8). Кроме того, как следует из [14, 15], формулы (2.4) вместе с

$$f_{-1}(\lambda, t) = \alpha_2(0, t)\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} K_2(0, m, t)z^m\right) \tag{4.9}$$

тоже определяют решение уравнения (4.8). Воспользовавшись (2.5) и равенством $\frac{\hat{a}_0}{\hat{a}_1} = \frac{\alpha_1(0,t)}{\alpha_2(0,t)}$, находим, что

$$\alpha_2(0, t) = \frac{\hat{a}_1}{\hat{a}_0}\alpha_2(1, t). \tag{4.10}$$

С другой стороны, из (2.9) со всей очевидностью вытекает, что

$$\frac{\varphi_{-1}(\lambda,t)}{\hat{a}_0 f_0(\lambda,t)} = \frac{\lambda}{\hat{a}_0\hat{a}_1(z^{-1}-z)}\{\overline{f_{-1}(\lambda,t)} - S(z(\lambda),t)f_{-1}(\lambda,t)\},$$

где $\varphi_{-1}(\lambda,t) \equiv -1$. Умножим обе части последнего тождества на z^m $(m \geq 1)$ и проведем интегрирование по λ вдоль $\partial\Gamma$. Пользуясь (2.4), (4.9), (4.10) и теоремой о вычетах, имеем

$$F_2(m,t) + K_2(0,m,t) + \sum_{r=1}^{\infty} K_2(0,r,t)F_2(r+m,t) = 0, \quad m \geq 2, \tag{4.11}$$

$$\frac{\hat{a}_0}{\hat{a}_1}\alpha_2^{-2}(1,t) + F_2(1,t) + K_2(0,1,t) + \sum_{r=1}^{\infty} K_2(0,r,t)F_2(r+1,t) = 0. \tag{4.12}$$

Рассмотрим теперь оператор $\widetilde{B}$, действующий по формулам

$$(\widetilde{B}y)_1 = (By)_1 - \frac{1}{2}\hat{a}_0^2(y_1 + y_{-1}), \quad (\widetilde{B}y)_2 = (By)_2 - \frac{1}{2}\hat{a}_0 a_1(t) y_0,$$

$$(\widetilde{B}y)_n = (By)_n, \quad n > 2.$$

Так как при $\lambda \in \partial\Gamma$, $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,\dots,N_0$, выполняются тождества $u_0(\lambda,t) \equiv 0$, $u_1(\lambda,t) + u_{-1}(\lambda,t) \equiv 0$, то $\widetilde{B}[u_n(\lambda,t)] = B[u_n(\lambda,t)]$, $n \geq 1$. Следовательно, уравнение (4.7) можно заменить эквивалентным уравнением $L\widetilde{B}[u_n(\lambda,t)] = \lambda\widetilde{B}[u_n(\lambda,t)]$. Последнее равенство заведомо выполняется, если $\widetilde{B}[f_n(\lambda,t)]$ удовлетворяет уравнению (2.1) с параметром t, где следует учесть, что $\widetilde{B}[f_0(\lambda,t)]$ доопределено формулой $\widetilde{B}[f_0(\lambda,t)] = \frac{1}{2}\hat{a}_0\hat{a}_1(z - z^{-1})f_0(\lambda,t)$. Так как $\widetilde{B}[f_n(\lambda,t)]$ имеет при $n \to \infty$ асимптотику

$$\widetilde{B}[f_{2n+1-j}(\lambda,t)] = \frac{1}{2}\hat{a}_0\hat{a}_1(z - z^{-1})\left(\frac{\hat{a}_0 z + \hat{a}_1}{\lambda}\right)^{2-j} z^n(1 + o(1)), \quad j = 1,2,$$

а уравнение (2.1) обладает единственным решением с такой асимптотикой, то получим

$$\widetilde{B}[f_n(\lambda,t)] = \frac{1}{2}\hat{a}_0\hat{a}_1(z - z^{-1})f_{\text{т}}(\lambda,t). \tag{4.13}$$

Таким образом, при выполнении условий $N = 2$ и $Q_3(0) < \infty$ функция $a_n(t)$, определенная формулами (4.6), удовлетворяет задаче (1.1)–(1.3), если уравнение (4.13) превращается в верное равенство.

Установим справедливость (4.13). Для этого нам понадобятся некоторые априорные равенства относительно величин $K_j(n,m,t)$ и $\alpha_j(n,t)$.

Лемма 1. *Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned}\dot{K}_j(n,m,t) &+ \hat{a}_0\hat{a}_1\{K_j(n,m+1,t) - K_j(n-1,m+1,t)\} \\ &+ \left\{\hat{a}_0^2 - a_{2(n+1-j)}^2(t) + \hat{a}_1^2 - a_{2n-1}^2(t)\right\}K_j(n,m,t) = 0, \quad j = 1,2,\ n \geq 1,\ m \geq 1,\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\dot{\alpha}_j(n,t) = \frac{1}{2}\left\{\hat{a}_0^2 - a_{2(n+1-j)}^2(t) + \hat{a}_1^2 - a_{2n-1}^2(t)\right\}\alpha_j(n,t), \quad j = 1,2,\ n \geq j, \tag{4.15}$$

$$\dot{\alpha}_2(1,t) = \frac{1}{2}\left\{\hat{a}_0^2 + \hat{a}_1^2 - a_1^2(t)\right\}\alpha_2(1,t). \tag{4.16}$$

Доказательство. Доказательство равенств (4.14), (4.15) ничем не отличается от доказательств соответствующих утверждений, установленных в [10]. Установим равенство (4.16). Дифференцируя соотношение (2.16) при $j = 2$ и $n = 1$, получаем

$$\dot{\alpha}_2(1,t) = -\frac{1}{2}\beta(n,t)\alpha_2^3(1,t),$$

где

$$\beta(n,t) = \dot{F}_2(2,t) + \sum_{m=1}^{\infty} K_2(1,m,t)\dot{F}_2(2+m,t) - \sum_{m=1}^{\infty} \dot{K}_2(1,m,t)F_2(2+m,t).$$

Используя (3.1), найдем, что

$$\begin{aligned}\beta(n,t) = \hat{a}_0\hat{a}_1 &\left\{F_2(1,t) + \sum_{m=1}^{\infty} K_2(0,m,t)F_2(1+m,t)\right\}\\ &- \hat{a}_0\hat{a}_1\left\{F_2(3,t) + \sum_{m=1}^{\infty} K_2(1,m,t)F_2(3+m,t)\right\}\\ + \hat{a}_0\hat{a}_1 \sum_{m=1}^{\infty} &\{K_2(1,m,t) - K_2(0,m,t)\}F_2(1+m,t) + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{K}_2(1,m,t)F_2(2+m,t).\end{aligned}$$

Из последнего равенства с учетом (4.12) получим

$$\begin{aligned}\beta(n,t) &= -\hat{a}_0^2\alpha_2^{-2}(1,t) + \hat{a}_0\hat{a}_1\{K_2(1,1,t) - K_2(0,1,t)\}(1+F_2(2,t))\\ &+ \hat{a}_0\hat{a}_1\{K_2(1,m+1,t) - K_2(0,m+1,t)\}F_2(2+m,t) + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{K}_2(1,m,t)F_2(2+m,t).\end{aligned}$$

Воспользовавшись (2.16), (4.14) и равенствами

$$\hat{a}_0\hat{a}_1\{K_2(1,1,t) - K_2(0,1,t)\} = a_0^2(t) - \hat{a}_0^2 + a_1^2(t) - \hat{a}_1^2, \quad a_0(t) \equiv \hat{a}_0,$$

имеем

$$\beta(n,t) = \left\{a_1^2(t) - \hat{a}_0^2 - \hat{a}_1^2\right\}\alpha_2^{-2}(1,t),$$

откуда вытекает (4.16). Лемма доказана.

Мы теперь подготовлены к тому, чтобы доказать (4.13). Подставляя в (4.13) вместо $f_n(\lambda,t)$ его представления (2.4), (4.9) и принимая во внимание (4.15), (4.16), найдем, что соотношение (4.13) эквивалентно следующим равенствам:

$$\begin{aligned}&\dot{K}_j(n,m,t) + \frac{1}{2}\hat{a}_0\hat{a}_1\{K_j(n,m+1,t) - K_j(n-1,m+1,t)\}\\ &\quad + \frac{1}{2}\{\hat{a}_0^2 - a_{2(n+1-j)}^2(t) + \hat{a}_1^2 - a_{2n-1}^2(t)\}K_j(n,m,t) = \frac{1}{2}\hat{a}_0\hat{a}_1 K_j(n,m-1,t)\\ &\quad - \frac{1}{2}(\hat{a}_0\hat{a}_1)^{-1}a_{2n}^2(t)a_{2(n-j)+3}^2(t)K_j(n+1,m-1,t), \quad n \ge 1,\ m \ge 1,\ j = 1,2,\end{aligned}$$

где $K_j(n,0,t)$ доопределена формулой $K_j(n,0,t) = 1$. В силу (4.14) последние равенства, в свою очередь, эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned}&\hat{a}_0\hat{a}_1\{K_j(n,m+1,t) - K_j(n-1,m+1,t)\}\\ &\qquad + \left\{\hat{a}_0^2 - a_{2(n+1-j)}^2(t) + \hat{a}_1^2 - a_{2n-1}^2(t)\right\}K_j(n,m,t)\\ &= (\hat{a}_0\hat{a}_1)^{-1}a_{2n}^2(t)a_{2(n-j)+3}^2(t)K_j(n+1,m-1,t) - \hat{a}_0\hat{a}_1 K_j(n,m-1,t), \quad j = 1,2,\end{aligned}$$

которые являются очевидными следствиями тождеств (2.7), (2.8) при включении значения $n = 0$ для (2.7). Следовательно, справедливо равенство (4.13). Последнее влечет за собой существование быстро убывающего решения задачи (1.1)–(1.3) при $N = 2$. Из однозначной разрешимости обратной задачи, изложенной в разд. 2, вытекает единственность этого решения. Тем самым доказана

Теорема 2. *При условиях $N = 2$ и $Q_3(0) < \infty$ задача* (1.1)–(1.3) *имеет в классе* (1.4) *единственное решение.*

Замечание 1. В случае $\hat{a}_0 = \hat{a}_1$ доказанная теорема обеспечивает однозначную разрешимость задачи (1.1)–(1.3) при $N = 1$ в классе быстро убывающих функций.

5. Случай $N > 2$. Исследование существования решения. В предыдущем разделе мы установили однозначную разрешимость задачи (1.1)–(1.3) в классе (1.4) в том случае, когда $N \le 2$. Оказывается, что в общем случае разрешимость этой задачи тесно связана с наименьшим периодом последовательности $\hat{a}_n$.

Теорема 3. *Задача* (1.1)–(1.3) *не имеет в классе* (1.4) *решений, если число $N > 2$ является наименьшим периодом последовательности $\hat{a}_n$.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть число 2 не является периодом последовательности $\hat{a}_n$ и задача (1.1)–(1.3) имеет в классе (1.4) решение $a_n(t)$. Положим

$$c_{j,n} = a_{nN+j-1}(t), \quad j = 1, \dots, N, \ n = 0, 1, \dots . \tag{5.1}$$

Тогда из уравнения (1.1) вытекает, что функции $c_{j,n}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{c}_{1,n} = c_{1,n}(c_{N,n-1} - c_{2,n}), \\ \dot{c}_{j,n} = c_{j,n}(c_{j-1,n} - c_{j+1,n}), \qquad j = 2, \dots, N-1. \\ \dot{c}_{N,n} = c_{N,n}(c_{N-1,n} - c_{1,n+1}), \end{cases} \tag{5.2}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$a_{n-1}(t) y_{n-1} + a_n(t) y_{n+1} = \lambda y_n, \ n = 1, 2, \dots, \quad a_0(t) = \hat{a}_0, \tag{5.3}$$

где $a_n(t)$, $n \ge 1$, служит быстро убывающим решением задачи (1.1)–(1.3). Как показано в [17], уравнение (5.3) имеет решение $f_n = f_n(\lambda, t)$, представимое в виде

$$\begin{aligned} f_{nN+j-1} &= \alpha_{nN+j-1} z_0^n(\lambda) \\ &\times \Bigg(e_j(\lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} \big\{ A_{nm}^{j1} e_1(\lambda) + \dots + A_{nm}^{jj} e_j(\lambda) + A_{nm}^{j,j+1} e_{j+1}(\lambda) z_0^{-1}(\lambda) + \dots \\ &\qquad + A_{nm}^{jN} e_N(\lambda) z_0^{-1}(\lambda) \big\} z_0^m(\lambda) \Bigg), \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{5.4}$$

где $\psi_{nN+j-1} = e_j(\lambda) z_0^n(\lambda)$, $j = 1, \dots, N$, — решение Флоке уравнения (5.3), а величины A_{nm}^{jr} зависят от t и $A_{nm}^{jr} = o(1)$ при $n + m \to \infty$.

Подставляя решение (5.4) в уравнение (5.3) и приравнивая коэффициенты при $e_j(\lambda) z_0^m(\lambda)$ (см. [17]), с учетом (5.1) получаем, что

$$\begin{gathered} \frac{c_{1,n}}{\hat{a}_0} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 A_{n1}^{13} - \hat{a}_{N-1} A_{n-1,1}^{N2}, \\ \frac{c_{j,n}}{\hat{a}_{j-1}} = \hat{a}_{j-1} + \hat{a}_j A_{n1}^{j,j+2} - \hat{a}_{j-2} A_{n1}^{j-1,j+1}, \quad j = 2, \dots, N-1, \\ \frac{c_{N,n}}{\hat{a}_{N-1}} = \hat{a}_{N-1} + \hat{a}_0 A_{n1}^{N2} - \hat{a}_{N-2} A_{n1}^{N-1,1}. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Заметим, что одна из пар $\{\hat{a}_0, \hat{a}_{N-2}\}$, $\{\hat{a}_1, \hat{a}_{N-1}\}$, $\{\hat{a}_j, \hat{a}_{j+2}\}$, $j = 0, \ldots, N-3$, обязательно содержит два различных числа, так как число 2 не является периодом последовательности $\hat{a}_n$. Пусть, например, $\hat{a}_1 \neq \hat{a}_{N-1}$. Воспользовавшись равенствами (5.5), получим

$$\hat{a}_0\hat{a}_{N-1}A^{N2}_{n-1,1} = \sum_{k=n}^{\infty}\bigl\{\bigl(\hat{a}_0^2 - c_{1,k}\bigr) + \bigl(\hat{a}_1^2 - c_{2,k}\bigr) + \cdots + \bigl(\hat{a}_{N-1}^2 - c_{N,k}\bigr)\bigr\},$$

$$\hat{a}_0\hat{a}_1A^{13}_{n1} = \sum_{k=n}^{\infty}\bigl\{\bigl(\hat{a}_0^2 - c_{1,k+1}\bigr) + \bigl(\hat{a}_1^2 - c_{2,k}\bigr) + \cdots + \bigl(\hat{a}_{N-1}^2 - c_{N,k}\bigr)\bigr\}.$$

Из (5.1), (5.2) и последних равенств вытекает, что функции $A^{N2}_{n-1,1}$, A^{13}_{n1} дифференцируемы по t и

$$\hat{a}_0\hat{a}_{N-1}\dot{A}^{N2}_{n-1,1} = \hat{a}_0^2\hat{a}_{N-1}^2 - c_{1,n}c_{N,n-1}, \quad \hat{a}_0\hat{a}_1\dot{A}^{13}_{n1} = \hat{a}_0^2\hat{a}_1^2 - c_{1,n}c_{2,n}.$$

Отсюда и из первого тождества соотношений (5.5) следует, что

$$\dot{c}_{1,n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

где мы учли (5.1).

С другой стороны, в силу (5.1), (5.2) имеем

$$\dot{c}_{1,n} \to \hat{a}_0^2(\hat{a}_{N-1}^2 - \hat{a}_1^2) \neq 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания, которые способствовали улучшению содержания статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
2. *Flashka H.* On the Toda lattice. Inverse scattering solutions // Progr. Theor. Phys. 1974. V. 51, N 3. P. 703–716.
3. *Kac M., van Moerbeke P.* On the explicitly soluble system of nonlinear differential equation related to certain Toda lattices // Adv. Math. 1975. V. 16, N 2. P. 160–169.
4. *Березанский Ю. М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР. 1985. Т. 281, № 1. С. 16–19.
5. *Новокшенов В. Ю., Хабибуллин И. Т.* Нелинейные дифференциально-разностные схемы, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния. Асимптотика решения при $t \to \infty$ // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 3. С. 543–547.
6. *Веселов А. П.* Интегрирования стационарной задачи для классической цепочки // Теор. и мат. физика. 1987. Т. 71, № 1. С. 154–159.
7. *Юрко В. А.* Об интегрировании нелинейных динамических систем методом обратной спектральной задачи // Мат. заметки. 1995. Т. 57, № 6. С. 945–949.
8. *Teshl G.* Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. (Math. Surv. Monogr.; V. 72).
9. *Верещагин В. Л.* Асимптотическое разложение решения задачи Коши для цепочки Вольтерра со ступенеобразным начальным условием // Теор. и мат. физика. 1997. Т. 111, № 3. С. 335–344.
10. *Ханмамедов Аг. Х.* Метод интегрирования задачи Коши для ленгмюровской цепочки с расходящимся начальным условием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 9. С. 1639–1650.
11. *Egorova I., Michor J., Teschl G.* Inverse scattering transform for the Toda hierarchy with quasi-periodic background // Proc. Amer. Math. Soc. 2007. V. 135, N 6. P. 1817–1827.

12. *Уразбоев Г. У.* Цепочка Тоды со специальным самосогласованным источником // Теор. и мат. физика. 2008. Т. 154, № 2. С. 305–315.
13. *Ханмамедов Аг. Х.* О быстро убывающем решении задачи Коши для цепочки Тоды // Теор. и мат. физика. 2005. Т. 142, № 1. С. 5–12.
14. *Khanmamedov Ag. Kh.* Triangular representations of the solution of a difference equations system // Trans. of AS of Azerb. ser. phys. - techn. and math. sci. 2001. V. 21, N 1. P. 104–109.
15. *Ханмамедов Аг. Х.* Обратная задача рассеяния для разностных уравнений на полуоси // Докл. НАН Азерб. 2000. № 4–6. С. 19–25.
16. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
17. *Ханмамедов Аг. Х.* Прямая и обратная задачи рассеяния для возмущенного разностного уравнения Хилла // Мат. сб. 2005. Т. 196, № 10. С. 137–160.

Статья поступила 14 декабря 2007 г., окончательный вариант — 19 ноября 2009 г.

Ханмамедов Агил Ханмамед оглы
Бакинский гос. университет, факультет прикладной математики и кибернетики,
ул. З. Халилова, 23, Баку AZ 1148, Азербайджан
agil_khanmamedov@yahoo.com