Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 517.986.7

ПРЕПЯТСТВИЯ К РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ C_0–ПОЛУГРУППЫ

К. В. Сторожук

Аннотация. Пусть $T_t : X \to X$ — C_0-полугруппа с генератором A. Доказано, что если абсцисса равномерной ограниченности резольвенты $s_0(A)$ неотрицательна, то для каждой неубывающей функции $h(s) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ найдутся $x' \in X'$ и $x \in X$ такие, что $\int\limits_0^\infty h(|\langle x', T_t x\rangle|)\, dt = \infty$. Если $i\mathbb{R} \cap \mathrm{Sp}(A) \neq \varnothing$, то соответствующий x можно выбрать в $D(A^\infty)$.

Ключевые слова: экспоненциально устойчивая полугруппа линейных операторов.

1. Введение и предварительные результаты

Пусть X — банахово пространство. C_0-полугруппа $T_t : X \to X$ называется *равномерно экспоненциально устойчивой* (РЭУ), если $\|T_t x\|$ убывает экспоненциально по t для каждого $x \in X$. С помощью принципа равномерной ограниченности (ПРО) нетрудно показать, что это условие равносильно тому, что $\|T_t\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

В конечномерном случае эти условия эквивалентны убыванию $\|T_t x\|$ к нулю при $t \to \infty$ для каждого $x \in X$. Стандартный бесконечномерный контрпример — полугруппа сдвигов на $L_2(\mathbb{R}_+)$. Здесь $\|T_t\| \equiv 1$, но $\|T_t x\| \to 0$ для всех x. Однако отсутствие РЭУ у полугруппы влечет существование векторов, орбиты которых если и уходят в нуль, то «очень медленно». Упомянем в этой связи статьи [1, 2], в которых, в частности, показано, что если спектральный радиус оператора T равен 1, то для каждой последовательности $1 > \alpha_n \to 0$ найдется $x \in X$ такой, что $\|T^n x\| > \alpha_n$ для всех n.

Для C_0-полугрупп приведем типичный результат, показывающий отсутствие оценки сверху на скорость убывания «в интегральном смысле».

Теорема 0. *Предположим, что* $\forall t \geq 0$ $\|T_t\| \geq 1$. *Тогда для каждой неубывающей функции* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *(«хорошей» функции) существует* $x \in X$ *такой, что* $\int\limits_0^\infty h(\|T_t x\|)\, dt = \infty$. *Более того, если полугруппа* T_t *неограниченная, то для некоторых* $x \in X$ *будет* $\|T_t x\| > 1$ *для* t *из множества бесконечной меры.*

Аналогичные результаты справедливы и в более общей ситуации семейства эволюционных операторов $U(t, s)U(s, r) = U(t, r) : X \to X$. Существуют разные доказательства подобных теорем, восходящих к [3–5]. В коротком доказательстве первая часть принадлежит автору [6], вторая часть аналогична началу доказательства теоремы 3.2.2 в [7]. Мы приводим это доказательство, во-первых, из-за его краткости, а во-вторых, потому, что будем сравнивать с ним другие рассуждения.

Доказательство теоремы 0. Для ограниченной C_0-полугруппы справедлива следующая «оценка назад»:

$$\text{пусть } C = \sup_{t>0}\{\|T_t\|\}, \text{ тогда } \forall t_0\ \forall t \in [0, t_0]\ \forall x \in X\ \|T_t x\| \geq \frac{\|T_{t_0}x\|}{C}. \qquad (*)$$

Пусть числа $\alpha_n \to 0$ убывают так медленно, что $n \cdot h(\alpha_n) \to \infty$. Имеем $\lim \frac{\|T_n\|}{\alpha_n} = \infty$. Используя ПРО, найдем $x \in X$ такой, что $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\|T_n x\|}{\alpha_n} \geq C$. Тогда

$$\int_0^\infty h(\|T_t x\|)\,dt = \sup_n \int_0^n h(\|T_t x\|)\,dt \overset{(*)}{\geq} \sup_n \int_0^n h\left(\frac{\|T_n x\|}{C}\right) dt \geq \sup_n n \cdot h(\alpha_n) = \infty.$$

Пусть теперь C_0-полугруппа T_t неограниченна. Тогда справедлив более слабый аналог формулы $(*)$ — «оценка назад на конечное время». Например,

$$\text{пусть } C = \sup_{t\in[0,1]}\{\|T_t\|\}, \text{ тогда } \forall t_0\ \forall t \in [t_0 - 1, t_0]\ \forall x \in X \quad \|T_t x\| \geq \frac{\|T_{t_0}x\|}{C}. \ (**)$$

Оценка $(**)$ хуже оценки $(*)$. Зато согласно ПРО для неограниченной полугруппы найдется $x \in X$, орбита которого $T_t x$ не стремится к нулю. Пусть $\|T_{n_k}x\| > C$, $n_k \to \infty$. Из $(**)$ следует, что $\|T_t x\| > 1$ при $t \in \bigcup_{k=1}^\infty [n_k - 1, n_k]$. □

Вопросы, касающиеся плохого приближения орбит к нулю в слабой топологии пространства X, впервые появились и стали обсуждаться в [8–10]. Обзор этой темы можно найти в [7]. Вопрос, аналогичный заключению теоремы 0 для слабой топологии, таков: при каких предположениях о полугруппе можно утверждать, что для каждой «хорошей» функции h

$$\exists x \in X,\ x' \in X' \quad \int_0^\infty h(|\langle x', T_t x\rangle|)\,dt = \infty. \qquad (1)$$

Одного только отсутствия РЭУ здесь недостаточно, как показывает пример (см. [11; 12, пример 1.5]) полугруппы сдвигов на $L^1(\mathbb{R}_+, e^t\,dt) \cap L^p(\mathbb{R}_+)$. Эта полугруппа не РЭУ, но слабо L^1-устойчива, т. е.

$$\forall x \in X,\ x' \in X' \quad \int_0^\infty |\langle x', T_t x\rangle|\,dt < \infty.$$

Геометрически пример выглядит довольно неожиданным: некоторые орбиты «далеки» от нуля; в то же время орбита каждого вектора x проводит почти все время «сколь угодно близко» к каждой гиперплоскости $(\ker x')$!

Известно, что заключение (1) имеет место, например, для ограниченных C_0-полугрупп, если потребовать отсутствие не только равномерной экспоненциальной устойчивости, но и просто экспоненциальной устойчивости (см. начало следующего пункта и предложение 1).

Основной результат настоящей статьи (теорема 1) — получение оценок, из которых, в частности, следует, что условие ограниченности полугруппы в предложении 1 несущественно.

В следующем пункте мы опишем и кратко обсудим асимптотические характеристики полугруппы, необходимые для точной формулировки результатов, и сформулируем результаты. П. 3 статьи — доказательство основного результата. В п. 4 мы доказываем, что при естественных предположениях вектор x в формуле (1) может быть выбран среди «гладких» векторов.

2. Асимптотические параметры полугруппы и основные результаты

Показателем равномерного роста полугруппы $T_t : X \to X$ называется число

$$\omega_0(T) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|T_t\|}{t} = \sup\left\{ \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln \|T_t x\|}{t} \mid x \in X \right\}.$$

Пусть A — генератор полугруппы, $D(A)$ — область определения A. *Показателем роста полугруппы* называется число

$$\omega_1(T) = \sup\left\{ \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln \|T_t x\|}{t} \mid x \in D(A) \right\}.$$

Поясним неформально, что такое ω_0 и ω_1. Рассмотрим абстрактную задачу Коши $\frac{dz}{dt} = Az$, $z(0) = x \in X$. Отображение $z(t) = T_t x$ называют *слабым решением* (mild solution) этой задачи. При этом если начальные данные x принадлежат $D(A)$, то соответствующее отображение естественно называть *классическим*, или *гладким*, *решением*, а соответствующие начальные данные — *гладкими векторами*. Таким образом, числа ω_0 и ω_1 характеризуют рост слабых и соответственно гладких решений абстрактной задачи Коши, соответствующей полугруппе.

Ясно, что $\omega_1 \le \omega_0$. Легко видеть, что полугруппа РЭУ тогда и только тогда, когда $\omega_0(T) < 0$. Если $\omega_1(T) < 0$, то полугруппа называется просто *экспоненциально устойчивой* (ЭУ).

Для полугруппы сдвигов на $L^1(\mathbb{R}_+, e^t\,dt) \cap L^p(\mathbb{R}_+)$, упомянутой в конце введения, $\omega_1 < 0 = \omega_0$, поэтому она хоть и не РЭУ, но все же ЭУ.

Теорему 0 можно «спасти» и для слабой топологии, если, например, потребовать, чтобы полугруппа была не только не РЭУ, но даже не ЭУ.

Предложение 1 (см. [7, теоремы 4.6.3(i), 4.6.4)]). *Если ограниченная C_0-полугруппа $T_t : X \to X$ не является экспоненциально устойчивой, то выполнены следующие утверждения:*

(1) *для каждой «хорошей» функции $h > 0$ существуют $x \in X$ и $x' \in X'$ такие, что* $\int_0^\infty h(|\langle x', T_t x\rangle|)\,dt = \infty$;

(2) *существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $m > 0$ найдутся единичные $x \in X$ и $x' \in X'$ такие, что* $m < \operatorname{mes}\{t \mid |\langle x', T_t x\rangle| \ge \varepsilon\}$.

Чтобы сформулировать основные результаты статьи и с помощью них усилить предложение 1, опишем еще две спектральные характеристики, между которыми «зажат» рост ω_1 полугруппы. Это правая граница $s(A)$ спектра A и абсцисса равномерной ограниченности $s_0(A)$ резольвенты A. Вообще, имеют место неравенства $\begin{array}{ccc} \omega_1 & \leftarrow & \omega_0 \\ \downarrow & \nwarrow & \downarrow \\ s & \leftarrow & s_0 \end{array}$ (здесь «$\leftarrow$» означает «$\le$»).

Если пространство X гильбертово, то $s_0 = \omega_0$ [13]. Для положительных полугрупп $s = \omega_1 = s_0$; более того, s достигается на некотором элементе спектра $\mathrm{Sp}(A)$, т. е. существует $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Re}(\lambda) = s$ [11, 14, 15].

В то же время для каждой стрелки существует пример, в котором соответствующее неравенство строгое. Исторически первый пример Фойаша [16], в котором $-2 = s < s_0 = \omega_0 = 0$, известен относительно мало. В основе большинства других подобных примеров лежит пример Зябчика [17]. (Заметим, что сам Зябчик ссылается на Фойаша в тексте работы [17].) В примере Зябчика $s < \omega_1 = \omega_0$, s достигается и $\|T_t\| = e^{t\omega_0}$. Эти и другие примеры можно найти в [14] и [7].

Оказывается, заключение предложения 1 справедливо и для неограниченных полугрупп, а условие «не ЭУ» ($\omega_1(T) \geq 0$) можно заменить более слабым условием «$s_0(A) \geq 0$». Это следует из нашего основного результата.

Теорема 1. *Пусть A — генератор C_0-полугруппы $T_t : X \to X$ и $s_0(A) \geq 0$. Для любых двух последовательностей $0 < m_1 < m_2 < \cdots$ и $\gamma_k > 0$, $\gamma_k \to 0$, найдутся $x' \in X'$, $x \in X$ и семейство множеств $U_k \subset \mathbb{R}_+$ таких, что*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \mu(U_k) \geq m_k,\ \forall t \in U_k\ |\langle x', T_t x\rangle| > \gamma_k.$$

Чтобы из теоремы 1 вывести предложение 1, достаточно для функции h подобрать числа m_k растущими столь быстро, что $m_k \cdot h(\gamma_k) \to \infty$. Тогда интеграл в предложении 1 расходится (ср. с доказательством теоремы 0).

Замечание. Фактически доказательство теоремы 4.6.3 в [7] использует как раз s_0 вместо ω_1. Однако предположение ограниченности полугруппы там существенно (доказательство в [7] основано на технике перестановочно инвариантных функциональных пространств). Наше доказательство теоремы 1 потребует несколько как идейных, так и технических приемов, которые были бы излишними в предположении ограниченности полугруппы.

3. Доказательство теоремы 1

В основе доказательства теоремы 1 лежит следующая

Лемма 1. *Пусть $s_0(A) = 0$. Тогда для любых $\delta > 0$ и $t_0 < \infty$ найдутся $\beta = \beta(\delta, t_0) \in \mathbb{R}$ и $y \in D(A)$ такие, что $\|y\| = 1$, $\|Ay\| \approx |\beta|$ и $\|T_t y - e^{i\beta t} y\| < \delta$ для всех $t \in [0, t_0]$. Более того, такой y можно выбрать в $D(A^\infty) = \bigcap_n D(A^n)$.*

Замечание. Геометрически лемма 1 означает, что существует вектор y, долгое время не отходящий от (комплексной) прямой $\mathbb{C}y$ (этот вектор «крутится» с угловой скоростью β в соответствующей вещественной плоскости). В то же время заключение (2) предложения 1 означает всего лишь, что существует вектор, долгое время не приближающийся к гиперплоскости $\ker x'$. Таким образом, ясно, что это заключение (доказанное, кстати, в [7] с использованием заключения (1)) следует уже из леммы 1.

Доказательство леммы 1. Заметим, что если A — генератор полугруппы T_t, то

$$\forall x \in D(A)\ \forall t > 0, \beta \in \mathbb{R} \quad \|T_t x - e^{i\beta t} x\| \leq t \cdot \sup_{s \in [0,t]} \|T_s\| \cdot \|(A - i\beta)x\|. \qquad (2)$$

В самом деле, оператор $(A - i\beta)$ служит генератором полугруппы $e^{-i\beta t} T_t$, поэтому $\|T_t x - e^{i\beta t} x\| = \|e^{-i\beta t} T_t x - x\| \leq \int_0^t \|T_s (A - i\beta)x\|\, ds$ и т. д.

Поскольку $s_0(A) = 0$, резольвента $(A-\lambda)^{-1}$ оператора A не ограничена вблизи мнимой оси. Выберем $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n \in \mathbb{C}$, $\alpha_n \to 0$, $\|(\lambda_n - A)^{-1}\| \to \infty$. Найдутся векторы $y_n \in D(A)$ такие, что $\|y_n\| = 1$, но $(A-\lambda_n)y_n \to 0$. В частности, $(A-i\beta_n)y_n \to 0$. Возьмем такое большое n, что $\|(A-i\beta_n)y_n\| < \frac{\delta}{t_0 \cdot \sup\limits_{s\in[0,t]} \|T_s\|}$. Множество $D(A^\infty)$ плотно в $D(A)$ в норме графика [14, 1.9(iii)], поэтому вектор $y = y_n$ можно выбрать и в $D(A^\infty)$. Осталось применить формулы (2). $\square$

Доказательство теоремы 1. Ясно, что если найдутся $x' \in X'$, $x \in X$ и $\delta > 0$ такие, что $\mathrm{mes}\{t > 0 \mid |\langle x', T_t x\rangle| > \delta\} = \infty$, то доказывать нечего. Поэтому можно, в частности, предполагать с самого начала, что

$$\forall x \in D(A^\infty)\ \forall x' \in X'\ \forall \delta > 0 \quad \mathrm{mes}\{t > 0 \mid |\langle x', T_t x\rangle| > \delta\} < \infty. \tag{3}$$

Предположим, что X сепарабельно, это позволит нам использовать секвенциальную компактность X' в $*$-слабой топологии. Общность это также не ограничивает: нетрудно заметить, что в общем случае можно применить теорему 1 к подходящему сепарабельному подпространству $X_s \subset X$, инвариантному относительно действия полугруппы, а потом продлить соответствующий функционал $x'_s \in (X_s)'$ до функционала x' на всем X.

Заметим наконец, что теорему достаточно доказать хотя бы для одной фиксированной последовательности $\gamma'_k \to 0$. (Поясним, почему и это не ограничивает общности. Пусть дана произвольная последовательность m_k и $\gamma_k \to 0$. Можно предполагать, что $\gamma_k < \gamma'_1$ для всех k. Положим $n(k) = \max\{n \mid \gamma_n \geq \gamma'_k\}$ и $m'_k = m_1 + \dots + m_{n(k)}$. Легко видеть, что x, x', удовлетворяющие теореме 1 для m'_k и γ'_k, будут удовлетворять теореме 1 и для исходных m_k, γ_k.)

Будем доказывать теорему для последовательности $\gamma_k = \frac{5}{10^{2^k - 1}}$.

Следуя лемме 1, выберем последовательность чисел β_n и векторов $y_n \in D^\infty(A)$ таких, что $\|y_n\| = 1$ и $\|T_t y_n - e^{i\beta_n t} y_n\| \leq \frac{1}{10}$ для всех $t \in [0, n]$.

Для каждого y_n выберем какой-нибудь двойственный функционал $y'_n \in X'$, $\|y'_n\| = \langle y'_n, y_n\rangle = 1$. Последовательность y'_n содержит подпоследовательность, $*$-слабо сходящуюся к некоторому $y' \in X'$. Можно сразу считать, что $y'_n \xrightarrow{\sigma^*} y'$. Легко видеть, что

$$\forall t \in [0, n] \quad \frac{9}{10} < \|T_t y_n\| < \frac{11}{10},\ \frac{9}{10} < |\langle y'_n, T_t y_n\rangle| < \frac{11}{10}. \tag{4}$$

Построим x и x' как пределы x_k и x'_k, $x_k = \sum\limits_{l=1}^{k} \frac{\pm y_{n_l}}{10^{2^{l-1}-1}}$, $x'_k = \sum\limits_{l=1}^{k} \frac{\pm y'_{n_l}}{10^{2^{l-1}-1}}$, где номера n_l и знаки $\pm$ предстоит найти.

Построение вектора x_1. Пусть $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq m_1$. Положим $U_1 = [0, n_1]$ и возьмем $x'_1 := y'_{n_1}$, $x_1 := y_{n_1}$. Тогда

$$\forall t \in U_1 \quad |\langle x'_1, T_t x_1\rangle| > \frac{9}{10}. \tag{5}$$

Построение вектора x_2. Предположение, выражаемое формулой (3), позволяет выбрать достаточно большое, но компактное множество $\widetilde{U}_2$ такое, что $\mu(\widetilde{U}_2) \geq 4m_2$ и

$$\forall t \in \widetilde{U}_2 \quad |\langle y', T_t x_1\rangle| < 1. \tag{6}$$

Выберем номер $n_2 \geq n_1$ настолько большой, что $\widetilde{U}_2 \subset [0, n_2]$.

Положим $x_2 = x_1 \pm \frac{y_{n_2}}{10}$, $x_2' = x_1' \pm \frac{y_{n_2}'}{10}$. Какую пару знаков $\pm$ из четырех возможных пар выбрать, мы решим позже. Пока наша задача — показать, что

$$\forall t \in U_1 \quad |\langle x_2', T_t x_2\rangle| > \frac{9}{10} - \frac{3}{10}. \tag{7}$$

Имеем $\langle x_2', T_t x_2\rangle = \langle x_1', T_t x_1\rangle \pm \big\langle x_1', \frac{T_t y_{n_2}}{10}\big\rangle \pm \big\langle \frac{y_{n_2}'}{10}, T_t x_2\big\rangle$ для всех t. Поэтому

$$|\langle x_2', T_t x_2\rangle| \ge |\langle x_1', T_t x_1\rangle| - \frac{S_1(t)}{10}, \quad S_1(t) = (|\langle x_1', T_t y_{n_2}\rangle| + |\langle y_{n_2}', T_t x_2\rangle|). \tag{8}$$

Если $t \in U_1$, то $S_1(t) < 3$. В самом деле, если $t \in U_1$, то $|\langle x_1', T_t y_{n_2}\rangle| \le \|T_t y_{n_2}\| \le \frac{11}{10}$ и $|\langle y_{n_2}', T_t x_2\rangle| \le \|T_t x_2\| = \big\|T_t\big(y_1 \pm \frac{y_{n_2}}{10}\big)\big\| \le \frac{11}{10} + \frac{11}{10^2}$. Вспоминая (5), получаем (7).

При $t \notin U_1$ формула (8) бесполезна для оценки снизу числа $|\langle x_2', T_t x_2\rangle|$, хотя бы потому, что мы не можем оценить снизу уменьшаемое $|\langle x_1', T_t x_1\rangle|$. Поэтому воспользуемся другим приемом (назовем этот прием «выбор из четырех»). Заметим, что $2\frac{y_{n_2}'}{10} = \big(x_1' + \frac{y_{n_2}'}{10}\big) - \big(x_1' - \frac{y_{n_2}'}{10}\big)$ и аналогично $2\frac{y_{n_2}}{10} = \big(x_1 + \frac{y_{n_2}}{10}\big) - \big(x_1 - \frac{y_{n_2}}{10}\big)$. Значит,

$$\forall t \quad 4\left|\left\langle \frac{y_{n_2}'}{10}, T_t\frac{y_{n_2}}{10}\right\rangle\right| \le \sum_{\pm\in\{+,-\}} \left|\left\langle \left(x_1' \pm \frac{y_{n_2}'}{10}\right), T_t\left(x_1 \pm \frac{y_{n_2}}{10}\right)\right\rangle\right|,$$

и для каждого $t \in \widetilde{U}_2$ по крайней мере одно из четырех слагаемых правой части не меньше числа $\frac{1}{10^2}|\langle y_{n_2}', T_t y_{n_2}\rangle|$. В то же время согласно (4) для всех $t \in \widetilde{U}_2 \subset [0, n_2]$ имеем $|\langle y_{n_2}', T_t y_{n_2}\rangle| > \frac{9}{10}$. Поэтому можно выбрать подмножество $U_2 \subset \widetilde{U}_2$ такое, что $\mu(U_2) \ge \frac{1}{4}\mu(\widetilde{U}_2) \ge m_2$, и некоторую пару знаков $\pm$ (пусть для определенности это будет «++») так, что будет выполнено

$$\forall t \in U_2 \quad \left|\left\langle \left(x_1' + \frac{y_{n_2}'}{10}\right), T_t\left(x_1 + \frac{y_{n_2}}{10}\right)\right\rangle\right| = |\langle x_2', T_t x_2\rangle| > \frac{9}{10^3}. \tag{9}$$

Построение вектора x_3. Пусть компактное множество $\widetilde{U}_3$ таково, что $\mu(\widetilde{U}_3) \ge 4m_3$, $\forall t \in \widetilde{U}_3$ $|\langle y', T_t x_2\rangle| < 1$. Вернемся на время к множеству U_2. Из формулы (6), компактности множества $\{T_t x \mid t \in \widetilde{U}_2\} \subset X$ и того, что $y_n' \xrightarrow{\sigma^*} y'$, следует, что

$$\exists n_3 \ge n_2 \mid \widetilde{U}_3 \subset [0, n_3], \ \forall n \ge n_3 \ \forall t \in U_2 \quad |\langle y_n', T_t x_1\rangle| < 1. \tag{10}$$

Положим $x_3 = x_2 \pm \frac{y_{n_3}}{10^3}$, $x_3' = x_2' \pm \frac{y_{n_3}'}{10^3}$. Пару знаков $\pm$ выберем позже, а пока, рассуждая так же, как при выводе неравенства (8), получаем

$$\forall t \quad |\langle x_3', T_t x_3\rangle| \ge |\langle x_2', T_t x_2\rangle| - \frac{S_2(t)}{10^3}, \quad S_2(t) = |\langle x_2', T_t y_{n_3}\rangle| + |\langle y_{n_3}', T_t x_3\rangle|. \tag{11}$$

Покажем, что $\forall t \in U_1 \cup U_2$ $S_2(t) < 3$. Ясно, что $\|x_2'\| \le \frac{11}{10}$. Рассуждая так же, как при оценке $S_1(t)$, получаем: $\forall t \in U_1$ $S_2(t) \le \big(\frac{11}{10}\big)^2 + \big(\frac{11}{10} + \frac{11}{10^2} + \frac{11}{10^4}\big) < 3$.

Если $t \in U_2$, то нужны чуть более сложные рассуждения. Первое слагаемое числа $S_2(t)$ оценивается по-старому: если $t \in U_2 \subset [0, n_3]$, то $\|T_t y_{n_3}\| \le \frac{11}{10}$ и $|\langle x_2', T_t y_{n_3}\rangle| \le \big(\frac{11}{10}\big)^2$. Рассмотрим слагаемое $|\langle y_{n_3}', T_t x_3\rangle|$. Вспомним, что $T_t x_3 = \big(T_t x_1 + \frac{T_t y_{n_2}}{10} \pm \frac{T_t y_{n_3}}{10^3}\big)$. Норма $\big\|\frac{T_t y_{n_2}}{10} \pm \frac{T_t y_{n_3}}{10^3}\big\|$ при $t \in U_2$ меньше, чем $\frac{11}{10^2} + \frac{11}{10^4}$.

Все мог бы испортить вектор $T_t x_1 = T_t y_{n_1}$, который при $t \in U_2$ уже имеет право стать длинным. Но в силу (10) значение функционала y'_{n_3} на этом векторе при $t \in U_2$ не превосходит числа 1. Следовательно, $\forall t \in U_2 \ |\langle y'_{n_3}, T_t x_3\rangle| \le \left(1 + \frac{11}{10^2} + \frac{11}{10^4}\right)$. Итак, $\forall t \in U_2 \ S_2(t) < \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \left(1 + \frac{11}{10^2} + \frac{11}{10^4}\right) < 3$.

Теперь из (11), (7), (9) следует, что

$$\forall t \in U_1 \ |\langle x'_3, T_t x_3\rangle| > \frac{9}{10} - \frac{3}{10} - \frac{3}{10^3}, \quad \forall t \in U_2 \ |\langle x'_3, T_t x_3\rangle| > \frac{9}{10^3} - \frac{3}{10^3}.$$

Наконец, выберем пару знаков «$\pm$» и множество $U_3 \subset \widetilde{U}_3$, $\mu(U_3) \ge m_3$, с помощью приема выбора из четырех. Имеем

$$\forall t \in U_3 \quad |\langle x'_3, T_t x_3\rangle| > \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{10^3}\right)^2 = \frac{9}{10^7}.$$

Заметим, что построить вектор x_1 было совсем просто. На втором шаге нам понадобился прием выбора из четырех. На шаге 3 новым было использование формулы (10), причем заготовку для нее (формулу (6)) пришлось сделать в самом начале шага 2. Следующие шаги принципиально от шага 3 не отличаются.

Построение вектора x_l, $l \ge 3$. Предположим, что мы построили множества $U_1, \dots, U_l$, числа $n_1 \le n_2 \le \dots \le n_l$, векторы $x_1, \dots, x_l$ вида $x_l = \sum\limits_{i=1}^{l} \pm \frac{y_{n_i}}{10^{2^{i-1}-1}}$ и функционалы $x'_1, \dots, x'_l$ аналогичного вида такие, что выполнены следующие свойства:

(1_l) $U_i \subset [0, n_i]$, $\mu(U_i) \ge m_i$, $i = 1, 2, \dots, l$;

(2_l) $\forall t \in U_i \ |\langle y', T_t x_{i-1}\rangle| < 1$, $i = 2, \dots, l$;

(3_l) $\forall t \in U_i \ \forall n \ge n_{i+1} \ |\langle y'_n, T_t x_{i-1}\rangle| < 1$, $i = 2, \dots, l-1$;

(4_l) $\forall t \in U_i \ |\langle x'_l, T_t x_l\rangle| \ge \frac{9}{10^{2^i-1}} - 3\sum\limits_{j=i}^{l-1} \frac{1}{10^{2^j-1}}$, $i = 1, \dots, l-1$;

(5_l) $\forall t \in U_l \ |\langle x'_l, T_t x_l\rangle| \ge \frac{9}{10^{2^l-1}}$.

Построим множество U_{l+1}, число n_{l+1}, вектор x_{l+1} и соответствующий функционал x'_{l+1} так, чтобы свойства (1_{l+1})–(5_{l+1}) тоже выполнялись.

Выберем компактное множество $\widetilde{U}_{l+1}$ такое, что $\mu(\widetilde{U}_{l+1}) \ge 4m_{l+1}$ и $\forall t \in \widetilde{U}_{l+1} \ |\langle y', T_t x_l\rangle| < 1$. Возможность этого выбора следует из формулы (3).

Пусть $n_{l+1} \ge n_l$ такой, что $\widetilde{U}_{l+1} \subset [0, n_{l+1}]$ и

$$\forall n \ge n_{l+1} \ \forall t \in U_l \quad |\langle y'_n, T_t x_{l-1}\rangle| < 1.$$

Такой n_{l+1} найдется в силу условия (2_l) (см. рассуждения перед формулой (10)). Получилось условие (3_{l+1}).

Положим $x_{l+1} = x_l \pm \frac{y_{n_{l+1}}}{10^{2^l-1}}$ и $x'_{l+1} = x'_l \pm \frac{y'_{n_{l+1}}}{10^{2^l-1}}$. Выберем пару знаков $\pm$ и множество $U_{l+1} \subset \widetilde{U}_{l+1}$ с помощью приема выбора из четырех. Таким образом, условия (1_{l+1}), (2_{l+1}) будут выполняться вместе с условием (5_{l+1}):

$$\forall t \in U_{l+1} \quad |\langle x'_{l+1}, T_t x_{l+1}\rangle| \ge \left|\left\langle \frac{y'_{n_{l+1}}}{10^{2^l-1}}, \frac{T_t y_{n_{l+1}}}{10^{2^l-1}}\right\rangle\right| \ge \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{10^{2^l-1}}\right)^2 = \frac{9}{10^{2^{l+1}-1}}.$$

Проверим, наконец, условие (4_{l+1}). Для каждого t выполнено

$$|\langle x'_{l+1}, T_t x_{l+1}\rangle| \ge |\langle x'_l, T_t x_l\rangle| - \frac{S_l(t)}{10^{2^l-1}}, \quad S_l(t) = |\langle x'_l, T_t y_{n_{l+1}}\rangle| + |\langle y'_{n_{l+1}}, T_t x_{l+1}\rangle|.$$

Достаточно установить, что при всех $t \in U_1 \cup \dots \cup U_l$ будет $S_l(t) < 3$. Первое слагаемое в $S_l(t)$ меньше, чем $\|x'_l\| \cdot \|T_t y_{n_{l+1}}\| \leq \frac{12 \cdot 11}{100}$. Оценим второе слагаемое.

Если $t \in U_i \subset [0, n_i]$, то, записав $x_{l+1} = x_{i-1} + \sum\limits_{j=i}^{l+1} \big(\pm \frac{y_{n_j}}{10^{2^{j-1}-1}}\big)$, имеем

$$|\langle y'_{n_{l+1}}, T_t x_{l+1}\rangle| = \left| \left\langle y'_{n_{l+1}}, T_t x_{i-1} + \sum_{j=i}^{l+1} \left(\pm \frac{T_t y_{n_j}}{10^{2^{j-1}-1}} \right) \right\rangle \right| < |\langle y'_{n_{l+1}}, T_t x_{i-1}\rangle| + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}.$$

Неравенства в этой формуле обеспечиваются тем, что длины $\|T_t y_{n_j}\|$ невелики при $j \geq i$ (так как $t \in U_i \subset [0, n_i]$), и условием (3_{l+1}), уже установленным выше (ср. оценку $S_2(t)$ при $t \in U_2$). Итак, 4_{l+1} тоже установлено.

Пусть $x' = \lim x'_k$ и $x = \lim x_k$. Тогда согласно «(4_∞)» имеем

$$\forall t \in U_i \quad |\langle x', T_t x\rangle| \geq \frac{9}{10^{2^i-1}} - 3 \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{10^{2^j-1}} > \frac{5}{10^{2^i-1}}.$$

Теорема доказана.

4. О возможности выбора гладкого вектора x в теореме 1

Можно ли в теореме 1 выбрать вектор x гладким? Ясно, что этого нельзя сделать, если, например, $\omega_1 < s_0 = 0$ — в этом случае полугруппа ЭУ, поэтому орбиты гладких векторов убывают слишком быстро. Опираясь на пример в [17], Вробель в [18] построил полугруппу, для которой $s < \omega_1 < s_0 = \omega_0$, причем в примере Вробеля $\omega_n = 2^{-n}$, где ω_n — рост полугруппы на $D(A^n)$. Таким образом, если эту полугруппу перенормировать так, что $\omega_1 = 0$, то получим неограниченную полугруппу, которая удовлетворяет теореме 1, однако экспоненциально убывает на каждом гладком векторе (причем чем выше гладкость, тем быстрее убывание). Сама полугруппа [17], перенормированная так, что $s = -1$, $\omega_1 = s_0 = \omega_0 = 0$, не является даже ЭУ, однако [19] $\|T_t x\| = O(1/t)$ для всех $x \in D(A^{1+\varepsilon})$ $\forall \varepsilon > 0$.

Что может помешать построенному в теореме 1 вектору $x = \sum \gamma_j y_{n_j}$ попасть в $D(A)$, ведь числовой ряд $\sum \gamma_i \in \mathbb{R}$ сходится и $y_{n_j} \in D^\infty(A)$, $\|y_{n_j}\| = 1$. Ответ простой: ряд $\sum \gamma_j A y_{n_j}$ не обязан сходиться в X, так как нормы $\|A y_{n_j}\| \approx |\beta_{n_j}|$ могут быстро расти по j (см. доказательство леммы 1).

Пусть $s_0 = s = 0$. Предположим также, что граница спектра достигается, т. е. существует $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ (типичный случай для C_0-полугрупп). Тогда числа $i\beta_n$ в лемме 1 можно выбрать в окрестности λ (а не где-то «на бесконечности») и нормы $\|A y_{n_j}\| \approx |\beta_{n_j}|$ будут ограничены по j. Тогда ряд $\sum \gamma_j A y_{n_j}$ сходится. В силу замкнутости оператора A вектор x попадает в $D(A)$. Докажем, что можно найти и бесконечно гладкий вектор x.

Теорема 2. *Предположим, что $s(A) \geq 0$ достигается. Тогда существуют $x' \in X'$, $x \in D(A^\infty)$, удовлетворяющие условиям теоремы* 1.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Re}(\lambda) = s$. Домножая A на $e^{-\lambda}$, можно считать, что $s = 0 \in \mathrm{Sp}(A)$. Достаточно подобрать векторы $y_n \in D(A^\infty)$ в доказательстве теоремы 1 таким образом, чтобы ряд $\sum\limits_n \gamma_n A^k y_n$ сходился в X для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$. В следующей лемме мы покажем, что это можно сделать. Эта лемма интересна и сама по себе.

Лемма 2. *Если* $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, *то* $\forall \delta > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in D(A^\infty)$ *такой, что*

$$\|y_n\| = 1, \quad \forall i \le n\ \|A^i y_n\| < \delta. \tag{12_n}$$

Доказательство. Пусть $n = 1$. Оператор $(\lambda - A)^{-1}$ не ограничен по λ в окрестности нуля, поэтому (12_1) следует из леммы 1.

Для $n > 1$ используем соболевскую шкалу ассоциированных полугрупп [14, A-I 3.5]. Рассмотрим на пространстве $D(A^n)$ норму «итерированного» графика $\|x\|_n = \|x\| + \|Ax\| + \dots + \|A^n x\|$. Полугруппа $T_t : D(A^{n-1}) \to D(A^{n-1})$ с генератором $A : D(A^n) \to D(A^{n-1})$ изоморфна первоначальной. Условие (12_1), переписанное для этой полугруппы, означает: существует вектор $y_n \in D(A^\infty)$ такой, что

$$\|y_n\| + \|Ay_n\| + \dots + \|A^{n-1}y_n\| = 1, \tag{13}$$

$$\|Ay_n\| + \dots + \|A^n y_n\| < \delta. \tag{14}$$

Из неравенства (14) следует, что все $\|Ay_n\|, \|A^2y_n\|, \dots, \|A^n y_n\|$ малы. Теперь из равенства (13) получаем, что $\|y_n\|$ близко к 1. Остальное очевидно. Лемма 2 и теорема 2 доказаны.

Заметим, что теорема 2 кажется довольно естественной, если иметь в виду полугруппу сдвигов: ясно, что характер убывания функции на $[0, \infty)$ может быть сделан сколь угодно медленным и бесконечная дифференцируемость как локальное явление здесь не помеха.

Благодарности

Выражаю благодарность профессору Жану ван Неервену за проявленный интерес к работе и стимулирующие вопросы. В частности, один его совет позволил существенно усилить формулировки основных результатов. Я благодарен профессору Константину Бусе за информацию, которая стимулировала меня заняться этой темой. Спасибо также профессору Богдану Сасу, который прислал мне копию малодоступной статьи [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Muller V.* Local spectral radius formula for operators in Banach spaces // Czech. Math. J. 1988. V. 38, N 4. P. 726–729.
2. *van Neerven J. M. A. M.* On the orbits of an operator with spectral radius one // Czech. Math. J. 1995. V. 45, N 3. P. 495–502.
3. *Datko R.* Extending a theorem of A. M. Lyapunov to Hilbert space // J. Math. Anal. Appl. 1970. V. 32. P. 610–616.
4. *Pazy A.* On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert space // SIAM J. Math. Anal. 1972. V. 3, N 2. P. 291–294.
5. *Rolewicz S.* On uniform N-equistability // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 115, N 2. P. 434–441.
6. *Storozhuk K. V.* On the Rolewicz theorem for evolution operators // Proc. Amer. Math. Soc. 2007. V. 135, N 6. P. 1861–1863.
7. *van Neerven J. M. A. M.* The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators. Basel: Birkhäuser, 1996.
8. *Pritchard A. J., Zabczyk J.* Stability and stabilizability of infinite-dimensional systems // SIAM Rev. 1981. V. 23, N 1. P. 25–52.
9. *Huang Fa Lun* Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces // Ann. Differ. Equations. 1985. V. 1, N 1. P. 43–56.
10. *Weiss G.* Weak L^p-stability of a linear semigroups on a Hilbert space implies exponential stability // J. Differ. Equations. 1988. V. 76, N 2. P. 269–285.
11. *Greiner G., Voigt J., Wolff M.* On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators // J. Oper. Theory. 1981. V. 5, N 2. P. 245–256.

12. *van Neerven J. M. A. M., Straub B., Weis L.* On the asymptotic behaviour of a semigroup of linear operators // Indag. Math. (N. S.) 1995. V. 6, N 4. P. 435–476.
13. *Gearhart L.* Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 236. P. 385–394.
14. *One-parameter semigroups of positive operators* / Arendt W., Graboch A., Greiner G. etc. Berlin: Springer-Verl., 1986. (Lect. Notes Math.; 1184).
15. *Neubrander F.* Laplace transform and asymptotic behavior of strongly continuous semigroups // Houston J. Math. 1986. V. 12, N 4. P. 549–561.
16. *Foias C.* Sur une question de M. Reghis // An. Univ. Timis., Ser. Stiinte. Mat. 1973. V. 9, N 2. P. 111–114.
17. *Zabczyk J.* A note on C_0-semigroups // Bull. Acad. Polon. Sci. 1975. V. 23, N 8. P. 895–898.
18. *Wrobel V.* Asymptotic behavior of C_0-semigroups in B-convex spaces // Indiana Univ. Math. J. 1989. V. 38, N 1. P. 101–114.
19. *Batkai A., Engel K.-J., Pruss J., Schnaubelt R.* Polynomial stability of operator semigroups // Math. Nachr. 2006. V. 279, N 13–14. P. 1425–1440.

Статья поступила 16 февраля 2009 г.

Сторожук Константин Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`stork@math.nsc.ru`