Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 517.988.67

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГАММЕРШТЕЙНА В НЕРЕГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров

Аннотация. Ветви решения нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) = \int_a^b K(x,s)q(s,u(s),\lambda)\,ds,$$

где $q(s,u,\lambda) = u(s) + \sum\limits_{i=2}^{\infty} q_{io}(s)u^i + \sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_{ik}(s)u^i\lambda^k$, λ — параметр, строятся методом последовательных приближений. Рассмотрен случай, когда единица является характеристическим числом ядра $K(x,s)$ ранга $n \geq 1$, точка $\lambda = 0$ является точкой ветвления решения. Главный член построенной в работе асимптотики используется как начальное приближение. Равномерная сходимость метода в окрестности точки ветвления устанавливается с помощью теоремы о неявном операторе и леммы Шмидта.

Ключевые слова: уравнение Гаммерштейна, метод последовательных приближений, ветвление.

§ 1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \int_a^b K(x,s)g(s,u(s),\lambda)\,ds, \tag{1}$$

где $K(x,s)$, $g(s,u,\lambda) = u(s) + f(s,u,\lambda)$ — непрерывные функции при $a \leq x, s \leq b$, $|u| \leq r$, $|\lambda| \leq \rho$,

$$f(s,u,\lambda) = \sum_{i=2}^{\infty} q_{io}(s)u^i + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q_{ik}(s)u^i\lambda^k. \tag{2}$$

Если единица не является характеристическим числом ядра $K(x,s)$, то уравнение (1) имеет единственное решение $u \to 0$ при $\lambda \to 0$ и для его построения можно использовать широкий спектр методов [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00377) и Минобрнауки (код проекта 2007–01–03).

Предположим, что единица является характеристическим числом ядра $K(x,s)$ ранга n, $\{\phi_i\}_1^n$ — соответствующие собственные функции, $\{\psi_i\}_1^n$ — собственные функции союзного ядра $K(s,x)$. Требуется построить в окрестности точки ветвления $\lambda = 0$ решение $u_\lambda(x) \to 0$ при $\lambda \to 0$.

Для построения разветвляющихся решений интегрального уравнения (1) можно применить классические результаты В. А. Треногина в аналитической теории ветвления [2–4]. Кроме асимптотических методов важной задачей при решении уравнения (1) является разработка методов последовательных приближений в окрестности точки ветвления, не рассматривавшихся в монографии [2].

Методы последовательных приближений в окрестности точек ветвления могут строиться на основе явной и неявной параметризаций, в том числе в условиях групповой симметрии уравнения (1) (см. работы [5, 6]). Например, в работах [5–9] приведены схемы последовательных приближений с неявной параметризацией ветвей решений операторных уравнений в банаховых пространствах. Неявную параметризацию при решении конкретных задач использовали и другие авторы [10, 11]. Между тем при качественном анализе ветвей решения часто надо знать явную зависимость от бифуркационного параметра, входящего в уравнение и имеющего физический смысл. Поэтому актуальна разработка методов последовательных приближений в окрестности точек ветвления с явной параметризацией решения с учетом специфики конкретных классов нелинейных уравнений.

Целью этой работы, примыкающей к циклу статей [5, 6, 8, 9], является построение метода последовательных приближений ветвей решения интегрального уравнения (1) с явной параметризацией, а также вывод итерационных формул, удобных для теории приближенного решения уравнения (1) с простым выбором начального приближения. В основе предлагаемой итерационной схемы лежат методология аналитического метода Ляпунова — Шмидта [2, 3] и некоторые результаты из [6].

§ 2. Асимптотика решения и последовательные приближения

Введем условие

A. Разложение (2) может быть перегруппировано к виду

$$f(s,u,\lambda) = \sum_{i\nu+k=\theta}^{\infty} q_{ik}(s) u^i \lambda^k,$$

где $\nu = r/s$, $\theta = \frac{r+m}{s}$, r, s, m — натуральные числа.

Заметим, что в конкретных случаях числа r, s, m легко можно вычислить методом диаграммы Ньютона (см., например, [3, с. 421–426]). Для этого достаточно нанести на координатную плоскость целочисленные точки (i,k), отвечающие ненулевым коэффициентам q_{ik}, и построить соответствующую диаграмму Ньютона. Искомые ν выбираются неоднозначно и полагаются равными $\operatorname{tg}\gamma$, где γ — угол наклона одного из отрезков диаграммы с отрицательными направлениями оси абсцисс. Соответствующее θ будет равно ординате точки пересечения продолжения этого отрезка с осью ординат.

Пусть при этом выполнено условие

B. Система алгебраических уравнений

$$l_j(c) \equiv \int\limits_a^b \sum_{i\nu+k=\theta} q_{ik}(s)(c,\phi(s))^i \psi_j(s)\,ds = 0, \tag{3}$$

$j = 1,\dots,n$, где $(c,\phi) = \sum\limits_{i=1}^n c_i\phi_i(s)$, имеет простое ненулевое решение c^*.

Если ядро $K(x,s)$ симметричное, то условие **B** можно заменить следующим условием.

B′. Функция

$$U(c) = \int\limits_a^b \sum_{i\nu+k=\theta} \frac{1}{i+1} q_{ik}(s)(c,\phi(s))^{i+1}\,ds \tag{4}$$

имеет невырожденную критическую точку $c^* \neq 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* **A** *и* **B**. *Тогда уравнение* (1) *имеет решение*

$$u = \lambda^\nu (c^*,\phi(x)) + r(x,\lambda), \tag{5}$$

где $|r(x,\lambda)| = o(|\lambda|^\nu)$ *при* $\lambda \to 0$, *функция* $r(x,\lambda)$ *может быть однозначно определена методом последовательных приближений.*

Доказательство. Введем операторы

$$Bu = u - \int\limits_a^b K(x,s)u(s)\,ds,$$

$$\widehat{B}u = u - \int\limits_a^b \widehat{K}(x,s)u(s)\,ds, \quad R(u,\lambda) = \int\limits_a^b K(x,s)f(s,u(s),\lambda)\,ds,$$

где $\widehat{K}(x,s) = K(x,s) - \sum\limits_{i=1}^n \psi_i(x)\phi_i(s)$.

Отметим, что на основании леммы Шмидта (см. [3, с. 221]) оператор $\widehat{B}$ имеет ограниченный обратный $\Gamma = I - \int\limits_a^b R(x,s)[\,\cdot\,]\,ds$, где $R(x,s)$ — резольвента ядра $\widehat{K}(x,s)$.

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u = (\Gamma\omega(x) + (c,\phi(x)))\lambda^\nu, \tag{6}$$

где функция $\omega(x)$ удовлетворяет равенствам

$$(\omega,\psi_i) \equiv \int\limits_a^b \omega(x)\psi_i(s)\,ds = 0, \quad i = 1,\dots,n. \tag{7}$$

С помощью замены (6) уравнение (1) приведем к виду

$$\omega = \lambda^{-\nu} R((\Gamma\omega + (c,\phi))\lambda^\nu, \lambda) \tag{8}$$

и дополним его уравнениями

$$\lambda^{-\theta}(R((\Gamma\omega + (c, \phi))\lambda^{\nu}, \lambda), \psi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{9}$$

вытекающими из равенств (7). Таким образом, задача свелась к отысканию функции $\omega(x) \to 0$ и вектора $c(\lambda) \to c^*$ при $\lambda \to 0$ из системы (8), (9). Отметим, что в уравнениях (9)

$$(R(u, \lambda), \psi_i) = \int\limits_a^b f(s, u, \lambda)\psi_i(s)\, ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

Систему (8), (9) рассмотрим как одно операторное уравнение

$$\Phi(\vec{w}, \lambda) = 0 \tag{10}$$

относительно элемента $\vec{w} = (\omega, c)$ из $C_{[a,b]} \oplus \mathbb{R}^n$ с параметром λ. Здесь нелинейное отображение Φ действует из банахова пространства $E_1 = C_{[a,b]} \oplus \mathbb{R}^{n+1}$ в банахово пространство $E_2 = C_{[a,b]} \oplus \mathbb{R}^n$. В силу выбора чисел ν, r, s оператор Φ непрерывен в окрестности точки $\vec{w_0} = (0, c^*), \lambda_0 = 0$, где c^* — ненулевое решение системы (3),

$$\lim_{\vec{w} \to \vec{w}_0 \lambda \to 0} \Phi(\vec{w}, \lambda) = 0.$$

Поэтому в силу выбора чисел ν, r, s оператор Φ имеет непрерывную производную Фреше $\Phi_{\vec{w}}(\vec{w}, \lambda)$ по $\vec{w}$ в окрестности этой точки.

Отметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \omega}(R((\Gamma\omega + (c, \phi))\lambda^{\nu}, \lambda), \psi_i) = \lambda^{\nu} \int\limits_a^b f'_u((\Gamma\omega + (c, \Phi))\lambda^{\nu}, \lambda)\psi_i(s)\Gamma[\,\cdot\,]\, ds,$$

$$\frac{\partial}{\partial c_j}(R((\Gamma\omega + (c, \phi))\lambda^{\nu}, \lambda, \psi_i)) = \lambda^{\nu} \int\limits_a^b f'_u(s, (\Gamma\omega + (c, \phi)\lambda^{\nu}, \lambda))\psi_i(s)\phi_j(s)\, ds,$$

$j = 1, \dots, n$. При этом производная Фреше по $\vec{w}$ оператора Φ в точке $(\vec{w_0}, 0)$ имеет вид

$$\Phi'_w(\vec{w}_0, 0) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ L & \Xi \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где I — тождественный оператор из $C_{[a,b]}$ в $C_{[a,b]}$, 0 — нулевой оператор из $\mathbb{R}^n$ в $C_{[a,b]}$, L — линейный функционал из $C_{[a,b]}$ в $\mathbb{R}^n$, $L = (L_1, \dots, L_n)'$, где

$$L_i = \int\limits_a^b \psi_i(s) f'_u(s, (c^*, \phi), 0)\Gamma(\cdot)\, ds$$

— линейный функционал из $C_{[a,b]}$ в $\mathbb{R}^1$,

$$\Xi = \left[\frac{\partial l_i(c^*)}{\partial c_j}\right]_{i,j=1,\dots,n}$$

— $(n \times n)$-матрица. Линейный оператор (11) имеет ограниченный обратный, так как Ξ — невырожденная матрица в силу условия **B**. Следовательно, уравнение (10) удовлетворяет условиям теоремы о неявном операторе [3, с. 411], причем искомое решение $\vec{w}$ можно найти методом последовательных приближений

$$\vec{w}_n = \vec{w}_{n-1} - \Phi_{\vec{w}}^{-1}(\vec{w}_0, 0)\Phi(\vec{w}_{n-1}, \lambda), \quad \vec{w}_0 = (0, c^*).$$

Таким образом, для построения решения уравнения (1) надо построить последовательность

$$u_n = (\Gamma w_n + (c_n, \phi))\lambda^\nu, \ n = 1, 2, \dots, \quad u_0 = (c^*, \phi)\lambda^\nu, \tag{12}$$

$w_0 = 0$, $c_0 = c^*$. Здесь $w_n = w_{n-1} + \Delta_n$, $c_n = c_{n-1} + \delta_n$. Функция Δ_n и вектор δ_n из $\mathbb{R}^n$ определяются формулами

$$\Delta_n(x) = \lambda^{-\nu} \int\limits_a^b K(x, s) g(s, u_{n-1}(s), \lambda)\, ds - \omega_{n-1}, \tag{13}$$

$$\delta_n = -\lambda^{-\theta} \int\limits_a^b f'_u(s, u_{n-1}, \lambda) \hat{\Psi}(s)\, ds - \int\limits_a^b f'_u(s, (c^*, \phi), 0) \Gamma \Delta_n \hat{\psi}(s)\, ds. \tag{14}$$

Вектор-функция $\hat{\psi}(s) = (\hat{\psi}_1(s), \dots, \hat{\psi}_n(s))'$ определяется как $\hat{\psi}(s) = \Xi^{-1}\psi(s)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Для построения функций $\Gamma\omega_n$, $\Gamma\Delta_n$ в формулах (12), (14) можно воспользоваться представлением оператора Γ через резольвенту ядра $\widehat{K}(x, s)$ или решить линейное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с таким ядром. Если $K(x, s) = \sum\limits_{i=1}^n \phi_i(x)\phi_i(s)$, где ϕ_i — ортонормированная система, то Γ будет тождественным оператором и последовательные приближения с помощью формул (12)–(14) сводятся к квадратурам.

Замечание 2. В итерационных формулах (13), (14) точка $\lambda = 0$ в силу выбора чисел ν, r, s является устранимой особой точкой. В случае, когда f — полином относительно неизвестной функции u, можно легко провести «регуляризацию» формул (13), (14), сократив отрицательные степени параметра λ после подстановки представления u_{n-1} в виде (6) в эти формулы.

В общем случае для обеспечения устойчивости вычислений при малых λ следуя идее регуляризации в смысле А. Н. Тихонова [12], согласно работе [13] можно в формулах (13), (14) сделать замену $\lambda^{-\nu} \Rightarrow (\lambda + \alpha(\delta))^{-\nu}$, $\lambda^{-\theta} \Rightarrow (\lambda + \alpha(\delta))^{-\theta}$. При этом регуляризирующий параметр $\alpha(\delta)$ должен быть согласован с погрешностью вычислений δ аналогично работе [13] (см. также [7]).

Замечание 3. Условие аналитичности функции f можно ослабить, заменив предположением

$$\left| f(s, u, \lambda) - \sum_{\frac{i}{n_1} + \frac{k}{n_2} = 1} q_{ik}(s) u^i \lambda^k \right| = o\Big(\sum_{\frac{i}{n_1} + \frac{k}{n_2} = 1} |u|^i |\lambda|^k \Big)$$

при $u \to 0, \lambda \to 0$. Если при этом $q_{n_1 0}(s) \neq 0$, $q_{0 n_2}(s) \neq 0$, то, очевидно, точки диаграммы Ньютона функции $f(s, u, \lambda)$ лежат не выше прямой $\frac{i}{n_1} + \frac{k}{n_2} = 1$.

Пример. Рассмотрим

$$u(x) - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos x \cos s ((1 + \lambda) u(s) - s u^3(s) + \lambda^3 \cos s)\, ds = 0.$$

Здесь выполнены условия теоремы и замечание 1. В этом примере в представлении (6) $n = 1$, $\phi = \psi = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$, $\nu = 2$ или $\nu = \frac{1}{2}$. При этом согласно замечанию 1 оператор Γ является тождественным, а итерационные формулы (13), (14) метода последовательных приближений сведутся к квадратурам. Здесь существует три ветви решения с явной параметризацией:

$$u_1(x,\lambda) = -\lambda^2 \cos x + O(|\lambda|^3), \quad u_{2,3}(x,\lambda) = \pm\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\cos x + O(|\lambda|).$$

В заключение отметим, что изложенный метод последовательных приближений можно применить в нерегулярном случае и при решении нелинейных интегральных уравнений [1] путем продолжения по длине промежутка интегрирования [14].

Возможно обобщение метода и на случай операторных уравнений в банаховых пространствах, рассмотренных в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения. Методы. Алгоритмы. Киев: Наук. думка, 1986.

2. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

3. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007.

4. *Треногин В. А., Филиппов А. Ф.* Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2003.

5. *Логинов Б. В., Сидоров Н. А.* Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова — Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 5. С. 681–691.

6. *Сидоров Н. А.* Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационным методом // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 2. С. 129–140.

7. *Sidorov N. A., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.

8. *Сидоров Н. А.* N-ступенчатый итерационный метод в теории ветвления решений нелинейных уравнений // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 2. С. 383–395.

9. *Сидоров Н. А.* Параметризация простых разветвляющихся решений полного ранга и итерации в нелинейном анализе // Изв. вузов. Математика. 2001. Т. 9. С. 59–65.

10. *Moore G.* The numerical treatment of non-trivial bifurcation points // Numer. Funct. Anal. Optim. 1980. V. 2, N 6. P. 441–472.

11. *Keller H. B.* Numerical solutions of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems // Applications of bifurcation theory. New York: Acad. Press, 1977. P. 359–384.

12. *Тихонов А. Н., Иванов В. К., Лаврентьев М. М.* Некорректно поставленные задачи // Тр. симпозиума, посвященного 60-летию акад. С. Л. Соболева. М.: Наука, 1970. С. 224–239.

13. *Сидоров Н. А., Треногин В. А.* Регуляризация простых решений нелинейных уравнений в окрестности точек ветвления // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 20, № 1. С. 180–183.

14. *Бельтюков Б. А., Шилько Г. С.* Метод экстраполяции решения нелинейного интегрального уравнения по длине промежутка интегрирования в нерегулярном случае // Сб. по вычислительной математике. Иркутск: Иркутский пед. ин-т, 1973. С. 104–119.

Статья поступила 14 февраля 2009 г.

Сидоров Николай Александрович
Иркутский гос. университет, ул. К. Маркса, 1, Иркутск 664003
`sidorov@math.isu.runnet.ru`

Сидоров Денис Николаевич
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск 664033
`dsidorov@isem.sei.irk.ru`