Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 517.926

КАНОНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ТЕОРИЯ ПУАНКАРЕ — ДАНЖУА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ТОРЕ

А. И. Перов

Аннотация. После перехода в канонической системе с периодическими коэффициентами от декартовых координат к полярным получается нелинейное дифференциальное уравнение, правая часть которого периодична как по времени, так и по полярному углу, что позволяет трактовать это уравнение как дифференциальное уравнение на торе. Согласно теории Пуанкаре — Данжуа поведение в целом решений дифференциального уравнения на торе полностью характеризуется числом вращения и некоторым гомеоморфным отображением окружности на себя. Изучается связь между сильной устойчивостью (неустойчивостью) канонической системы, включая принадлежность к n-й области устойчивости (неустойчивости), с числом вращения и неподвижными точками упомянутого гомеоморфизма.

Ключевые слова: канонические системы, мультипликаторы Флоке, области сильной устойчивости и неустойчивости, теория Пуанкаре — Данжуа, число вращения.

В теории канонических систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами важную роль играют сильно устойчивые и сильно неустойчивые гамильтонианы. Как те, так и другие образуют в функциональном пространстве гамильтонианов открытые множества, распадающиеся в рассматриваемом случае на счетное число компонент связности, нумеруемых по определенному правилу числами n и называемых соответственно n-й *областью устойчивости* и n-й *областью неустойчивости*.

При изучении канонических систем двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами удобно перейти от декартовых координат к полярным, причем для полярного угла получается нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, не содержащее полярного радиуса и периодическое по обеим переменным. Последнее позволяет трактовать полученное уравнение как дифференциальное уравнение на торе. Согласно теории Пуанкаре — Данжуа поведение в целом решений дифференциального уравнения на торе полностью характеризуется числом вращения и некоторым сохраняющим ориентацию гомеоморфным отображением окружности на себя.

В статье впервые прослеживается связь сильной устойчивости и сильной неустойчивости с числом вращения и упомянутым выше гомеоморфизмом. Проведенное исследование показывает, что дифференциальное уравнение на торе адекватно описывает многие важные свойства изучаемой канонической системы, включая возможность по одному только числу вращения сказать, сильно устойчива каноническая система или нет и, если она устойчива, какой именно области устойчивости она принадлежит.

В конце статьи изучается свойство устойчивости числа вращения, впервые открытое В. А. Плиссом. Показывается, что число вращения устойчиво, если соответствующая каноническая система сильно неустойчива.

Статья разбита на шесть пунктов. Начало и конец доказательства лемм и теорем обозначаются значками □ и ■ соответственно.

1. Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= h_{21}(t)x + h_{22}(t)y, \\ \frac{dy}{dt} &= -h_{11}(t)x - h_{12}(t)y, \end{aligned} \tag{1}$$

в которой коэффициенты $h_{ij}(t)$ — вещественные измеримые периодические с периодом $\omega > 0$ функции,

$$h_{ij}(t+\omega) = h_{ij}(t), \quad i,j = 1,2, \tag{2}$$

суммируемые на отрезке $[0,\omega]$, т. е. $h_{ij}(t) \in L_1[0,\omega]$. Кроме того, предполагается, что выполнено условие симметричности

$$h_{12}(t) = h_{21}(t). \tag{3}$$

При выполнении последнего условия след матрицы коэффициентов системы (1) тождественно равен нулю. Как известно, система (1) в этом случае называется *канонической* системой [1, с. 522]. При сделанных нами предположениях решения канонической системы понимаются *в смысле Каратеодори*, т. е. функции $x(t)$ и $y(t)$ должны быть абсолютно непрерывными [2, с. 120–124; 3, с. 53–60].

Напомним, что число μ (вещественное или невещественное) называется *мультипликатором Флоке* канонической системы (1), если можно указать такое нетривиальное решение этой системы с компонентами $x(t)$ и $y(t)$ (вещественными или невещественными), что

$$x(t+\omega) = \mu x(t), \quad y(t+\omega) = \mu y(t). \tag{4}$$

Мультипликаторы являются корнями квадратного уравнения

$$\mu^2 - 2A\mu + 1 = 0, \tag{5}$$

где вещественная постоянная A есть так называемая *характеристическая постоянная Ляпунова* [1, с. 525]. Если $|A| > 1$, то мультипликаторы вещественные и различные, причем они одного знака и один из них по модулю больше единицы, а другой по модулю меньше единицы — все это вытекает из формулы

$$\mu_{\pm} = A \pm \sqrt{A^2 - 1}.$$

Если $|A| = 1$, то мультипликаторы вещественные и совпадающие, т. е.

$$\mu_{\pm} = +1 \quad \text{или} \quad \mu_{\pm} = -1.$$

Если $|A| < 1$, то мультипликаторы невещественные и различные, причем они комплексно сопряженные и лежат на единичной окружности. Действительно,

$$\mu_{\pm} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi} \quad (A = \cos\varphi,\ 0 < \varphi < \pi).$$

Иногда систему (1) удобно записывать в виде одного векторно-матричного уравнения

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{H}(t)\mathbf{z}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\mathbf{z}$ — вектор-столбец с компонентами x и y, а $\mathbf{H}(t) = (h_{ij}(t))$ — матричная функция, ω-периодическая согласно (2),

$$\mathbf{H}(t+\omega) = \mathbf{H}(t). \tag{7}$$

В силу условия симметричности (3) имеем

$$\mathbf{H}^*(t) = \mathbf{H}(t). \tag{8}$$

При выполнении последнего условия уравнение (6) называется *каноническим*, а матричная функция $\mathbf{H}(t)$ — *гамильтонианом.*

В совокупности всех гамильтонианов можно ввести норму, превращающую ее в вещественное банахово пространство $\mathfrak{B}$,

$$\|\mathbf{H}\| = \int\limits_0^\omega |\mathbf{H}(t)|\, dt. \tag{9}$$

Здесь $|\mathbf{A}|$ есть норма матрицы $\mathbf{A}$, определенная как операторная, т. е. $|\mathbf{A}| = \max\{|\mathbf{A}z|/|\mathbf{z}| : \mathbf{z} \neq 0\}$, и норма вектора $\mathbf{z}$ определяется обычным образом через стандартное скалярное произведение (ср. с [1, с. 539]). Так как матрица $\mathbf{H}(t)$ является симметрической, нетрудно найти ее собственные значения:

$$\lambda_\pm(t) = \frac{h_{11}(t) + h_{22}(t)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{h_{11}(t) - h_{22}(t)}{2}\right]^2 + h_{12}^2(t)}. \tag{10}$$

Поэтому

$$|\mathbf{H}(t)| = \max |\lambda_\pm(t)|. \tag{11}$$

Напомним, что гамильтониан называется *устойчивым* или *неустойчивым* в зависимости от того, устойчивым или неустойчивым соответственно является нулевое решение уравнения (6), причем устойчивость, если она есть, всегда имеет двусторонний характер. Напомним, что гамильтониан $\mathbf{H}_0(t)$ называется *сильно устойчивым*, если он устойчив и можно указать такое $\varepsilon > 0$, что устойчивы все гамильтонианы $\mathbf{H}(t)$ из его ε-окрестности:

$$\|\mathbf{H} - \mathbf{H}_0\| < \varepsilon.$$

Аналогично дается определение *сильно неустойчивого* гамильтониана. Пусть гамильтониану $\mathbf{H}_0(t)$ отвечает ляпуновская характеристическая постоянная A_0. Нетрудно показать, что гамильтониан $\mathbf{H}_0(t)$ сильно устойчив (сильно неустойчив) тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $|A_0| < 1$ (соответственно $|A_0| > 1$). Как сильно устойчивые, так и сильно неустойчивые гамильтонианы образуют в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ открытые множества, распадающиеся на счетное число компонент связности, нумеруемых по определенному правилу всевозможными целыми числами n и называемых соответственно n-й *областью устойчивости* и n-й *областью неустойчивости.*

Пусть $\mathbf{Z}(t)$ — *матрицант*, соответствующий векторному уравнению (6), т. е. решение матричного дифференциального уравнения

$$\mathbf{J}\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \mathbf{H}(t)\mathbf{Z}, \tag{12}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\mathbf{Z}(0) = \mathbf{I}, \tag{13}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная 2×2-матрица. Тогда в силу формулы Лиувилля

$$\det \mathbf{Z}(t) \equiv 1, \tag{14}$$

т. е. матрица $\mathbf{Z}(t)$ при всех t является *симплектической*. Особую роль играет матрица $\mathbf{Z}(\omega)$, называемая *матрицей монодромии*. Напомним, что мультипликаторы Флоке — это собственные значения матрицы монодромии, поэтому квадратное уравнение (5) — это характеристическое уравнение указанной матрицы. Введенная выше ляпуновская постоянная есть *полуслед* матрицы монодромии,

$$A = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{Z}(\omega). \tag{15}$$

Нужно отметить, что наше изложение теории канонических систем несколько отличается от [1, гл. VIII]; для полного совпадения переменные x и y нужно поменять местами.

2. Перейдем в канонической системе (1) от декартовых координат x и y к полярным координатам r и θ по формулам

$$x = r\sin\theta, \quad y = r\cos\theta, \tag{16}$$

которые несколько отличаются от обычных. Для полярного угла получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{\theta} = h_{11}(t)\sin^2\theta + 2h_{12}(t)\sin\theta\cos\theta + h_{22}(t)\cos^2\theta \equiv f(t,\theta), \tag{17}$$

примечательное тем, что не содержит полярного радиуса r, дифференциальное уравнение для которого, содержащее, кстати сказать, полярный угол θ, будет выписано позднее (см. формулу (32)). Дифференциальное уравнение (17) — это нелинейное дифференциальное уравнение, правая часть которого периодична по обеим переменным, а именно

$$f(t+\omega,\theta) = f(t,\theta), \quad f(t,\theta+\pi) = f(t,\theta), \tag{18}$$

что позволяет рассматривать это уравнение как дифференциальное уравнение на торе $\mathfrak{T}$.

Тор $\mathfrak{T}$ запишем как произведение двух ориентированных окружностей: $\mathfrak{T} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{C}$, где $\mathfrak{U}$ — ориентированная окружность длины ω, а $\mathfrak{C}$ — ориентированная окружность длины π. С помощью первой из них определяются *параллели* на торе, а с помощью второй — *меридианы*. Согласно теории Пуанкаре — Данжуа поведение в целом решений дифференциального уравнения на торе полностью характеризуется *числом вращения* ρ и некоторым сохраняющим ориентацию *гомеоморфным отображением* C окружности $\mathfrak{C}$ на себя. Основные положения теории Пуанкаре — Данжуа, а также дальнейшее ее развитие и обобщение можно найти, например, в [3, с. 442–456; 4, с. 173–175; 5, с. 147–186; 6, с. 238–244; 7, 8].

Рассмотрим дифференциальное уравнение на торе общего вида

$$\dot{\theta} = f(t,\theta), \tag{19}$$

где правая часть удовлетворяет условиям периодичности (18). Обычно предполагается, что $f(t,\theta)$ непрерывна по совокупности переменных и обеспечивает единственность решений, что влечет за собой непрерывную зависимость решения от начальных условий. Мы же фактически рассматриваем уравнение (19) в *условиях Каратеодори* [2, с. 44–46; 3, с. 53–60]. Это означает, что $f(t,\theta)$ измерима по t при каждом фиксированном θ и непрерывна по θ при каждом фиксированном t. Кроме того, предполагается, что имеет место оценка

$$|f(t,\theta)| \le m(t), \tag{20}$$

где $m(t)$ — некоторая неотрицательная измеримая ω-периодическая функция, суммируемая на отрезке $[0,\omega]$. Предполагается, далее, что выполнено условие Липшица

$$|f(t,\theta) - f(t,\vartheta)| \le l(t)|\theta - \vartheta|, \tag{21}$$

где $l(t)$ — некоторая неотрицательная измеримая ω-периодическая функция, суммируемая на отрезке $[0,\omega]$. Оценка (20) гарантирует существование при всех t решения уравнения (19), удовлетворяющего любому начальному условию, а условие Липшица (21) обеспечивает единственность этого решения и его непрерывную зависимость от начальных условий. Заметим, что, конечно же, из условия Липшица вытекает непрерывность $f(t,\theta)$ по θ.

Пусть $\theta(t)$ — некоторое решение уравнения (19), определенное при всех t. Из условия периодичности (18) следует, что при любых целых m и n решениями этого уравнения являются также функции $\theta(t+m\omega)$ и $\theta(t)+n\pi$. Обозначим через $\theta(t,\vartheta)$ решение уравнения (19), удовлетворяющее начальному условию $\theta(0)=\vartheta$. В силу сказанного выше функция $\theta(t,\vartheta)$ определена при всех t и θ и непрерывна по совокупности переменных. Кроме того,

$$\theta(t,\vartheta+n\pi) = \theta(t,\vartheta) + n\pi, \tag{22}$$

где n — любое целое число. Поэтому бóльшая часть классической теории Пуанкаре — Данжуа дифференциальных уравнений на торе переносится и на рассматриваемый нами случай условий Каратеодори.

Число вращения ρ дифференциального уравнения (19) определяется следующим образом:

$$\rho = \frac{\omega}{\pi} \lim_{0<|t-s|\to+\infty} \frac{\theta(t,\vartheta)-\theta(s,\vartheta)}{t-s}, \tag{23}$$

причем написанный предел существует равномерно по ϑ. Появление стоящего впереди множителя вызвано наличием у функции $f(t,\theta)$ разных периодов по разным переменным и призвано придать излагаемым ниже теоремам бóльшую четкость и простоту.

Отметим, как это вытекает из [5, с. 154, теоремы 10.2 и 10.3], что

$$\rho = \frac{n}{m} \Leftrightarrow \theta(m\omega,\vartheta) = \vartheta + n\pi \quad \text{при некотором } \vartheta; \tag{24}$$

здесь m и n — целые числа и $m \ne 0$.

Гомеоморфизм C описывается функцией $c(\vartheta) \equiv \theta(\omega,\vartheta)$. Она непрерывна, возрастает и $c(\vartheta+k\pi) = c(\vartheta)+k\pi$ при любом целом k (см. (22)). Гомеоморфизм C^k описывается функцией $c^k(\vartheta)$, где при $k>0$ функция $c^k(\vartheta)$ есть k-я итерация функции $c(\vartheta)$; при $k=0$ имеем $c^0(\vartheta)\equiv\vartheta$ и при $k<0$ она есть k-я итерация функции $c^{-1}(\vartheta)$, где $c^{-1}(\vartheta)$ — функция, обратная $c(\vartheta)$.

Положим

$$\Delta(\vartheta) \equiv c(\vartheta) - \vartheta. \tag{25}$$

Это непрерывная функция, периодическая с периодом π. В [1, с. 557] она названа *функцией углов поворота* решений канонической системы (1). (Вспомним, что θ — это полярный угол решения системы (1).) В дальнейшем важную роль играют следующие простые замечания. Нетрудно видеть, что гомеоморфизм C имеет неподвижные точки на $\mathfrak{C}$ в том и только в том случае, если

$$\Delta(\vartheta) \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \pi) \quad \text{при некотором } \vartheta, \tag{26}$$

т. е. $\Delta(\vartheta) = n\pi$ при некотором ϑ, где n — некоторое целое число. Поэтому гомеоморфизм C не имеет неподвижных точек на $\mathfrak{C}$ в том и только в том случае, если

$$\Delta(\vartheta) \not\equiv 0 \ (\operatorname{mod} \pi), \quad -\infty < \vartheta < +\infty. \tag{27}$$

В этом случае существует такое целое n, что

$$n\pi < \Delta(\vartheta) < (n+1)\pi, \quad -\infty < \vartheta < +\infty. \tag{28}$$

Вернемся к уравнению (17). В этом случае имеют место оценки (20) и (21), в которых

$$m(t) = \max\left|\frac{h_{11}(t) + h_{22}(t)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{h_{11}(t) - h_{22}(t)}{2}\right]^2 + h_{12}^2(t)}\right|, \tag{29}$$

$$l(t) = \sqrt{(h_{11}(t) - h_{22}(t))^2 + 4h_{12}^2(t)}. \tag{30}$$

Это вытекает из формул (10) и (11), а также из формулы

$$\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial \theta} = [h_{11}(t) - h_{22}(t)]\sin 2\theta + 2h_{12}(t)\cos 2\theta. \tag{31}$$

В заключение этого пункта выпишем дифференциальное уравнение для полярного радиуса r:

$$\frac{\dot r}{r} = \frac{[h_{22}(t) - h_{11}(t)]}{2}\sin 2\theta - h_{12}(t)\cos 2\theta \equiv g(t,\theta). \tag{32}$$

При известной функции $\theta(t)$, являющейся, как мы знаем, решением уравнения (17), это есть линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Сравнение формул (31) и (32) показывает, что

$$\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial \theta} = -2g(t,\theta). \tag{33}$$

3. При доказательстве основных теорем нам будут полезны приводимые ниже леммы, к изложению которых мы и переходим.

Рассмотрим решение $\theta(t)$ дифференциального уравнения (17), обладающее свойством

$$\theta(t + m\omega) = \theta(t) + n\pi \tag{34}$$

при некоторых целых n и m, причем без ограничения общности можно предполагать, что $m > 0$. Согласно (24) решение такого типа существует тогда и только тогда, когда число вращения дифференциального уравнения (17) является рациональным и имеет вид $\rho = n/m$. Функцию $\theta(t)$, для которой справедливо (34), назовем *периодической в обобщенном смысле.* На торе ей соответствует замкнутая кривая, которая замыкается, сделав m оборотов вдоль параллели $\mathfrak{U}$ и n оборотов вдоль меридиана $\mathfrak{C}$. В описанной ситуации говорят, что для дифференциального уравнения (17) имеет место *периодический случай.* Как известно, *фундаментальная группа* тора есть свободная коммутативная группа с двумя образующими $\{\mathfrak{U}\}$ и $\{\mathfrak{C}\}$ [9, с. 140]; нетрудно видеть, что гомотопический класс той замкнутой кривой, о которой шла речь, есть $m\{\mathfrak{U}\} \times n\{\mathfrak{C}\}$.

Следующее утверждение приводится без доказательства.

Лемма 1. *Пусть $\theta(t)$ — некоторое решение дифференциального уравнения* (17), *обладающее свойством* (34). *Тогда функция $a(t) \equiv g(t, \theta(t))$, где $g(t, \theta(t))$ определяется формулой* (32), *является $m\omega$-периодической, т. е.*

$$a(t + m\omega) = a(t). \tag{35}$$

Решая уравнение (32) при известной функции $\theta(t)$, получаем

$$r(m\omega) = e^{\int\limits_0^{m\omega} a(t)\,dt} r(0). \tag{36}$$

Пусть теперь $\mathbf{z}(t)$ — произвольное вещественное решение канонической системы, для которого при некотором целом m справедливо соотношение

$$\mathbf{z}(t + m\omega) = \nu \mathbf{z}(t), \tag{37}$$

где ν — некоторое вещественное число. Запишем вещественные компоненты $x(t)$ и $y(t)$ этого решения в полярной форме по формулам (16)

$$x(t) = r(t)\sin\theta(t), \quad y(t) = r(t)\cos\theta(t). \tag{38}$$

Здесь $r(t) = |\mathbf{z}(t)|$, а $\theta(t)$ — некоторое решение дифференциально уравнения (17).

Лемма 2. *Пусть $\mathbf{z}(t)$ — вещественное решение канонической системы, для которого справедливо соотношение* (37), *а $\theta(t)$ — соответствующая угловая функция. Тогда $\theta(t)$ является решением уравнения* (17), *обладающим свойством* (34). *Пусть, наоборот, $\theta(t)$ — решение уравнения* (17), *обладающее свойством* (34). *Тогда существует вещественное решение $\mathbf{z}(t)$ канонической системы, для которого $\theta(t)$ является угловой функцией и справедливо соотношение* (37).

□ Так как из (37) при $t = 0$ получаем, что $\mathbf{z}(m\omega) = \nu\mathbf{z}(0)$, то векторы $\mathbf{z}(m\omega)$ и $\mathbf{z}(0)$ коллинеарны, поэтому при некотором целом n справедливо равенство $\theta(m\omega) = \theta(0) + n\pi$. Отметим, что число n является четным, если $\nu > 0$ и, значит, векторы $\mathbf{z}(m\omega)$ и $\mathbf{z}(0)$ направлены в одну и ту же сторону, и нечетным, если $\nu < 0$ и, значит, векторы $\mathbf{z}(m\omega)$ и $\mathbf{z}(0)$ направлены в противоположные стороны. Функции $\theta(t + m\omega)$ и $\theta(t) + n\pi$ являются решениями дифференциального уравнения (17); поэтому из их совпадения при $t = 0$ (см. выше) в силу теоремы единственности вытекает, что $\theta(t + m\omega) = \theta(t) + n\pi$ при всех t. Мы показали, что решение $\theta(t)$ дифференциального уравнения (17) обладает свойством (34).

Докажем обратное утверждение. По функции $\theta(t)$ построим решение $r(t)$ дифференциального уравнения (32), а вместе с ним и вещественное решение $\mathbf{z}(t)$ канонической системы с компонентами $x(t) = r(t)\sin\theta(t)$ и $y(t) = r(t)\cos\theta(t)$. Ясно, что $\theta(t)$ является угловой функцией решения $\mathbf{z}(t)$. Далее, из (34) при $t = 0$ получаем $\theta(m\omega) = \theta(0) + n\pi$, откуда вытекает, что векторы $\mathbf{z}(m\omega)$ и $\mathbf{z}(0)$ коллинеарны. Поэтому $\mathbf{z}(m\omega) = \nu\mathbf{z}(0)$ при некотором вещественном ν. Так как $\mathbf{z}(t + m\omega)$ и $\nu\mathbf{z}(t)$ являются, очевидно, решениями канонической системы, и, кроме того, совпадают при $t = 0$, по теореме единственности они совпадают при всех t, т. е. справедливо соотношение (37). ■

Из формулы (37) получаем

$$r(t + m\omega) = |\nu| r(t). \tag{39}$$

Поэтому

$$r(m\omega) = |\nu| r(0). \tag{40}$$

Заметим, что согласно лемме 1 функция $a(t)$ в рассматриваемом случае является $m\omega$-периодической. Сравнивая формулы (36) и (40), находим

$$\int\limits_0^{m\omega} a(t)\,dt = \ln|\nu|. \tag{41}$$

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{z}(t)$ *— вещественное решение канонической системы, для которого справедливо соотношение* (37), *а* $\theta(t)$ *— соответствующая угловая функция. Тогда справедлива следующая формула:*

$$\int\limits_0^{m\omega} \frac{\partial f(t,\theta(t))}{\partial\theta}\,dt = -2\ln|\nu|. \tag{42}$$

□ В силу леммы 2 функция $\theta(t)$ обладает свойством (34). Поэтому, как мы отметили выше, функция $a(t)$ является $m\omega$-периодической. Из (33) в силу (41) вытекает формула (42). ■

Подготовительная работа завершена. Перейдем к изложению и доказательству основных теорем, в которых прослеживается связь числа вращения ρ и гомеоморфизма C с мультипликаторами канонической системы и, следовательно, с ее устойчивостью и неустойчивостью.

Отметим, что, в то время как число вращения ρ может принимать любое вещественное значение, гомеоморфизм C в изучаемой нами ситуации, как показывает приводимый ниже материал, может иметь две различные неподвижные точки (если мультипликаторы вещественные и различные), единственную неподвижную точку либо все точки неподвижные, т. е. гомеоморфизм C совпадает с тождественным отображением (если мультипликаторы вещественные и совпадающие), наконец, может не иметь ни одной неподвижной точки (если мультипликаторы невещественные).

4. Этот пункт посвящен вещественным мультипликаторам.

Теорема 1. *Гомеоморфизм* C *имеет неподвижные точки, т. е.*

$$Cz = z \quad \text{при некотором } z \in \mathfrak{C}, \tag{43}$$

тогда и только тогда, когда мультипликаторы канонической системы вещественные.

□ Пусть μ — вещественный мультипликатор. Тогда согласно (4) для некоторого вещественного решения $\mathbf{z}(t)$ канонической системы имеем

$$\mathbf{z}(t+\omega) = \mu\mathbf{z}(t),$$

т. е. выполнено условие (37) при $m = 1$ и $\nu = \mu$. По лемме 2 угловая функция $\theta(t)$ решения $\mathbf{z}(t)$ обладает свойством (34), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\theta(t+\omega) = \theta(t) + n\pi$$

при некотором целом n. Мы видим, что $\theta(\omega) = \theta(0) + n\pi$, т. е. $c(\vartheta) = \vartheta + n\pi$, откуда вытекает, что

$$\Delta(\vartheta) \equiv 0 \pmod{\pi} \quad \text{при } \vartheta = \theta(0).$$

Согласно (26) из последнего соотношения следует, что гомеоморфизм C имеет неподвижные точки, т. е. имеет место (43).

Проводя рассуждения в обратном порядке, нетрудно доказать обратное утверждение. ■

Теорема 2. *Число вращения ρ является целым числом, т. е.*

$$\rho = n, \tag{44}$$

тогда и только тогда, когда мультипликаторы канонической системы вещественные. Если мультипликаторы не только вещественные, но и различные, то каноническая система, будучи сильно неустойчивой, принадлежит n-й области неустойчивости.

□ Если мультипликаторы канонической системы вещественные, то по теореме 1 гомеоморфизм C имеет неподвижные точки. Поэтому имеет место соотношение (26), откуда вытекает, что $\Delta(\vartheta) = n\pi$ при некотором ϑ и некотором целом n. Согласно (24) это означает, что $\rho = n$, так как в рассматриваемом случае $m = 1$, и равенство (44) установлено.

Если мультипликаторы не только вещественные, но и различные, то каноническая система сильно неустойчивая и согласно таблице [1, с. 557] получаем, что система принадлежит n-й области неустойчивости, где число n взято из формулы (44). Напомним, что функция $\Delta(\vartheta)$ совпадает с функцией углов поворота решений канонической системы. ■

Теорема 1 может быть существенно дополнена следующим образом. Пусть $|A| > 1$. Тогда мультипликаторы канонической системы вещественные и различные. Обозначим их μ_+ и μ_-, $\mu_+ \neq \mu_-$ и распорядимся их знаком так, чтобы

$$|\mu_+| > 1 > |\mu_-|. \tag{45}$$

Теорема 3. *Если мультипликаторы μ_+ и μ_- канонической системы вещественные и различные, $\mu_+ \neq \mu_-$, то гомеоморфизм C имеет точно две различные неподвижные точки z_+ и z_-, $z_+ \neq z_-$, причем они устойчивы, каждая в своем направлении в следующем смысле:*

$$\begin{aligned} &\text{если } z \neq z_-, \text{ то } z_k \to z_+ \text{ при } k \to +\infty, \\ &\text{если } z \neq z_+, \text{ то } z_k \to z_- \text{ при } k \to -\infty, \end{aligned} \tag{46}$$

где $z = z_0 \in \mathfrak{C}$ и $z_k = C^k z$ при $k = 0, \pm 1, \dots$.

Для уравнения (17) это означает, что существует точно два различных ω-периодических в обобщенном смысле решения $\theta_+(t)$ и $\theta_-(t)$, для которых

$$\theta_\pm(t + \omega) = \theta_\pm(t) + n\pi \tag{47}$$

при некотором целом n, причем решение $\theta_+(t)$ асимптотически устойчиво вправо, т. е. при $t \to +\infty$, и решение $\theta_-(t)$ асимптотически устойчиво влево, т. е. при $t \to -\infty$.

□ Рассмотрим решения $\mathbf{z}_+(t)$ и $\mathbf{z}_-(t)$ канонической системы, для которых

$$\mathbf{z}_\pm(t + \omega) = \mu_\pm \mathbf{z}_\pm(t).$$

Мы видим, что для них справедливы соотношения (37) при $m = 1$ и $\nu = \mu_\pm$. По лемме 2 угловые функции $\theta_+(t)$ и $\theta_-(t)$ этих решений соответственно обладают свойством (34) при $m = 1$ и некотором n, т. е. имеет место (17) (можно показать, что на самом деле число n не зависит от знака угловой функции.) Обозначим через z_+ и z_- точки на окружности $\mathfrak{C}$, отвечающие ν_+ и ν_-, где $\nu_\pm = \theta_\pm(0)$. Согласно (47) при $t = 0$ имеем $\theta_\pm = \theta_\pm(0) + n\pi$, откуда вытекает, что $c(\nu_\pm) = \nu_\pm + n\pi$ и, наконец, $\Delta(\vartheta_\pm) = 0 \pmod{\pi}$. Тогда согласно (26) $Cz_\pm = z_\pm$. Так как углы ν_+ и ν_- различные по модулю π, ибо они отвечают линейно независимым собственным векторам a_+ и a_- матрицы монодромии, то неподвижные точки z_+ и z_- различные, $z_+ \neq z_-$. Других неподвижных точек у отображения C нет, так как у матрицы монодромии нет других собственных направлений.

Осталось объяснить устойчивость неподвижных точек z_+ и z_- в указанном выше смысле или, что то же самое, устойчивость обобщенных периодических решений $\theta_+(t)$ и $\theta_-(t)$ в указанных направлениях. Последнее немедленно вытекает из формул

$$-2\ln|\mu_+| = \int\limits_0^\omega \frac{\partial f(t,\theta_+(t))}{\partial\theta}\,dt < 0, \quad -2\ln|\mu_-| = \int\limits_0^\omega \frac{\partial f(t,\theta_-(t))}{\partial\theta}\,dt > 0,$$

получающихся из (42) с учетом неравенств (45). Локальная устойчивость точек z_+ и z_- в указанном выше смысле следует из очевидных формул

$$c'(\vartheta_+) = \exp\int\limits_0^\omega \frac{\partial f(t,\theta_+(t))}{\partial\theta}\,dt < 1, \quad c'(\vartheta_-) = \exp\int\limits_0^\omega \frac{\partial f(t,\theta_-(t))}{\partial\theta}\,dt > 1.$$

Докажем первое утверждение в (46). Проще всего оно устанавливается на языке обобщенных периодических решений $\theta_+(t)$ и $\theta_-(t)$. Пусть $\vartheta_+ = \theta_+(0)$ и $\vartheta_- = \theta_-(0)$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \leq \vartheta_+ < \vartheta_- < \pi$. Проверим, что

$$0 < c(\vartheta_+) - c(\vartheta_-) < \vartheta - \vartheta_+ \quad \text{при } 0 < \vartheta - \vartheta_+ < \vartheta_- - \vartheta_+$$

(аналогичные рассуждения применимы и при $\vartheta_- - \vartheta_+ - \pi < \vartheta - \vartheta_+ < 0$), откуда и вытекает справедливость обсуждаемого утверждения.

Действительно, написанное выше неравенство имеет место в силу асимптотической устойчивости решения $\vartheta_+(t)$ при $0 < \vartheta - \vartheta_+ < \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Если допустить, что оно не верно, то найдется такое ϑ_*, для которого

$$0 < c(\vartheta_*) - c(\vartheta_+) = \vartheta_* - \vartheta_+ \quad \text{и} \quad 0 < \vartheta_* - \vartheta_+ < \vartheta_- - \vartheta_+.$$

Тогда так как $c(\vartheta_+) = \vartheta_+ + n\pi$, то и $c(\vartheta_*) = \vartheta_* + n\pi$. Это означает, что $Cz_* = z_*$, в то время как у гомеоморфизма C нет неподвижных точек, кроме z_+ и z_-; здесь z_* — точка окружности $\mathfrak{C}$, соответствующая ϑ_*. Полученное противоречие доказывает справедливость написанного выше неравенства.

Аналогично доказывается и второе утверждение в (46). ■

Теорема 3 говорит о том, что сильная неустойчивость канонической системы имеет место тогда и только тогда, когда гомеоморфизм C имеет точно две различные неподвижные точки.

5. Этот пункт посвящен невещественным мультипликаторам.

Теорема 4. *Гомеоморфизм C не имеет неподвижных точек, т. е.*

$$Cz \neq z \quad \textit{при } z \in C, \tag{48}$$

тогда и только тогда, когда мультипликаторы невещественные.

Теорема 4 немедленно вытекает из теоремы 1. В ней утверждается, что сильная устойчивость канонической системы имеет место тогда и только тогда, когда гомеоморфизм C не имеет неподвижных точек.

Теорема 5. *Число вращения ρ нецелое, т. е.*

$$\rho \neq n, \tag{49}$$

тогда и только тогда, когда мультипликаторы канонической системы невещественные. При выполнении последнего условия каноническая система, будучи сильно устойчивой, принадлежит n-й области устойчивости, где n — целая часть числа вращения ρ:

$$n = [\rho]. \tag{50}$$

Далее, могут представиться две возможности: либо

$$\rho \text{ — рациональное число,} \quad \rho = \frac{n}{m}, \tag{51}$$

где n и m — целые взаимно простые числа (и $m \neq \pm 1$); в этом случае m-я степень гомеоморфизма C имеет неподвижные точки, т. е.

$$C^m z = z \quad \text{при некотором } z \in \mathfrak{C}, \tag{52}$$

и имеет место периодический случай; либо

$$\rho \text{ — иррациональное число;} \tag{53}$$

в этом случае никакая степень гомеоморфизма C (кроме нулевой) не имеет неподвижных точек:

$$C^m z \neq z \quad \text{при } z \in \mathfrak{C}, \quad m \neq 0, \tag{54}$$

и всегда имеет место эргодический случай.

□ Справедливость первого утверждения теоремы — формула (49) — непосредственно вытекает из теоремы 2. Пусть мультипликаторы канонической системы невещественные. Тогда по теореме 4 гомеоморфизм C не имеет неподвижных точек. Поэтому существует такое целое число n, для которого справедливы двусторонние оценки (28). Из этих оценок вытекает, что

$$n < \rho < n + 1.$$

С другой стороны, согласно таблице [1, с. 567] двусторонние оценки (28) означают, что каноническая система сильно устойчива и принадлежит n-й области устойчивости. Формула (50) доказана.

Далее, пусть число вращения ρ есть рациональное число, т. е. имеет место формула (51). Тогда согласно (24) m-я степень гомеоморфизма C имеет неподвижные точки, т. е. имеет место соотношение (52). Более того, из (24) вытекает, что дифференциальное уравнение (17) имеет такое решение $\theta(t)$, для которого справедливо равенство (34), где числа m и n такие же, как в формуле (51). Мы видим, что $\theta(t)$ является периодическим в обобщенном смысле. Это и означает по определению, что имеет место периодический случай.

Однако этот периодический случай разительным образом отличается от периодического случая, рассмотренного в теореме 3. Действительно, так как угловая функция $\theta(t)$ обладает свойством (34), по лемме 2 ей отвечает вещественное решение $\mathbf{z}(t)$ канонической системы, для которого имеет место (37) с некоторым вещественным ν. Покажем, что $\nu = \pm 1$. Полагая в (37) $t = 0$, получаем $\mathbf{z}(m\omega) = \nu \mathbf{z}(0)$, откуда вытекает, что $\mathbf{Z}(\omega)^m \mathbf{a} = \nu \mathbf{a}$, где $\mathbf{a} = \mathbf{z}(0)$. Итак, мы видим, что ν является собственным значением m-й степени матрицы монодромии $\mathbf{Z}(\omega)$. Так как в рассматриваемом случае мультипликаторы, т. е. собственные значения матрицы монодромии, различны и по модулю равны единице, то $|\nu| = 1$, и наше утверждение доказано. Поэтому по лемме 3 получаем (см. формулу (42))

$$\int_0^{m\omega} \frac{\partial f(t,\theta(t))}{\partial\theta}\,dt = -2\ln|\nu| = 0.$$

Это означает, что

$$(c^m)'(\vartheta) = \exp\int_0^{m\omega} \frac{\partial f(t,\theta(t))}{\partial\theta}\,dt = 1,$$

где $\vartheta = \theta(0)$.

Пусть теперь число вращения ρ есть иррациональное число, т. е. имеет место формула (53). В этом случае никакая степень гомеоморфизма C (кроме нулевой) не имеет неподвижных точке и справедливо соотношение (54).

Эргодичность в случае иррационального числа вращения устанавливается следующим образом. Во-первых,

$$\sigma'(\vartheta) = \exp\int_0^{\omega} \frac{\partial f(t,\theta(t,\vartheta))}{\partial\theta}\,dt$$
$$= \exp\int_0^{\omega} \{[h_{11}(t) - h_{22}(t)]\sin 2\theta(t,\vartheta) + 2h_{12}(t)\cos 2\theta(t,\vartheta)\}\,dt,$$

и так как $\theta(t,\vartheta)$ непрерывна, а функции $h_{ij}(t)$ суммируемы, то производная $\sigma'(\vartheta)$ непрерывна. Во-вторых,

$$\sigma''(\vartheta) = \left(\exp\int_0^{\omega} \frac{\partial f(t,\theta(t,\vartheta))}{\partial\theta}\,dt\right)\int_0^{\omega} \frac{\partial^2 f(t,\theta(t,\vartheta))}{\partial^2\theta}\,\frac{\partial\theta(t,\vartheta)}{\partial\vartheta}\,dt$$
$$= \exp\left(\int_0^{\omega} \{[h_{11}(t) - h_{22}(t)]\sin 2\theta(t,\vartheta) + 2h_{12}(t)\cos 2\theta(t,\vartheta)\}\,dt\right)$$
$$\times\, 2\int_0^{\omega} \{[h_{11}(t) - h_{22}(t)]\cos 2\theta(t,\vartheta) - h_{12}(t)\sin 2\theta(t,\vartheta)\}$$
$$\times \exp\left(\int_0^{t} \{[h_{11}(s) - h_{22}(s)]\sin 2\theta(s,\vartheta) + 2h_{12}(s)\cos 2\theta(s,\vartheta)\}\,ds\right)dt,$$

и $c''(\vartheta)$ также непрерывна. Так как тем самым первая производная $c'(\vartheta)$ имеет на отрезке $[0,\omega]$ ограниченную вариацию, имеет место эргодический случай [3, с. 448]. ■

Отметим характер решений канонической системы в случае невещественных мультипликаторов. В этом случае каноническая система, как известно, сильно устойчива, а все ее решения оказываются почти-периодическими [1, с. 526]. Уточним последнее утверждение. Если число вращения рациональное и $\rho = m/n$, то все решения канонической системы периодические с периодом $m\omega$

или $2m\omega$. Если число вращения иррациональное, то все решения канонической системы квазипериодические с двумерным частотным базисом [10, с. 66].

Посмотрим, как в последнем случае это отражается на характере решений дифференциального уравнения (17). По теореме Боля [3, с. 454] существует такая функция $h(t, \theta)$, непрерывная по совокупности переменных и удовлетворяющая условиям периодичности (18), что любое решение уравнения (17) может быть записано в виде

$$\theta(t) = t\rho^* + c + h(t, t\rho^* + c), \tag{55}$$

где c — произвольная постоянная и $\rho^* = (\pi/\omega)\rho$. Из этого представления нетрудно вывести справедливость следующей теоремы.

Теорема 6. *Если число вращения ρ иррациональное, то любое решение $\theta(t)$ дифференциального уравнения* (17) *есть сумма линейной функции с угловым коэффициентом ρ^* и некоторой квазипериодической функции с двумерным частотным базисом.*

Легко заметить, что теорему 6 (не представление (55)!) можно также получить из теоремы Бора об аргументе почти-периодической функции [10, с. 128-135]; в силу некоторых приложений к механике, восходящих еще к Лагранжу, число ρ^* называется *средним движением.*

6. Изучая дифференциальные уравнения на торе, В. А. Плисс открыл устойчивые числа вращения [5, с. 179]. Можно показать, что число вращения ρ дифференциального уравнения (17) непрерывно зависит от гамильтониана $\mathbf{H}(t)$ в метрике банахова пространства $\mathfrak{B}$. Однако иногда оно не только непрерывно зависит от гамильтониана, но и сохраняет постоянное значение в некоторой окрестности этого гамильтониана (пример тому — теорема 2, согласно которой $\rho = n$ на всей области неустойчивости, содержащей гамильтониан $\mathbf{H}(t)$, являющейся открытым множеством).

Так как мы изучаем дифференциальные уравнения на торе в условиях Каратеодори, приведем определение устойчивого числа вращения в новой ситуации.

Наряду с уравнением (19), в котором правая часть удовлетворяет условиям периодичности (18), а также подчинена ограничениям (20) и (21), рассмотрим возмущенное уравнение

$$\dot{\theta} = f(t, \theta) + \Delta f(t, \theta), \tag{56}$$

где $\Delta f(t, \theta)$ удовлетворяет ограничениям такого же типа, как и $f(t, \theta)$, причем

$$|\Delta f(t, \theta)| \leq \Delta m(t), \tag{57}$$

где $\Delta m(t)$ — некоторая неотрицательная измеримая ω-периодическая функция, суммируемая на отрезке $[0, \omega]$.

Число вращения ρ дифференциального уравнения (19) называется *устойчивым,* если можно указать такие $\varepsilon > 0$, что число вращения $\tilde{\rho}$ возмущенного уравнения (56) не меняется:

$$\tilde{\rho} = \rho$$

при условии, что

$$\int\limits_0^\omega \Delta m(t)\, dt < \varepsilon \tag{58}$$

(ср. с [5, с. 176]).

Имеет место следующая

Теорема 7. *Число вращения дифференциального уравнения* (17) *является устойчивым тогда и только тогда, когда оно является целым, а неподвижные точки гомеоморфизма C — различными.*

Согласно теореме 3 в теореме 7 утверждается, что число вращения дифференциального уравнения (17) устойчиво тогда и только тогда, когда каноническая система сильно неустойчива. Таким образом, складывается внешне парадоксальная ситуация, когда число вращения устойчиво, если каноническая система сильно неустойчива, и число вращения неустойчиво, если каноническая система сильно устойчива.

$\square$ Мы ограничимся доказательством только достаточности. Пусть число вращения ρ дифференциального уравнения (17) является целым, $\rho = n$, причем гомеоморфизм C имеет различные неподвижные точки. Согласно теоремам 2 и 3 в этом случае каноническая система сильно неустойчива и принадлежит n-й области неустойчивости; поэтому в соответствии с таблицей [1, с. 557] имеют место двусторонние оценки

$$\min_{0\le\vartheta\le\pi} \Delta(\vartheta) < n\pi < \max_{0\le\vartheta\le\pi} \Delta(\vartheta).$$

С помощью леммы об интегральных неравенствах нетрудно показать, что

$$|\tilde{\Delta}(\vartheta) - \Delta(\vartheta)| \le e^{\int\limits_0^\omega l(t)\,dt} \int\limits_0^\omega \Delta m(t)\,dt, \tag{59}$$

где функция углов поворота решений $\widetilde{\Delta}(\vartheta)$ построена для возмущенного уравнения (56). Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то и функция $\widetilde{\Delta}(\vartheta)$ мало отличается от функции $\Delta(\vartheta)$. Поэтому функция $\widetilde{\Delta}(\vartheta)$ также удовлетворяет двусторонним оценкам

$$\min_{0\le\vartheta\le\pi} \widetilde{\Delta}(\vartheta) < n\pi < \max_{0\le\vartheta\le\pi} \widetilde{\Delta}(\vartheta),$$

из которых вытекает согласно той же самой таблице [1, с. 557], что возмущенная каноническая система сильно неустойчива и принадлежит n-й области неустойчивости, откуда в силу теоремы 2 вытекает, что $\tilde{\rho} = n$.

В приведенном выше доказательстве молчаливо предполагалось, что возмущенное уравнение (56) также соответствует некоторому гамильтониану, скажем $\mathbf{H}(t) + \Delta\mathbf{H}(t)$. Однако возмущенное уравнение (56), точнее возмущение $\Delta f(t,\theta)$, может быть самого общего вида, о чем говорилось при определении устойчивого числа вращения. Для доказательства теоремы в этом случае нужно слегка изменить рассуждения.

Пусть число вращения ρ дифференциального уравнения (17) является целым, $\rho = n$, причем гомеоморфизм C имеет различные неподвижные точки. Построим функцию последования [5, с. 178]

$$d(\vartheta) = c(\vartheta) - \vartheta - n\pi. \tag{60}$$

Согласно теореме 2 в этом случае существует точка ϑ_0 такая, что

$$d(\vartheta_0) = 0, \quad d'(\vartheta_0) \ne 0. \tag{61}$$

В качестве ϑ_0 можно взять как ϑ_+, так и ϑ_-. Мы видим, что функция последования меняет знак. Поэтому число вращения ρ устойчиво [5, с. 179, теорема 11.2]. $\blacksquare$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
2. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. Т. 2.
3. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
4. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.
5. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.; Л.: Наука, 1964.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
7. *Перов А. И., Эгле И. Ю.* К теории Пуанкаре — Данжуа многомерных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 5. С. 801–810.
8. *Жужома Е. В.* Топологическая классификация слоений, задаваемых одномерными формами Пфаффа на n-мерном торе // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 8. С. 1385–1393.
9. *Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н.* Введение в топологию. М.: Высш. шк., 1980.
10. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953.

Статья поступила 27 марта 2008 г.

Перов Анатолий Иванович
Воронежский гос. университет,
факультет прикладной математики, информатики и механики,
кафедра нелинейных колебаний,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
`anperov@mail.ru`