*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2010. Том 51, № 2*

*УДК 517.982*

# ИНДЕКС БАНАХА — САКСА НЕКОТОРЫХ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

**А. И. Новикова**

**Аннотация.** Построен пример подпространства Радемахера, не обладающего свойством Банаха — Сакса, и исследована связь между индексами Банаха — Сакса пространства с симметричным базисом и сопряженного к нему пространства.

**Ключевые слова:** перестановочно-инвариантное пространство, система Радемахера, индекс Банаха — Сакса.

## § 1. Введение

*Перестановкой* измеримой на $[0,1]$ функции $x(t)$ [1, 2.2] называется убывающая непрерывная слева функция $x^*(t)$, определяемая формулой

$$x^*(t) = \inf\{\tau : n_{|x|}(\tau) < t\},$$

где $n_x(\tau) = \mathrm{mes}\{t : x(t) > \tau\}$ — функция распределения. Банахово пространство $E = E[0,1]$ с мерой Лебега называется *симметричным* или *перестановочно-инвариантным*, если из того, что $y \in E$ и $x^*(t) \le y^*(t)$ для всех $t \in [0,1]$, следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E \le \|y\|_E$ [1, 2.4; 2, 2.a]. Примерами симметричных пространств служат пространства $L_p[0,1]$, $1 \le p \le \infty$, пространства Орлича $L_M$ с нормой

$$\|x\|_{L_M} = \inf\left\{\lambda : \lambda > 0, \int\limits_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right)\, dt \le 1\right\},$$

где $M$ — функция Орлича, т. е. непрерывная неубывающая выпуклая на $[0,\infty)$ функция, $M(0) = 0$. Аналогично вводится пространство последовательностей Орлича $l_M$ с нормой

$$\|x\|_{l_M} = \inf\left\{\lambda : \lambda > 0, \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_n|}{\lambda}\right) \le 1\right\}.$$

Говорят, что банахово пространство $E$ *обладает свойством Банаха — Сакса*, если любая слабо сходящаяся к 0 последовательность $\{x_n\} \subset E$ содержит подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left\|\sum_{k=1}^{m} x_{n_k}\right\|_E = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (08–01–00226а).

Данное свойство получило свое название после того, как Банах и Сакс доказали, что этим свойством обладают пространства $L_p$, $1 \le p < \infty$ [3, 12.3]. О свойстве Банаха — Сакса симметричных пространств см. [4].

*Индексом Банаха — Сакса* $\gamma(E)$ банахова пространства $E$ [5] называется точная верхняя граница множества чисел $p$, обладающих тем свойством, что любая слабо сходящаяся к 0 последовательность $\{x_n\} \subset E$ содержит подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что

$$\sup_m m^{-\frac{1}{p}} \left\| \sum_{k=1}^{m} x_{n_k} \right\|_E < \infty.$$

Пусть $E$ — симметричное пространство на $[0,1]$. Обозначим через $R(E)$ подпространство $E$, порожденное системой Радемахера $r_k(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n \pi t)$, $t \in [0,1]$. Последовательность $x = (x_1, x_2, \dots)$ принадлежит $R(E)$, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k r_k$ принадлежит $E$ и

$$\|x\|_{R(E)} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k \right\|_E .$$

Так как $\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k r_k \right\|_E = \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} \epsilon_k x_k r_{\pi(k)} \right\|_E$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $x_k \in \mathbb{R}^1$, $\epsilon_k = \pm 1$ и перестановки $\pi$ чисел $1, 2, \dots, n$ [2, 2.b], то естественный базис в $R(E)$ является симметричным. В силу неравенства Хинчина $R(L_p)$ $(1 \le p < \infty)$ совпадает с $l_2$ с точностью до эквивалентных норм, $R(L_\infty) = l_1$ [6].

Пусть $X_0$, $X_1$ — банаховы пространства, непрерывно вложенные в отделимое топологическое пространство. Сумму $X_0 + X_1$ и пересечение $X_0 \cap X_1$ будем рассматривать с обычными нормами [2, 2.g]:

$$\|x\|_{X_0+X_1} = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : \ x = x_0 + x_1, \ x_0 \in X_0, \ x_1 \in X_1\},$$

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}.$$

Через $\mathscr{I}(X_0, X_1)$ будем обозначать множество всех интерполяционных относительно $(X_0, X_1)$ пространств. Банахово пространство $X$ называется *интерполяционным относительно пары* $(X_0, X_1)$, если имеет место непрерывное вложение $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ и любое линейное ограниченное отображение $T : X_0 + X_1 \to X_0 + X_1$, сужения которого на $X_0$ и $X_1$ представляют собой ограниченные линейные отображения $T : X_0 \to X_0$, $T : X_1 \to X_1$, также ограниченно действует из $X$ в $X$ [7, 2.4].

Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [8].

**Лемма.** *Для того чтобы банахово пространство последовательностей $X$ совпадало с пространством $R(E)$ для некоторого симметричного пространства $E$, необходимо и достаточно, чтобы $X \in \mathscr{I}(l_1, l_2)$.*

## § 2. Пример пространства без свойства Банаха — Сакса

В статье [9] построен пример рефлексивного банахова пространства с безусловным, но не симметричным базисом, не обладающего свойством Банаха — Сакса. С помощью этого результата мы построим подпространство Радемахера некоторого симметричного пространства, не обладающее свойством Банаха — Сакса.

В [10, с. 125–127] приведена конструкция, позволяющая по банаховым пространствам $X$, $E$, $F$ и последовательности $\{m_n\}$ строить новые банаховы пространства с интересными свойствами. Пусть $E$ и $F$ — банаховы пространства последовательностей такие, что единичные векторы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ образуют симметричный базис с константой симметричности, равной 1 как в $E$, так и в $F$. Предположим, что

1) для каждой последовательности $\alpha = (a_1, a_2, \dots) \in F$ выполнено $\|\alpha\|_E \leq \|\alpha\|_F$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_E(n)/\varphi_F(n) = 0$, где $\varphi_E$ и $\varphi_F$ — фундаментальные функции пространств $E$ и $F$ соответственно, т. е. $\varphi_E(n) = \|(\underbrace{1, \dots, 1}_{n}, 0, \dots)\|_E$.

Для каждого $m \geq 1$ определим новую норму на $E$, положив

$$\|\alpha\|_m = \inf\left\{\left(\|\beta\|_E^2 + \|\gamma\|_F^2\right)^{1/2};\ \alpha = \frac{1}{m}\beta + m\gamma,\ \beta \in E,\ \gamma \in F\right\}.$$

Пусть $\alpha = \frac{1}{m}\beta + m\gamma$, как описано выше, тогда

$$\|\alpha\|_E = \left\|\frac{\beta}{m} + m\gamma\right\| \leq (m^{-2} + m^2)^{1/2}\left(\|\beta\|_E^2 + \|\gamma\|_F^2\right)^{1/2} \leq 2m\left(\|\beta\|_E^2 + \|\gamma\|_F^2\right)^{1/2},$$

откуда следует, что $\|\alpha\|_E \leq 2m\|\alpha\|_m$ для любого $\alpha \in E$. С другой стороны, очевидно $\|\alpha\|_m \leq m\|\alpha\|_E$, $\alpha \in E$. Более точную оценку можно получить для $\alpha \in F$, а именно для $\alpha = m\gamma$, $\gamma \in F$, $\|\alpha\|_m \leq \|\gamma\|_F = \left\|\frac{1}{m}\alpha\right\|_F = \frac{1}{m}\|\alpha\|_F$.

Таким образом, отсюда следует, что пространство $E_m = (E, \|\cdot\|_m)$ изоморфно $E$ и тождественное отображение из $F$ в $E_m$ имеет норму, меньшую $m^{-1}$.

Пусть теперь $X$ — банахово пространство с нормированным безусловным базисом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, константа безусловности которой равна 1. Для любой возрастающей последовательности чисел $\{1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots\}$ такой, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n} < \infty$, определим $Y = Y\big(E, F, X, \{m_n\}_{n=1}^{\infty}\big)$ — пространство всех последовательностей $\alpha \in E$, для которых

$$\|\alpha\|_Y = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha\|_{m_n} x_n\right\|_X < \infty.$$

Условие, наложенное на последовательность $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, позволяет нам быть уверенными, что тождественное отображение из $F$ в $Y$ является ограниченным оператором. Действительно, для любого $\gamma \in F$ имеем

$$\|\gamma\|_Y = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \|\gamma\|_{m_n} x_n\right\|_X \leq \|\gamma\|_F \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-1}.$$

Кроме того, для любого $\alpha \in Y$ выполнено

$$\|\alpha\|_Y = \left\|\sum_n \|\alpha\|_{m_n} x_n\right\|_X \geq \frac{\|\alpha\|_E}{2}\left\|\sum_n \frac{1}{m_n} x_n\right\|_X.$$

В частности, отсюда следует, что $F \subset Y \subset E$ и единичные векторы принадлежат $Y$ и образуют симметричный базис. Действительно, пространство $Y$ является идеалом, поскольку все $E_{m_n}$ и $X$ — идеальные структуры [10, 1.c.7], а в силу симметричности базиса пространства $E_m$ для любого $m \geq 1$ имеем

$$\|\alpha^*\|_Y = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha^*\|_{m_n} x_n\right\|_X = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha\|_{m_n} x_n\right\|_X = \|\alpha\|_Y$$

для любой $\alpha \in Y$.

**Теорема 1** [10, 3.b.4]. *Для любых $E, F$ и $X$ с указанными выше свойствами существует возрастающая последовательность чисел $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ с $\sum\limits_{n=1}^\infty m_n^{-1} < \infty$ такая, что $Y = Y\big(E, F, X, \{m_n\}_{n=1}^\infty\big)$ содержит дополняемое подпространство, изоморфное $X$. Более того, любое бесконечномерное подпространство $Y$ содержит бесконечномерное подпространство, которое изоморфно подпространству $E$ или подпространству $X$.*

**Теорема 2.** *Существует симметричное пространство $G = G[0,1]$ такое, что пространство последовательностей $Y = R(G)$ не обладает свойством Банаха — Сакса.*

Доказательство. Возьмем в качестве пространства $X$ рефлексивное пространство с безусловным базисом, не обладающее свойством Банаха — Сакса, построенное в [9], и $E = l_q$, $F = l_p$, где $1 < p < q < 2$. Используя теорему 1, построим пространство последовательностей с симметричным базисом $Y = Y\big(E, F, X, \{m_n\}_{n=1}^\infty\big)$, содержащее дополняемое подпространство, изоморфное $X$ и, следовательно, не обладающее свойством Банаха — Сакса. Докажем, что $Y$ рефлексивное. Действительно, как показано в [10, 3.b.4], $Y$ не содержит подпространства, изоморфного $l_1$ или $c_0$. Следовательно, $Y$ также рефлексивно по теореме [10, 1.c.12(a)].

В силу леммы остается доказать, что данное пространство $Y$ является интерполяционным относительно пары $(l_1, l_2)$. Пусть оператор $T : (E, F) \to (E, F)$ действует ограниченно. Тогда

$$\begin{aligned}\|T\alpha\|_{m_n} &= \inf\big\{\big(\|T\beta\|_E^2 + \|T\gamma\|_F^2\big)^{1/2};\ T\alpha = (1/m_n)T\beta + m_n T\gamma,\ T\beta \in E,\ T\gamma \in F\big\}\\ &\le \max(\|T\|_{\mathscr{L}(E)}, \|T\|_{\mathscr{L}(F)}) \inf\big\{\big(\|\beta\|_E^2 + \|\gamma\|_F^2\big)^{1/2};\\ &\quad \alpha = (1/m_n)\beta + m_n\gamma,\ \beta \in E,\ \gamma \in F\big\} = \max(\|T\|_{\mathscr{L}(E)}, \|T\|_{\mathscr{L}(F)})\|\alpha\|_{m_n}.\end{aligned}$$

Отсюда в силу безусловности базиса $\{x_n\} \subset X$ следует, что

$$\begin{aligned}\|T\alpha\|_Y = \Big\|\sum_{n=1}^\infty \|T\alpha\|_{m_n} x_n\Big\|_X &\le \Big\|\sum_{n=1}^\infty \max(\|T\|_{\mathscr{L}(E)}, \|T\|_{\mathscr{L}(F)})\|\alpha\|_{m_n} x_n\Big\|_X\\ &= \max(\|T\|_{\mathscr{L}(E)}, \|T\|_{\mathscr{L}(F)})\|\alpha\|_Y.\end{aligned}$$

Таким образом, пространство $Y$ принадлежит $\mathscr{I}(l_p, l_q)$, следовательно [7, 3.5.3], $Y$ является интерполяционным относительно пары $(l_1, l_2)$. $\square$

## § 3. Индекс Банаха — Сакса сопряженного пространства

Рассмотрим вопрос о том, как связаны между собой индексы Банаха — Сакса симметричного пространства $E$ и сопряженного к нему пространства $E^*$. Прежде всего заметим, что $\gamma(c_0) = \gamma(l_1) = \infty$ и, следовательно, $\frac{1}{\gamma(E)} + \frac{1}{\gamma(E^*)} = 0$ для $E = c_0$. Ниже будет показано, что этот случай является исключительным.

**Теорема 3.** *Пусть $E \ne c_0$ — пространство последовательностей с симметричным базисом, $E^*$ — сопряженное к нему пространство. Тогда*

$$1 \le \frac{1}{\gamma(E)} + \frac{1}{\gamma(E^*)} \le 2.$$

Доказательство. Правое неравенство очевидно, поскольку для любого пространства с симметричным базисом $E$ верно $\gamma(E) \geq 1$. Пусть $\gamma(E) = r$. Будем считать $E^*$ также сепарабельным. Если $E^*$ несепарабельно, то $\gamma(E^*) = 1$ [5] и левое неравенство выполнено. Пусть $\{e_n^*\}$ — биортогональный базис в $E^*$. Он слабо сходится к нулю, так как $E^* \neq l_1$. Следовательно,

$$m = \sum_{k=1}^{m} (e_k^*, e_k) \leq \left\| \sum_{k=1}^{m} e_k^* \right\|_{E^*} \left\| \sum_{k=1}^{m} e_k \right\|_{E} \leq C m^{1/r} \left\| \sum_{k=1}^{m} e_k^* \right\|_{E^*}.$$

Таким образом, $\left\| \sum\limits_{k=1}^{m} e_k^* \right\|_{E^*} \geq 1/C \cdot m^{\frac{r-1}{r}}$, стало быть, $\gamma(E^*) \leq \frac{r}{r-1}$.

Имеем

$$\frac{1}{\gamma(E)} + \frac{1}{\gamma(E^*)} \geq \frac{1}{r} + \frac{r-1}{r} = 1. \qquad \square$$

Константу правого неравенства нельзя улучшить, поскольку для любого $0 < \epsilon < 1$ существуют $1 < p < q < \infty$ такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = 2 - \epsilon$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\right)$ и $\gamma(l_{p,q}) = \min(p,q) = p$, $\gamma(l_{p,q}^*) = \gamma(l_{p',q'}) = \min(p',q') = q'$ [11]. Здесь $l_{p,q}$ — пространства последовательностей Лоренца с нормой

$$\|x\|_{p,q} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^*)^q k^{q/p-1} \right)^{1/q}.$$

Левое неравенство теоремы 3, очевидно, превращается в равенство для пространств $l_p$, $1 \leq p < \infty$. Кроме того, для пространств $l_{p,\infty}^0$, $1 < p < \infty$, имеем $\gamma\big(l_{p,\infty}^0\big) = p$ [12] и $\gamma(l_{p',1}) = \gamma\big(\big(l_{p,\infty}^0\big)^*\big) = p'$ [13], т. е. $\frac{1}{\gamma(l_{p,\infty}^0)} + \frac{1}{\gamma((l_{p,\infty}^0)^*)} = 1$. Следующая теорема показывает, что эти пространства не единственные.

**Теорема 4.** *Пусть $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Существует пространство $E$ с симметричным базисом, не содержащее подпространства, изоморфного $l_p$, и такое, что его индекс Банаха — Сакса удовлетворяет условию $\gamma(E) = p$, $\gamma(E^*) = p'$, где $E^*$ — сопряженное к $E$ пространство.*

Доказательство. В [10, 4.c.6] построен пример пространства последовательностей Орлича $l_M$, не содержащего дополняемого подпространства, изоморфного $l_p$ и такого, что $\alpha_M = \beta_M = p$, $1 < p < \infty$, где

$$\alpha_M = \sup\left\{ q : \sup_{\lambda, t \in (0,1]} \frac{M(\lambda t)}{M(\lambda) t^q} < \infty \right\}, \quad \beta_M = \inf\left\{ q : \inf_{\lambda, t \in (0,1]} \frac{M(\lambda t)}{M(\lambda) t^q} > 0 \right\}.$$

Приведем конструкцию этого пространства. Пусть $0 < \tau < 1$ и $1 < p_1 < p_2$ такие, что $p = p_1 + 2(p_2 - p_1)/3$. Пусть $F$ и $G$ — две строго возрастающие непрерывные выпуклые на $[\tau, 1]$ функции такие, что

(i) $F(1) = G(1) = 1$, $0 < F(\tau) < 1$, $0 < G(\tau) < 1$;

(ii) $F'(1) = G'(1)$, $F'(1) \leq tF'(t)/F(t)$, $G'(1) \leq tG'(t)/G(t)$, $t \in [\tau, 1]$;

(iii) $F(\tau) = \tau^{p_1}$, $G(\tau) = \tau^{p_2}$.

Построим одновременно две последовательности нулей и единиц $\eta = \{\eta(i)\}_{i=1}^{\infty}$ и $\rho = \{\rho(i)\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом. Положим $\eta(1) = 0$, $\rho(1) = 1$ и для $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\eta(2^{3n} + i) = \rho(i) \quad \text{и} \quad \rho(2^{3n} + i) = \rho(i), \quad 1 \leq i \leq 2^{3n},$$

$$\eta(2^{3n+1} + i) = \eta(i) \quad \text{и} \quad \rho(2^{3n+1} + i) = \rho(i), \quad 1 \leq i \leq 2^{3n+1},$$

$$\eta(2^{3n+2}+i)=\eta(i) \quad \text{и} \quad \rho(2^{3n+2}+i)=\eta(i), \quad 1\le i\le 2^{3n+2}.$$

Начало этих последовательностей выглядит таким образом:

$$\eta=(0,\overbrace{1},\overbrace{0,1},\overbrace{0,1,0,1},\overbrace{1,1,1,1,0,1,0,1},\dots),$$

$$\rho=(1,\overbrace{1},\overbrace{1,1},\overbrace{0,1,0,1},\overbrace{1,1,1,1,0,1,0,1},\dots).$$

Для такой последовательности $\eta$ построим функцию $M=M_\eta$ на $[0,1]$ следующим образом. Положим $M_\eta(1)=1$, $M_\eta(0)=0$ и для $\tau^n\le t<\tau^{n-1}, n=1,2,\dots,$

$$M_\eta(t)=\begin{cases} M_\eta(\tau^{n-1})F(t/\tau^{n-1}), & \eta(n)=0,\\ M_\eta(\tau^{n-1})G(t/\tau^{n-1}), & \eta(n)=1.\end{cases}$$

Несложно проверить [10, 4.b.11], что $M_\eta$ действительно является функцией Орлича, удовлетворяющей $\Delta_2$-условию в нуле. Для данного пространства $\alpha_M=\beta_M=p$ и оно не содержит дополняемого подпространства, изоморфного $l_p$.

Так как $0<\alpha_M=\beta_M<\infty$, пространство $l_M$ рефлексивно [10,4.b.2′] и, следовательно [10, 4.b.3iii], $\alpha_{M^*}=\beta_{M^*}=p'$, где $M^*$ — сопряженная к $M$ функция.

В силу теоремы [13, теорема 5] получаем $\gamma(l_M)=\alpha_M=p$ и $\gamma(l_{M^*})=\alpha_{M^*}=p'$. $\square$

Выражаю благодарность Е. М. Семенову за постановку задачи и внимание к работе.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
2. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. II: Function spaces. Berlin: Springer-Verl., 1979.
3. *Банах С.* Теория линейных операций. М.; Ижевск: РХД, 2001.
4. *Dodds P. G., Semenov E. M., Sukochev F. A.* The Banach–Saks property in rearrangement invariant spaces // Studia Math. 2004. V. 162, N 3. P. 263–294.
5. *Семенов Е. М., Сукочев Ф. А.* Индекс Банаха — Сакса // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 2. С. 117–140.
6. *Rodin V. A., Semenov E. M.* Rademacher series in symmetric spaces // Anal. Math. 1975. V. 1. P. 207–222.
7. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
8. *Асташкин С. В.* Об интерполяции подпространств симметричных пространств, порожденных системой Радемахера // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 1997. Т. 1, № 1. С. 18–35.
9. *Baernstein A.* On reflexivity and summability // Stud. Math. 1972. V. 92. P. 91–94.
10. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. I: Sequence spaces. Berlin: Springer-Verl., 1977.
11. *Новикова А. И., Семенов Е. М., Сукочев Ф. А.* Индекс Банаха — Сакса пространств с симметричным базисом // Докл. РАН. 2008. Т. 420, № 3. С. 314–315.
12. *Astashkin S. V., Sukochev F. A.* Banach–Saks property in Marcinkiewicz spaces // Math. Anal. Appl. 2007. V. 336. P. 1231–1258.
13. *Раков С. А.* О показателе Банаха — Сакса некоторых банаховых пространств последовательностей // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 5. С. 613–626.


*Статья поступила 3 июня 2009 г.*

Новикова Анна Игоревна
Воронежский гос. университет, математический факультет,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
annnovikova@mail.ru