Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 510.6+512.56+510.53

О ВЫЧИСЛИМЫХ АВТОМОРФИЗМАХ В АНАЛИЗЕ ФОРМАЛЬНЫХ ПОНЯТИЙ

А. С. Морозов

Аннотация. Изучаются группы автоморфизмов вычислимых формальных контекстов. Предложен общий метод для переноса результатов об автоморфизмах вычислимых структур на вычислимые формальные контексты. С помощью этого метода показано, что вычислимые формальные контексты и вычислимые структуры фактически имеют те же самые группы автоморфизмов и группы вычислимых автоморфизмов. Построены примеры формальных контекстов и решеток понятий, которые допускают нетривиальные автоморфизмы, но ни один из них не является гиперарифметическим ни при каком гиперарифметическом представлении этих контекстов структур, а также показано, что возможна ситуация, когда два формальных понятия автоморфны, но не гиперарифметически автоморфны ни в каком гиперарифметическом представлении.

Ключевые слова: анализ формальных понятий, вычислимый формальный контекст, автоморфизм.

Анализ формальных понятий (АФП) — это некоторый подход к анализу и визуализации данных, представленных в виде таблицы «объект — свойство». Эта область имеет отношение к искусственному интеллекту, а также к другим областям чистой и прикладной математики. Основные идеи и результаты АФП можно найти в [1].

В [2, 3] начато изучение эффективного (вычислимого) содержания АФП, при этом основными интересующими нас вопросами были вопросы: сколько нужно эффективности для определения основных объектов АФП или насколько они близки к вычислимым структурам, какие проблемы АФП алгоритмически разрешимы, и т. п. Здесь мы продолжаем эти исследования. Настоящая работа посвящена вычислимым аспектам симметрий (автоморфизмов) формальных контекстов. Поскольку в АФП используется бинарный предикат «x имеет свойство y» и значительное число свойств вычислимых структур интерпретируется в одном вычислимом бинарном предикате, мы докажем, что вычислимые формальные контексты имеют те же самые автоморфизмы и те же самые сложные проблемы на них, что и вычислимые структуры. Фактически мы предложим общий метод для переноса результатов об автоморфизмах вычислимых структур на автоморфизмы формальных контекстов. Важно заметить, что здесь мы не занимаемся емкостной или временной сложностями алгоритмов для АФП. Главные вопросы касаются изучения существования и несуществования алгоритмов и вычислимых представлений в классическом или обобщенном смысле.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–12140–офи–м) и международного гранта РФФИ-DFG (05–01–04003–NNIOa, COMO, 436 RUS 113/829/0–1).

Мы предполагаем, что читатель, желающий понять все детали, знаком с основными идеями АФП [1], а также некоторыми сведениями из обобщенной теории вычислимости [4]. Работая с гиперарифметикой в доказательстве теоремы 2, мы находим удобным использование допустимого множества $\mathbb{HYP}_\omega$; впрочем, эти результаты могут быть получены и без него, возможно, более сложным способом. Основные факты из теории допустимых множеств и, в частности, основные свойства $\mathbb{HYP}_\omega$ можно найти в [5].

Напомним основные определения и введем некоторые обозначения.

Любая тройка $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models\rangle$, где $\models \subseteq G\times M$, называется *формальным контекстом.* Подразумевается, что множества G (Gegenstände) и M (Merkmale) являются множествами объектов и свойств соответственно, а отношение $g \models m$ означает, что g обладает свойством m. Отношение $\models$ также называется *отношением инцидентности.* Символ $\models$ будет также использован для обозначения обычного отношения истинности между структурами, формулами и кортежами элементов; мы надеемся, что это не приведет к коллизиям.

Каждый формальный контекст $\langle G, M, \models\rangle$ можно представить как классическую теоретико-модельную структуру. Для этого мы используем стандартный трюк, а именно без потери общности можем полагать, что $G \cap M = \varnothing$, и рассматривать формальный контекст как структуру $\langle G \cup M; W, \models\rangle$, в которой дополнительный предикат W выделяет G.

С каждым множеством объектов $A \subseteq G$ свяжем его *теорию* $\mathtt{Th}\,(A)$, определенную как

$$\mathtt{Th}\,(A) = \{y \in M \mid \forall x \in A\,(x \models y)\},$$

а с каждым множеством свойств $B \subseteq M$ — класс его моделей

$$\mathtt{Mod}\,(B) = \{x \in G \mid \forall y \in B\,(x \models y)\}.$$

Для $A \subseteq G$ и $B \subseteq M$ будем говорить, что пара $\langle A, B\rangle$ является *формальным понятием*, если $A = \mathtt{Mod}\,(B)$ и $B = \mathtt{Th}\,(A)$. Если $\alpha = \langle A, B\rangle$ — формальное понятие, то будем говорить, что A — *экстент* α, а B — *интент* понятия α, при этом используя обозначения $A = \mathtt{ext}\,(\alpha)$, $B = \mathtt{int}\,(\alpha)$. Заметим, что любое формальное понятие однозначно задается своими экстентом или интентом. Множество всех формальных понятий частично упорядочено следующим отношением:

$$\langle X_0, Y_0\rangle \leqslant \langle X_1, Y_1\rangle \;\Leftrightarrow\; X_0 \subseteq X_1,$$

как легко показать, последнее эквивалентно включению $Y_0 \supseteq Y_1$.

Известно, что для любого формального контекста $\mathfrak{F}$ семейство всех его формальных понятий образует полную решетку, называемую *решеткой понятий формального контекста* $\mathfrak{F}$, которая будет обозначаться через $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$, и что каждая полная решетка $\langle L; \leqslant\rangle$ изоморфна решетке понятий формального контекста $\mathfrak{F}_L = \langle L, L, \leqslant\rangle$. Более того, все формальные понятия из $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}_L)$ имеют вид $\langle \hat{a}, \overset{\vee}{a}\rangle$ для соответствующего $a \in L$, где $\hat{a} = \{x \in L \mid x \leqslant a\}$ и $\overset{\vee}{a} = \{x \in L \mid a \leqslant x\}$. Эти утверждения известны под названием *основной теоремы* АФП (см. [1]).

Множество всех натуральных чисел будет обозначаться через ω.

Тройку $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models\rangle$ назовем *вычислимым* (*арифметическим, гиперарифметическим*) *формальным контекстом,* если множества G и M — вычислимые (арифметические, гиперарифметические) подмножества ω, а отношение $\models \subseteq G \times M$ соответственно вычислимое (арифметическое, гиперарифметическое).

Формальное понятие $\alpha = \langle A, B\rangle$ из $\mathfrak{F}$ назовем *вычислимым* (*арифметическим, гиперарифметическим*), если оба множества A и B (т. е. его интент и экстент) вычислимы (арифметические, гиперарифметические).

Некоторые из этих определений можно найти в [2, 3].

Для произвольной пары $p = \langle a, b\rangle$ обозначим ее координаты через $(p)_0 = a$, $(p)_1 = b$.

Пусть $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models\rangle$ — формальный контекст. Пара биекций $f = \langle f_G, f_M\rangle$, $f_G : G \to G$, $f_M : M \to M$, называется *автоморфизмом* формального контекста $\mathfrak{F}$, если для всех $g \in G$ и $m \in M$ выполнено

$$g \models m \Leftrightarrow f_G(g) \models f_M(m)$$

(см. [1]). В случае вычислимого (арифметического, гиперарифметического) $\mathfrak{F}$ будем говорить, что автоморфизм f *вычислимый* (*арифметический, гиперарифметический*), если оба отображения f_0 и f_1 вычислимые (арифметические, гиперарифметические). Тьюрингова степень автоморфизма f определяется как тьюрингова степень отображения $f_0 \oplus f_1$.

Каждый автоморфизм $f = \langle f_G, f_M\rangle$ формального контекста $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models\rangle$ естественным образом индуцирует автоморфизм $\bar{f}$ решетки $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ следующим образом:

$$\bar{f}(\alpha) = \langle f_G(\mathtt{ext}\,(\alpha)), f_M(\mathtt{int}\,(\alpha))\rangle.$$

Будем обозначать группы автоморфизмов произвольной структуры $\mathfrak{M}$ и формального контекста $\mathfrak{F}$ соответственно через $\mathtt{Aut}\,\mathfrak{M}$ и $\mathtt{Aut}\,\mathfrak{F}$.

Напомним понятие вычислимой структуры. Сначала определим понятие вычислимой сигнатуры. Сигнатура

$$\sigma = \left\langle F_0^{m_0}, F_1^{m_1}, \dots ; P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \dots ; c_0, c_1, \dots \right\rangle$$

называется *эффективной,* если существует эффективная процедура, которая по любому натуральному числу k выдает число аргументов m_k для символа операции $F_k^{m_k}$ и число аргументов n_k для предикатного символа $P_k^{n_k}$. Иногда мы будем опускать верхние индексы m_i и n_i, показывающие число аргументов соответствующего символа. *Вычислимая структура* $\mathfrak{M}$ — это структура эффективной сигнатуры, основное множество которой является вычислимым подмножеством в ω и диаграмма которой (т. е. множество всех бескванторных предложений с элементами модели $\mathfrak{M}$, истинных в $\mathfrak{M}$) вычислимо перечислимо, т. е. по данным произвольным $a_1, \dots , a_n \in \mathfrak{M}$ и бескванторной формуле $\varphi(x_1, \dots , x_n)$ можно эффективно ответить на вопрос о том, верно $\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \dots , a_n)$ или нет. Поскольку любая операция может быть представлена ее графом, будем рассматривать только предикатные сигнатуры. Введение в теорию вычислимых структур можно найти в [6].

Легко видеть, что если мы рассмотрим формальный контекст как структуру, то определение вычислимого формального контекста является частным случаем определения вычислимой структуры.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что все структуры имеют ω в качестве основного множества.

Если $\varphi(x_1, \dots , x_n)$ — формула и $\mathfrak{M}$ — структура той же сигнатуры, то будем использовать следующее сокращение:

$$\varphi^{\mathfrak{M}}[x_1, \dots , x_n] = \{\langle a_1, \dots , a_n\rangle \in \mathfrak{M}^n \mid \mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \dots , a_n)\}.$$

Теперь сформулируем, обсудим основные результаты и потом их докажем.

Фактически следующая теорема показывает, что вычислимые формальные контексты и вычислимые структуры имеют одинаковые группы автоморфизмов и группы вычислимых автоморфизмов. Более того, с точностью до изоморфизма эти классы структур имеют те же самые группы с теми же тьюринговыми степенями и, как будет следовать из доказательств, в некотором смысле одинаково действуют на основных множествах.

Теорема 1. 1. *Абстрактный класс групп автоморфизмов вычислимых структур совпадает с абстрактным классом всех групп автоморфизмов вычислимых формальных контекстов.*

2. *Абстрактный класс групп вычислимых автоморфизмов вычислимых структур совпадает с абстрактным классом всех групп вычислимых автоморфизмов вычислимых формальных контекстов.*

3. *Более того, для любой вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ найдутся вычислимый формальный контекст $\mathfrak{F}$ и изоморфизм $\varphi : \mathtt{Aut}\,\mathfrak{M} \to \mathtt{Aut}\,\mathfrak{F}$, сохраняющий тьюринговы степени автоморфизмов, т. е. для каждого $\psi \in \mathtt{Aut}\,\mathfrak{M}$ выполнено $\deg(\varphi(\psi)) = \deg(\psi)$. В частности, φ отображает группу всех вычислимых автоморфизмов структуры $\mathfrak{M}$ на группу всех вычислимых автоморфизмов формального контекста $\mathfrak{F}$.*

Следующая теорема показывает, что вычислимые формальные контексты и вычислимые структуры имеют аналогичные «трудные структуры», в которых два элемента могут быть автоморфными, но автоморфизмы, отождествляющие эти элементы, очень сложны с точки зрения определимости.

Теорема 2. *Существует вычислимый формальный контекст $\mathfrak{F}$ такой, что*

1) $|\mathtt{Aut}\,\mathfrak{F}| = |\mathtt{Aut}\,\mathfrak{L}(\mathfrak{F})| = 2^\omega$*;*

2) *каждый автоморфизм $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ индуцирован некоторым автоморфизмом $\mathfrak{F}$;*

3) *каждый гиперарифметический формальный контекст $\mathfrak{F}'$, изоморфный $\mathfrak{F}$, не имеет нетривиальных гиперарифметических автоморфизмов;*

4) *для каждого гиперарифметического формального контекста $\mathfrak{F}'$ со свойством $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}') \cong \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ не существует нетривиальных автоморфизмов $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}')$, индуцируемых гиперарифметическими автоморфизмами $\mathfrak{F}'$.*

Следствие 1. *Существуют решетка $\mathfrak{L}$, изоморфная решетке понятий вычислимого формального контекста, и ее автоморфные элементы α и β, $\alpha \neq \beta$, такие, что для любого гиперарифметического формального контекста $\mathfrak{F}$ и любого изоморфизма $\varphi : \mathfrak{L} \xrightarrow{\text{onto}} \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ элементы $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$ не могут быть отождествлены посредством гиперарифметического автоморфизма $\mathfrak{F}$.*

Все эти результаты будут следовать из общей теоремы 3, которую докажем ниже. Для ее формулировки нам понадобится еще одно

Определение 1. Пусть $\mathfrak{A} = \left\langle A; P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \dots \right\rangle$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные вычислимые структуры не обязательно одной сигнатуры. Будем говорить, что структура $\mathfrak{B}$ *представляет автоморфизмы структуры* $\mathfrak{A}$, если существует вычислимая инъекция $\theta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ такая, что

1. Отображение
$$\psi \in \mathtt{Aut}\,\mathfrak{B} \mapsto \theta^{-1}\psi\theta$$
является изоморфизмом из $\mathtt{Aut}\,\mathfrak{B}$ на $\mathtt{Aut}\,\mathfrak{A}$.

2. Для каждого $\psi \in \mathtt{Aut}\,\mathfrak{B}$ выполнено $\deg\psi = \deg\theta^{-1}\psi\theta$.

3. Существуют формула первого порядка $U(x)$ и вычислимое семейство $(Q_i(x_1, \dots, x_{n_i}))_{i\in\omega}$ формул первого порядка сигнатуры $\mathfrak{B}$ такие, что θ — изоморфизм структур $\mathfrak{A}$ и $\left\langle U^{\mathfrak{B}}[x]; Q_i^{\mathfrak{B}}[x_1, \dots, x_{n_i}]\right\rangle_{i\in\omega}$.

Предложение 1. *Если $\mathfrak{C}$ представляет автоморфизмы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}$ представляет автоморфизмы $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{C}$ представляет автоморфизмы $\mathfrak{A}$.*

Доказательство оставлено читателю.

Теорема 3. *Существует эффективная процедура, которая по любой эффективной нумерации диаграммы вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ выдает эффективную нумерацию диаграммы некоторой полной решетки $L_{\mathfrak{M}}$ (вычислимого формального контекста $\mathfrak{F}_{\mathfrak{M}}$) такую, что*

1) *($\mathfrak{F}_{\mathfrak{M}}$) $L_{\mathfrak{M}}$ представляет автоморфизмы $\mathfrak{M}$;*

2) *если $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$, то $L_{\mathfrak{M}} \cong L_{\mathfrak{M}'}$ ($\mathfrak{F}_{\mathfrak{M}} \cong \mathfrak{F}_{\mathfrak{M}'}$);*

3) *соответствующие формулы U и $(Q_i)_{i\in\omega}$ в представлении зависят только от сигнатуры структуры $\mathfrak{M}$.*

Мы дадим доказательство для случая бесконечной структуры $\mathfrak{M}$. Конечный случай рассматривается практически так же.

Результирующая диаграмма полной решетки и формальный контекст будут получены как композиция процедур, описанных в следующих двух леммах.

Лемма 1. *Существует эффективная процедура, которая по данной эффективной нумерации диаграммы вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ выдает эффективное перечисление диаграммы структуры $\mathfrak{M}^{(1)} = \langle S; R\rangle$, $S \subseteq \omega$, с единственным бинарным предикатом R такое, что*

1) *R удовлетворяет условию*

$$\neg\exists x\exists y\,(x \neq y \wedge R(x,y) \wedge R(y,x)); \tag{1}$$

2) *$\mathfrak{M}^{(1)}$ представляет автоморфизмы $\mathfrak{M}$;*

3) *если $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$, то $\mathfrak{M}^{(1)} \cong (\mathfrak{M}')^{(1)}$;*

4) *соответствующие формулы $U(x)$ и $(Q_i)_{i\in\omega}$ этого представления зависят только от сигнатуры структуры $\mathfrak{M}$.*

Доказательство леммы. Без потери общности можно считать, что основное множество структуры $\mathfrak{M}$ является вычислимым подмножеством в $\{2x \mid x \in \omega\}$.

Зафиксируем некоторое вычислимое перечисление диаграммы $\mathfrak{A}$. Каждый раз, когда в этом перечислении появляется новое утверждение $P_k^{n_k}(a_1,\dots,a_{n_k})$, последовательно выбираем попарно различные нечетные натуральные числа b_{ij}, $i = 1,\dots,n_k$, $1 \leqslant j \leqslant i$, $d_1,\dots,d_{k+1}$, которые к этому моменту еще не задействованы, и доопределяем бинарный предикат R на $a_1,\dots,a_{n_k}$ вместе с этими новыми элементами следующим образом:

$$\{\langle b_{ii}, a_i\rangle \mid i = 1,\dots,n_k\} \cup \{\langle d_{k+1}, b_{i1}\rangle \mid i = 1,\dots,n_k\}$$
$$\cup \{\langle b_{ij}, b_{i\,j+1}\rangle \mid i = 1,\dots,n_k,\ j = 1,\dots,i-1\} \cup \{\langle d_i, d_{i+1}\rangle \mid i = 1,\dots,k\}.$$

Итак, для всех $P_k^{n_k}$ и $\langle a_1,\dots,a_n\rangle \in P_k^{n_k}$ добавляем эти новые элементы таким образом, чтобы образовать структуру, изображенную на рис. 1.

Требуемые формулы можно определить, например, так:

$$U(x) = \neg\exists\, y\, R(x,y),$$

$$Q_k^{n_k}(x_1,\dots,x_{n_k}) = \bigwedge_{i=1}^{n_k} U(x_i) \wedge \exists y_{11}\, y_{21}y_{22}\ y_{31}y_{32}y_{33}\ \dots y_{n_k1}\dots y_{n_kn_k}\ z_1\dots z_{k+1}$$

$$\left[\neg\exists t\, R(t,z_1)\wedge\bigwedge_{i=1}^{k} R(z_i,z_{i+1})\wedge\bigwedge_{i=1}^{n_k} R(z_{k+1},y_{i1})\wedge\bigwedge_{i=1}^{n_k}\bigwedge_{j=1}^{i-1} R(y_{ij},y_{ij+1})\wedge\bigwedge_{i=1}^{n_k} R(y_{ii},x_i)\right].$$

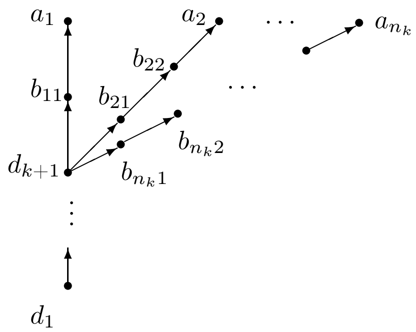

Рис. 1.

Непосредственная проверка показывает, что R и его дополнение вычислимо перечислимы.

Условие (1) очевидно. Докажем, что все пункты определения 1 удовлетворяются для тождественного отображения θ на $\mathfrak{M}$. Пусть f — автоморфизм $\mathfrak{M}$. Исполняя эффективное построение R, мы можем эффективно по f однозначно расширить f до автоморфизма f' построенной нами структуры. Таким образом, f' сводится по Тьюрингу к f. С другой стороны, поскольку f — ограничение f' на основное множество структуры $\mathfrak{M}$, f сводится по Тьюрингу к f'. Так как каждый автоморфизм построенной нами структуры должен сохранять все структуры, образуемые добавленными в процессе построения элементами, каждый ее автоморфизм является единственными расширением некоторого автоморфизма структуры $\mathfrak{M}$. Оставшаяся часть леммы очевидна.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Существует эффективная процедура, которая по любому эффективному представлению вычислимой структуры $\mathfrak{M} = \langle M; R\rangle$, в которой R удовлетворяет условию* (1), *выдает вычислимую нумерацию диаграммы вычислимого частичного порядка $\preccurlyeq$ на ω такую, что*

1) *структура $\mathfrak{M}^{(2)} = \langle \omega; \preccurlyeq\rangle$ является полной полурешеткой;*
2) *$\mathfrak{M}^{(2)}$ представляет автоморфизмы $\mathfrak{M}$;*
3) *если $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$, то $\mathfrak{M}^{(2)} \cong (\mathfrak{M}')^{(2)}$;*
4) *соответствующие формулы $U(x)$ и $Q(x, y)$ не зависят от R.*

Доказательство леммы использует ту же идею, что и доказательство леммы 1, с той разницей, что структуры, с помощью которых мы кодируем факты $R(a, b)$, являются более простыми. Как и ранее, мы берем вычислимую изоморфную копию $\mathfrak{M}' = \langle M; R'\rangle$ структуры $\langle \omega; R\rangle$, где $M \subseteq \{2x \mid x \in \omega\}$, и для любой пары $\langle a, b\rangle \in R'$ добавляем к нашей структуре новые нечетные элементы c и d, еще не использованные к данному моменту, и определяем частичный порядок $\preccurlyeq$ на нем как

$$c \prec a, b, d, \quad d \prec b.$$

После этого добавим к уже построенной структуре дополнительный наибольший элемент $\top$ и дополнительный наименьший элемент $\bot$. По условию (1) упорядочение $\preccurlyeq$ образует полную решетку.

Все необходимые условия проверяются так же, как и в доказательстве леммы 1.

Лемма доказана.

Непосредственная проверка показывает, что если структура $\mathfrak{M}$ вычислима, то структура $(\mathfrak{M}^{(1)})^{(2)}$ является полной решеткой и имеет требуемые свойства.

Теперь нам предстоит доказать то же самое для формальных контекстов.

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \preccurlyeq \rangle$ — вычислимая полная решетка. Определим формальный контекст $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ как $\langle L, L; \preccurlyeq \rangle$.

Результат будет следовать из следующих лемм.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \preccurlyeq \rangle$ — вычислимая полная решетка. Тогда отображение*

$$^* : \psi \in \mathtt{Aut}\, \mathfrak{L} \mapsto \psi^* = \langle \psi, \psi \rangle$$

является изоморфизмом групп $\mathtt{Aut}\, \mathfrak{L}$ и $\mathtt{Aut}\, \mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$, сохраняющим тьюринговы степени.

Доказательство леммы. Очевидно, что * — изоморфное вложение. Остается доказать, что каждый автоморфизм $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ имеет вид $\langle \psi, \psi \rangle$ для некоторого $\psi \in \mathtt{Aut}\, \mathfrak{L}$.

Обозначим через $\preccurlyeq_G$ исходный порядок $\preccurlyeq$ на L, рассматриваемом как множество объектов, и тот же самый порядок на L, рассматриваемом как множество свойств, обозначим через $\preccurlyeq_M$. Упорядочение $\preccurlyeq_G$ определимо в структуре $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ следующим образом:

$$x \preccurlyeq_G y \Leftrightarrow \{t \mid x \preccurlyeq t\} \supseteq \{t \mid y \preccurlyeq t\},$$

что можно переписать в виде формулы первого порядка. Определимость порядка $\preccurlyeq_M$ на множестве свойств для $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ показывается аналогичным образом. Далее, «равенство» $\sim$ между членами множества объектов и множеством свойств также определимо формулой первого порядка над $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ следующим образом:

$$x \sim y \Leftrightarrow y \text{ является } \preccurlyeq_M\text{-наименьшим элементом } t \text{ со свойством } x \preccurlyeq t.$$

Поскольку любой автоморфизм $\langle f, g \rangle$ контекста $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ сохраняет все определимые отношения, он сохраняет упорядочение на множестве объектов и на множестве свойств, а также сохраняет «равенство» между объектами и свойствами. Это означает, что любой автоморфизм структуры $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ имеет вид $\langle \psi, \psi \rangle$, где $\psi \in \mathtt{Aut}\, \mathfrak{L}$. Легко видеть, что отображение * сохраняет тьюринговы степени.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \preccurlyeq \rangle$ — вычислимая полная решетка. Тогда формальный контекст $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}} = \langle L, L; \preccurlyeq \rangle$ представляет автоморфизмы $\mathfrak{L}$.*

Доказательство следует из леммы 3 и интерпретации упорядочения на компонентах $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$, указанных в доказательстве.

Для завершения доказательства теоремы 3 остается применить предложение 1.

Теорема 3 доказана.

Теперь все готово для доказательства остальных теорем.

Доказательство теоремы 1. П. 3 непосредственно следует из теоремы 3. Утверждение о том, что любая группа (вычислимых) автоморфизмов вычислимой структуры изоморфна группе (вычислимых) автоморфизмов подходящего вычислимого формального контекста, следует из п. 3.

Осталось доказать, что любая группа (вычислимых) автоморфизмов изоморфна группе (вычислимых) автоморфизмов вычислимой структуры. Трансформируем вычислимый формальный контекст $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models \rangle$ в односортную структуру так, как это описывалось в самом начале работы. Для этого надо сначала удовлетворить условию $G \cap M = \varnothing$. Заметим, что формальный контекст $\mathfrak{F}' = \langle G', M', \models' \rangle$, в котором $G' = \{2x \mid x \in G\}$, $M' = \{2x+1 \mid x \in M\}$ и

$$\models' \ = \ \{\langle 2x, 2y+1 \rangle \mid x \in G,\ y \in M,\ x \models y\},$$

вычислимо изоморфен исходному контексту и существует изоморфизм между $\mathtt{Aut}\,\mathfrak{F}$ и $\mathtt{Aut}\,\mathfrak{F}'$, сохраняющий степени. Легко видеть, что для полученной односортной структуры $\mathfrak{A}$ существует изоморфизм между $\mathtt{Aut}\,\mathfrak{F}'$ и $\mathtt{Aut}\,\mathfrak{A}$, сохраняющий степени. Таким образом, оставшиеся утверждения пп. 2 и 3 доказаны.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2.

Следующая лемма достаточно очевидна.

Лемма 5. *Пусть $\langle L, \preccurlyeq \rangle$ — полная решетка. Пусть $\mathfrak{F} = \langle L, L; \preccurlyeq \rangle$. Тогда отображение $\langle f, f \rangle \in \mathtt{Aut}\,\mathfrak{F} \mapsto \bar{f}$, где $\bar{f}(\langle \check{a}, \hat{a} \rangle) = \langle f(\check{a}), f(\hat{a}) \rangle$, является изоморфизмом из $\mathtt{Aut}\,\mathfrak{F}$ на $\mathtt{Aut}\,\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$.*

Зафиксируем вычислимую структуру $\mathfrak{M}$ такую, что $|\mathtt{Aut}\,\mathfrak{M}| = 2^\omega$, но у любой ее гиперарифметической изоморфной копии нет нетривиальных гиперарифметических автоморфизмов, построенную в [7]. Преобразуем ее в вычислимую полную решетку $\mathfrak{L}_\mathfrak{M} = \langle L, \preccurlyeq \rangle$ и в формальный контекст $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\mathfrak{M} = \langle L, L; \preccurlyeq \rangle$, как в теореме 3. По лемме 5 и теореме 3 получим

$$2^\omega = |\mathtt{Aut}\,\mathfrak{M}| = |\mathtt{Aut}\,\mathfrak{F}| = |\mathtt{Aut}\,(\mathfrak{L}(\mathfrak{F}))|\,,$$

что доказывает п. 1.

П. 2 следует из леммы 5.

Докажем п. 3. Пусть f — нетривиальный гиперарифметический автоморфизм гиперарифметической копии $\mathfrak{F}' \cong \mathfrak{F}$. Используя формулы первого порядка из определения 1, определяющие структуру $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}'$, мы можем построить гиперарифметическую копию $\mathfrak{M}$, на которой f будет определять нетривиальный гиперарифметический автоморфизм; противоречие.

Докажем п. 4. Пусть гиперарифметический формальный контекст $\mathfrak{F}'$ удовлетворяет условиям $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}) \cong \mathfrak{L}(\mathfrak{F}')$ и некоторый его гиперарифметический автоморфизм $f = \langle f_0, f_1 \rangle$ индуцирует нетривиальный автоморфизм $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}')$.

Сначала проверим, что в этом случае выполнено $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}') \in \mathbb{HYP}_\omega$. В самом деле, заметим, что $\mathfrak{F}'$ есть Δ^1_1. Отсюда получим, что счетное множество $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}')$, состоящее из пар $\langle A, B \rangle$, удовлетворяющих арифметическому условию «быть формальным понятием», допускает Δ^1_1-определение. По теореме о совершенном множестве [5, теорема IV 4.4, следствие IV 4.7] множество всех формальных понятий для $\mathfrak{F}'$ есть подмножество некоторого $S \in \mathbb{HYP}_\omega$. По Δ_0-выделению множество всех формальных понятий для $\mathfrak{F}'$ принадлежит $\mathbb{HYP}_\omega$. Очевидно, что упорядочение $\preccurlyeq'$ на этих понятиях также является Δ_0 на $\mathbb{HYP}_\omega$. Далее, $f = \langle f_0, f_1 \rangle \in \mathbb{HYP}_\omega$ индуцирует нетривиальный автоморфизм $\bar{f}$ на $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}')$, который допускает Σ-определение, получаемое из следующей эквивалентности:

$$\bar{f}(\alpha) = \beta \ \Leftrightarrow\ f_0((\alpha)_0) = (\beta)_0 \wedge f_1((\alpha)_1) = (\beta)_1.$$

Отсюда выводим, что $\bar{f}$ является Σ-определимым над $\mathbb{HYP}_\omega$ и что фактически $\bar{f} \in \mathbb{HYP}_\omega$. Таким образом, приходим к ситуации, когда $\bar{f} \in \mathbb{HYP}_\omega$ является нетривиальным автоморфизмом $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}') \in \mathbb{HYP}_\omega$. Значит, формальный контекст

$$\langle \mathfrak{L}(\mathfrak{F}'), \mathfrak{L}(\mathfrak{F}'), \preccurlyeq' \rangle \in \mathbb{HYP}_\omega, \quad \langle \mathfrak{L}(\mathfrak{F}'), \mathfrak{L}(\mathfrak{F}'), \preccurlyeq' \rangle \cong \mathfrak{F}$$

обладает нетривиальным автоморфизмом $\langle \bar{f}, \bar{f} \rangle \in \mathbb{HYP}_\omega$, откуда получаем, что у него есть гиперарифметическая изоморфная копия с нетривиальным гиперарифметическим автоморфизмом. Это противоречит п. 3.

Теорема 2 доказана.

Приведем еще один пример того, как можно переносить результаты о вычислимых структурах на вычислимые формальные контексты.

Следствие 2. *Существуют два изоморфных вычислимых формальных контекста $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{F}_1$ такие, что $\mathfrak{F}_0$ имеет нетривиальный вычислимый автоморфизм, а $\mathfrak{F}_1$ таким автоморфизмом не обладает.*

Доказательство. Хорошо известно, что существуют классически изоморфные структуры $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ такие, что $\mathfrak{M}_0$ имеет нетривиальный вычислимый автоморфизм, но $\mathfrak{M}_1$ такого автоморфизма не имеет. В качестве примера рассмотрим два классически изоморфных вычислимых упорядочения, построенные следующим образом. Первый из них — произвольный вычислимый порядок по типу $\omega^* + \omega$, в котором множество пар соседних элементов вычислимо. Вычислимые автоморфизмы такого упорядочения — это в точности все сдвиги на фиксированное число элементов вправо или влево. Для получения второго упорядочения зафиксируем вычислимо перечислимое невычислимое множество $A \subseteq \omega$, затем возьмем описанное выше упорядочение и для каждого $t \in A$ добавим в начальном упорядочении дополнительный элемент между элементами, соответствующими t и $t+1$. Так построенное упорядочение будет вычислимым упорядочением, изоморфным $\omega^* + \omega$, в котором множество пар соседних элементов уже не будет вычислимым. Если бы это упорядочение имело нетривиальный вычислимый автоморфизм, то мы могли бы эффективно перечислить все пары соседних элементов. Тогда ввиду того, что это множество очевидным образом коперечислимо, оно будет рекурсивным; противоречие.

Остается применить теорему 1. Следствие доказано.

Благодарности. Автор благодарит профессора Карла Эриха Вольффа за замечательную рабочую атмосферу, которую он обеспечил во время визита автора в Дармштадтский технический университет, а также всех участников международного гранта РФФИ–DFG (COMO) за полезные замечания и дискуссии. Автор также благодарит анонимного рецензента за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wille R., Ganter B.* Formal concept analysis. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1999.
2. *Морозов А. С., Львова М. А.* О вычислимых формальных понятиях в вычислимых формальных контекстах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1086–1095.
3. *Морозов А. С.* Об эффективных представлениях решеток формальных понятий // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 3. С. 603–620.
4. *Rogers H.* Theory of recursive functions and effective computability. New York; St. Louis; San Francisco; Toronto; London; Sydney: McGraw-Hill Book Comp., 1967.
5. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1975.

6. *Ершов Ю. Л., Гончаров С. С.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.
7. *Морозов А. С.* Функциональные деревья и автоморфизмы моделей // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 1. С. 28–38.

Статья поступила 23 января 2008 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru