Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 512.542.6

О РАЗМЕРАХ КЛАССОВ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Ц. Кун, С. Го

Аннотация. Изучено влияние на p-строение группы G некоторых арифметических условий на размеры классов сопряженности элементов примарного или бипримарного порядка конечной группы G. В частности, описано строение p-дополнений группы G. Обобщены некоторые результаты из $[1, 2]$.

Ключевые слова: размер класса сопряженных элементов, p-нильпотентная группа, конечная группа.

1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны. Если G — группа, то x^G обозначает класс сопряженных элементов, содержащий x, $|x^G|$ — размер класса x^G. Следуя [3], назовем число $\mathrm{Ind}_G(x) = |x^G| = |G : C_G(x)|$ *индексом элемента* x в G. Остальные обозначения и термины стандартны, и читатель может найти их в [4].

Хорошо известно, что между строением группы и размерами ее классов сопряженных элементов существует глубокая связь, и имеется ряд результатов, полученных при изучении строения групп, размеры классов сопряженных элементов которых удовлетворяют некоторым арифметическим условиям. Например, Ито в [5] показал, что если размеры классов сопряженных элементов группы G образуют множество $\{1, m\}$, то G нильпотентна, $m = p^a$ для некоторого простого числа p и $G = P \times A$, где P — силовская p-подгруппа в G и $A \subseteq Z(G)$. В [6] он же показал, что G разрешима, если множество размеров классов сопряженных элементов группы G есть $\{1, n, m\}$. Другие авторы исследовали строение конечной группы, заменяя условия на все классы сопряженности условиями, относящимися только к некоторым из этих классов. Например, в [3] доказано, что группа G разрешима, если ее элементы, порядок которых равен степени простого числа, имеют индексы, также равные степени простого числа. В [7] Ли доказал, что конечная группа G разрешима, если G имеет ровно два размера классов сопряженности элементов примарного порядка. Недавно в [8] Беркович и Казарин описали группы, в которых индексы всех элементов примарного или бипримарного порядка являются степенями простых чисел. В настоящей заметке мы показываем, как можно получить ограничения на строение группы G или ее p-дополнений, накладывая некоторые арифметические условия на размеры классов сопряженности элементов примарного или бипримарного порядка группы G.

Работа авторов поддержана Государственным фондом естественных наук Китая (10771132), SGRC (GZ310), а также исследовательским грантом Шанхайского университета и Шанхайского проекта по поддержке ведущих научных дисциплин (J50101).

2. Основные определения и предварительные результаты

В этом разделе сформулирован ряд лемм, которые потребуются для доказательства основных результатов.

Лемма 2.1 [9, лемма 1.1]. *Пусть* $N \trianglelefteq G$, $x \in N$ *и* $y \in G$. *Тогда*
(i) $|x^N| \mid |x^G|$;
(ii) $|(yN)^{G/N}| \mid |y^G|$.

Лемма 2.2 [10, теорема 5]. *Пусть* G *— конечная группа и* p *— простой делитель числа* $|G|$. *Тогда в* G *нет* p'*-элементов примарного порядка, индексы которых делятся на* p, *в том и только в том случае, когда* $G = P \times H$, *где* P *— силовская* p*-подгруппа группы* G *и порядок группы* H *взаимно прост с* p.

Лемма 2.3. *Пусть* G *— группа. Простое число* p *не делит ни один из размеров классов сопряженности элементов примарных порядков группы* G *тогда и только тогда, когда силовская* p*-подгруппа группы* G *центральна.*

Доказательство. По лемме 2.2 выполнено равенство $G = P \times H$, где P — силовская p-подгруппа в G и порядок группы H взаимно прост с p. Остается показать, что P абелева. Если $y \in P$, то p не делит $|y^G| = |G : C_G(y)|$ по условию. Значит, $P \leq C_G(y)$, т. е. P абелева.

Лемму 2.3 можно считать обобщением следующего утверждения из [11, теорема 33.4]. Пусть G — группа. Простое число p не делит ни один из размеров классов сопряженных элементов группы G тогда и только тогда, когда силовская p-подгруппа группы G центральна.

Лемма 2.4 [3, лемма 6]. *Группа* $O_p(G)$ *содержит любой элемент группы* G, *порядок и индекс которого являются степенями числа* p.

Лемма 2.5 [12, гл. 5, теорема 3.4]. *Пусть* $A \times B$ *— группа автоморфизмов* p*-группы* P, *причем* A *—* p'*-группа и* B *—* p*-группа. Если* A *действует на* $C_P(B)$ *тривиально, то* $A = 1$.

Лемма 2.6 [13, теорема A]. *Предположим, что* G *— конечная* p*-разрешимая группа и* $\{1, m\}$ *— множество размеров* p*-регулярных классов сопряженных элементов группы* G. *Тогда* $m = p^a q^b$, *где* q *— простое число, отличное от* p, *и* $a, b \geq 0$. *Если* $b = 0$, *то* G *содержит абелево* p*-дополнение. Если* $b \neq 0$, *то* $G = PQ \times A$, *где* $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ *и* $A \leq Z(G)$. *Кроме того, если* $a = 0$, *то* $G = P \times Q \times A$.

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть* G *— конечная группа. Размер класса сопряженности любого* p'*-элемента примарного порядка группы* G *является* p*-числом тогда и только тогда, когда* G *содержит абелево* p*-дополнение.*

Доказательство. Сначала покажем, что G разрешима при выполнении любого из условий, равносильность которых утверждается в теореме. Предположим сначала, что размер класса сопряженности любого p'-элемента примарного порядка группы G является p-числом. По лемме 2.1 это свойство наследуется нормальными подгруппами и факторами, следовательно, применяя индукцию по $|G|$, можем считать, что G — неабелева простая группа. Однако, как утверждает теорема Бернсайда (см, например, [11, 15.2]), простая группа не может содержать класса сопряженных элементов, размер которого равен степени простого числа, и, значит, требуемое доказано. Теперь предположим, что G имеет абелево p-дополнение. Тогда G можно разложить в произведение двух нильпотентных подгрупп, а именно абелева p-дополнения и силовской p-подгруппы группы G. По теореме Кегеля — Виланда (см. [14, VI.4.3]) группа G разрешима и в этом случае.

Предположим, что размер класса сопряженности любого p'-элемента примарного порядка группы G является p-числом. Проводя индукцию по $|G|$, покажем, что G содержит абелево p-дополнение. Применяя лемму 3 из [8], легко получаем, что $O_p(G) \neq 1$. По индукции группа $G/O_p(G)$ содержит абелево p-дополнение, а тогда его очевидным образом содержит и G.

Обратная импликация очевидна, достаточно заметить, что в силу разрешимости группы G любые два p-дополнения в G сопряжены, поэтому все они абелевы.

Теорема доказана.

В [1] доказана следующая теорема. Пусть G — группа и наибольшая степень простого числа p, делящая индексы элементов группы G, равна p^a. Допустим, что в G есть p-элемент, индекс которого в точности равен p^a. Тогда G содержит нормальное p-дополнение. Следующая теорема обобщает этот результат.

Теорема 3.2. *Пусть G — группа и наибольшая степень простого числа p, делящая индексы элементов бипримарного порядка группы G, равна p^a. Допустим, что в G есть p-элемент, индекс которого в точности равен p^a. Тогда G содержит нормальное p-дополнение.*

Доказательство. По условию найдется p-элемент x группы G такой, что $[G : C_G(x)] = p^a$. По лемме 2.4 получаем, что нормальное замыкание элемента x будет p-группой, скажем группой H. Пусть $Z = C_G(H)$. Поскольку $[G : C_G(x)] = p^a$, если $y \in C_G(x)$ и порядок элемента y — степень простого числа, взаимно простая с p, то $[C_G(x) : C_G(xy)]$ взаимно просто с p. В противном случае p^{a+1} делило бы индекс элемента xy; противоречие. Однако $C_G(xy) = C_G(x) \cap C_G(y)$, поскольку x и y имеют взаимно простые порядки и $[x, y] = 1$. Так как число $[C_G(x) : C_G(xy)]$ взаимно просто с p, можно считать, что $C_G(xy)$ содержит силовскую p-подгруппу группы $C_G(x)$, скажем подгруппу P. Очевидно, что $H \cap C_G(x) \leq H$. Поскольку H нормальна в G, получаем, что $H \cap C_G(x) \leq O_p(C_G(x)) \leq P$. Таким образом, $H \cap C_G(x) \leq H \cap P$. В силу того, что

$$C_G(xy) = C_G(x) \cap C_G(y) \subseteq C_G(y),$$

выполнено включение $P \leq C_G(y)$, следовательно, $H \cap C_G(x) \leq H \cap C_G(y)$ или $C_H(x) \leq C_H(y)$. Используя лемму 2.5, выводим, что $C_H(y) = H$.

Таким образом, H централизует любой элемент из $C_G(x)$ примарного порядка, взаимно простого с p. Отсюда можно вывести, что H централизует любой элемент из $C_G(x)$ порядка, взаимно простого с p. Это так, поскольку любой элемент z из $C_G(x)$, порядок которого взаимно прост с p, можно записать в виде $z = z_1 z_2 \ldots z_s$, где порядок элемента z_i — степень простого числа, отличного от p, z_i попарно коммутируют и $z_i \in C_G(x)$.

Из равенства $[G : C_G(x)] = p^a$ выводится, что $[G : Z]$ — степень числа p. Пусть w — некоторый p'-элемент примарного порядка в Z. В силу предыдущего рассуждения число $[C_G(x) : C_G(w) \cap C_G(x)]$ взаимно просто с p, но так как Z — нормальная подгруппа в $C_G(x)$, число $[Z : C_Z(w)]$ тоже взаимно просто с p.

Значит, каждый p'-элемент примарного порядка из Z имеет взаимно простой с p индекс в Z, и тем самым по лемме 2.2 $Z = K \times P_1$, где порядок группы K взаимно прост с p и P_1 — силовская p-подгруппа в Z. Поскольку $[G : Z]$ — степень числа p, группа K является нормальным p-дополнением в G. Теорема доказана.

Применяя теорему 3.2, можно получить следующий результат. Он может рассматриваться как частичное обобщение теоремы B из [2].

Теорема 3.3. *Пусть G — группа. Предположим, что множество размеров классов сопряженности элементов бипримарного порядка и p'-элементов группы G совпадает с $\{1, p^a, n, p^a n\}$, где $(p, n) = 1$ и $a > 0$. Если в G есть p-элемент с индексом, в точности равным p^a, то G нильпотентна и $n = q^b$ для некоторого простого числа q.*

Доказательство. По теореме 3.2 в G есть нормальное p-дополнение, скажем H. Для любого $x \in H$ выполнено

$$|G : H||H : C_H(x)| = |G : C_G(x)||C_G(x) : C_H(x)|.$$

Если $|x^G| = 1$ или p^a, то $H \subseteq C_G(x)$ и, значит, $|x^H| = 1$. Если $|x^G| = n$ или $p^a n$, то из вышеприведенного равенства и того факта, что $|x^H|$ делит $|x^G|$, вытекает, что $|x^H| = n$. Следовательно, размер класса сопряженности любого p'-элемента группы G равен 1 или n, и по лемме 2.6 получаем, что $n = p^c q^b$ для некоторого простого числа $q \neq p$. Поскольку $(p, n) = 1$, имеем $n = q^b$ и, снова применяя лемму 2.6, заключаем, что G нильпотентна. Теорема доказана.

Благодарности. Авторы очень признательны рецензенту, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему множество ценных предложений и полезных замечаний. На самом деле доказательство теоремы 3.1 было переписано рецензентом. Следует сказать, что мы бы не смогли значительно улучшить окончательный вариант этой статьи без его/ее исключительных усилий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Camina A. R.* Arithmetical conditions on the conjugacy classes of finite groups // J. London Math. Soc. 1972. V. 5, N 2. P. 127–132.
2. *Beltrán A., Felipe M. J.* Variations on a theorem by Alan Camina on conjugacy class sizes // J. Algebra. 2006. V. 296, N 1. P. 253–266.
3. *Baer R.* Group elements of prime power index // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 75. P. 20–47.
4. *Robinson J. S.* A course in the theory of groups. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1980.
5. *Itô N.* On finite groups with given conjugate types. I // Nagoya Math. J. 1953. N 6. P. 17–28.
6. *Itô N.* On finite groups with given conjugate types. II // Osaka J. Math. 1970. V. 77. P. 231–251.
7. *Li S.* Finite groups with exactly two class lengths of elements of prime power order // Arch. Math. 1996. V. 67. P. 100–105.
8. *Berkovich Y., Kazarin L.* Indices of elements and normal structure of finite groups // J. Algebra. 2005. V. 283, N 2. P. 564–583.
9. *Chillag D., Herzog M.* On the length of the conjugacy classes of finite groups // J. Algebra. 1990. V. 131, N 1. P. 110–125.
10. *Liu X., Wang Y., Wei H.* Notes on the length of conjugacy classes of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2005. V. 196, N 1. P. 111–117.
11. *Huppert B.* Character theory of finite groups. Berlin: de Gruyter, 1998. (de Gruyter Expo. Math.; V. 25).
12. *Gorensten D.* Finite Groups. New York: Harper and Row, 1968.

13. *Beltrán A., Felipe M. J.* Finite groups with two p-regular conjugacy class lengths // Bull. Austral. Math. Soc. 2003. V. 67, N 1. P. 163–169.

14. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New: Springer-Verl., 1967.

Статья поступила 9 сентября 2008 г., окончательный вариант — 6 декабря 2008 г.

Qingjun Kong (Цинцзюнь Кун)
Department of Mathematics, Tianjin Polytechnic University,
Tianjin 300160, People's Republic of China
kongqingjun2929@yahoo.com.cn

Xiuyun Guo (Сююнь Го)
Department of Mathematics, Shanghai University,
Shanghai 200444, People's Republic of China