Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 517.54

ТЕОРЕМЫ ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ И ОДНОЛИСТНЫХ В КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ

В. Н. Дубинин, Е. Г. Прилепкина

Аннотация. Применяются емкостный подход и симметризация к доказательству теорем искажения для аналитических в кольце функций. Показывается, что классическая оценка Тейхмюллера емкости двусвязной области дает серию известных и новых неравенств для однолистных функций. В частности, дополняются результаты Гретша, Дюрена и Хукемана. С помощью диссимметризации конденсаторов устанавливаются точные оценки локального искажения и искажения линий уровня в $n \geq 2$ симметричных направлениях. В терминах функций Робена приводится аналог неравенства Нехари — общая теорема искажения для нескольких точек с учетом граничного поведения функции и описанием случаев равенства. Как следствия даны аналоги некоторых неравенств Солынина, Васильева и Поммеренке, полученные ими ранее для однолистных и ограниченных в круге функций. Доказывается теорема искажения с участием производных Шварца в симметричных точках на единичной окружности.

Ключевые слова: мероморфная функция, однолистная функция, теоремы искажения, производная Шварца, двусвязная область, круговое кольцо, емкость конденсатора, диссимметризация, функция Грина, функция Робена.

Введение и некоторые обозначения

Пусть $K \equiv K(R) = \{z : 1 < |z| < R\}$ — круговое кольцо в случае $R \neq \infty$ и $K(\infty) = \{z : 1 < |z|\}$. Обозначим через $\mathfrak{M}(R, M)$, $R < M \leq \infty$, класс функций f, мероморфных и однолистных в кольце $K(R)$, для которых множество $f(K(R))$ значений $f(z)$ в $K(R)$ лежит в области $K(M)$ и которые отображают окружность $|z| = 1$ на себя, $\mathfrak{M}(R) = \mathfrak{M}(R, \infty)$. Каждая функция f класса $\mathfrak{M}(R, M)$, $M \leq \infty$, допускает аналитическое продолжение в кольцо $1/R < |z| < R$ по принципу симметрии Римана — Шварца. Будем обозначать это продолжение той же буквой f. Данная работа посвящена развитию емкостного подхода [1] и методов симметризации [2] в применении к решению некоторых экстремальных задач для функций классов $\mathfrak{M}(R)$ и $\mathfrak{M}(R, M)$.

В § 1, который носит методический характер, следуя работе [3], показано, как с помощью классической оценки емкости кольцевой области [4] можно установить ряд известных и новых неравенств в виде следствий общих теорем искажения ангармонического отношения четырех точек. В частности, уточнены и обобщены известные оценки Гретша [5] и Тейхмюллера [4] для модулей $|f|$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00028), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2810.2008.1), а также ДВО РАН (грант 09–II–СО–01–003).

и $|f'|$ в классе $\mathfrak{M}(R)$, а также дополнены результаты Дюрена [6] и Хукемана [7]. Экстремальными функциями в полученных неравенствах являются функция Гретша $G(z;R)$ и функция Тейхмюллера $T(z;R)$. Функция $w = G(z) \equiv G(z;R)$ конформно и однолистно отображает кольцо $K(R)$, $R < \infty$, на внешность круга $|w| > 1$ с разрезом по вещественной положительной полуоси от некоторой точки $P(R)$ до ∞ так, что $G(R;R) = P(R)$. Нетрудно убедиться, что

$$G(z;R) = \tau \operatorname{sn}^2 \left(\left(\frac{i}{\pi} \log(zR) + 1 \right) \mathbf{K}(\tau); \tau \right),$$

где $\tau = \tau(R) = 1/P(R)$ — решение уравнения

$$\log R = \frac{\pi}{2} \mathbf{K}(\sqrt{1-\tau^2})/\mathbf{K}(\tau),$$

$\mathbf{K}(\tau)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем τ, $\operatorname{sn}(\cdot;\tau)$ — эллиптическая функция Якоби. Известны также представления параметров τ и $\mathbf{K}(\tau)$ через ряды по степеням R (см., например, [8]). Функция Тейхмюллера $T(z) \equiv T(z;R) = (G(z;R) + 1/G(z;R))/4 - 1/2$ конформно и однолистно отображает кольцо $K(R)$ на плоскость с разрезами по отрезку $[-1,0]$ и вдоль положительной полуоси от точки $T(R)$ до бесконечности.

В § 2, 3 используется понятие конформной емкости конденсатора на комплексной плоскости. Необходимые определения и свойства конденсаторов с двумя пластинами достаточно полно изложены в обзорной статье [2]. Определения и свойства обобщенных конденсаторов подробно рассматриваются в работе [1] и неоднократно повторяются и применяются, например, в статьях [9–14]. Поэтому мы опускаем здесь обсуждение этих понятий, делая, там где это потребуется, необходимые ссылки. В § 2 продолжаются исследования, начатые в работах [9, 15]. Доказательство основных результатов существенно использует диссимметризацию конденсаторов [2]. Устанавливаются оценки локального искажения и искажения линий уровня в $n \geq 2$ симметричных направлениях. Экстремальными в этом случае являются n-кратно симметричные функции Гретша $G(z;n,R)$ и Тейхмюллера $T(z;n,R)$.

В § 3 классическое неравенство Нехари [16, с. 258] для однолистных и ограниченных в круге функций обобщается на случай функций класса $\mathfrak{M}(R,M)$, причем с некоторым учетом граничного искажения. Основной результат этого параграфа (теорема 5) формулируется с использованием понятий функции Робена $g_D(z,\zeta,\gamma)$ и радиуса Робена $r(D,\gamma,\zeta)$. *Функция Робена* $g_D(z,\zeta,\gamma)$ области D с полюсом в точке $\zeta \in D$ определяется так же, как и классическая функция Грина оператора Лапласа $g_D(z,\zeta)$ с полюсом в ζ, с той лишь разницей, что требование $g_D(z,\zeta) = 0$ на ∂D заменяется условиями: $g_D(z,\zeta,\gamma) = 0$ на некотором граничном множестве $\gamma \subset \partial D$, а на оставшейся части границы области D производная по нормали к ∂D от функции $g_D(z,\zeta,\gamma)$ равна нулю [17]. Если граница области D негладкая, то функция Робена определяется с помощью конформного отображения. В отличие от классического случая [17] мы рассматриваем также функцию Робена с полюсом в граничной точке $\zeta \in D \backslash \gamma$ [1]. *Радиусом Робена* относительно конечной точки ζ назовем величину

$$r(D,\gamma,\zeta) = \exp\{\lim_{z\to\zeta} [g_D(z,\zeta,\gamma) + \log|z-\zeta|]\}.$$

В § 3 приводятся некоторые примеры, когда функцию Робена (и, следовательно, радиус Робена) можно выразить через функции $G(z;R)$, $T(z;R)$ либо через функции Грина круговых колец. Напомним одно из представлений функции Грина кольца $K(R)$, $R < \infty$, с полюсом в положительной точке ζ [18, с. 260]:

$$g_{K(R)}(re^{i\theta},\zeta) = -\frac{\log r}{\log R}\log\zeta - \log\left|\frac{\zeta - re^{i\theta}}{1-\zeta re^{i\theta}}\right| - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^{-n}}{n}\frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{R^n - R^{-n}}(r^n - r^{-n})\cos n\theta.$$

Сложность представлений функций Робена и экстремальных функций делает проблематичным применение ряда методов теории функций комплексного переменного. Этим объясняется, по-видимому, небольшое число работ о функциях, заданных в кольце, по сравнению с числом публикаций, посвященных регулярным в круге функциям. С другой стороны, емкостный подход [1] довольно просто приводит, например, к общим неравенствам (11), (13) данной статьи, причем с учетом граничного поведения функции и с утверждением о равенстве. Как следствия отсюда получаются оценки для функций класса $\mathfrak{M}(R,M)$ типа теорем искажения, включая двуточечные оценки. В частности, устанавливаются аналоги некоторых неравенств А. Ю. Солынина [19], Поммеренке и А. Васильева [20, 21], доказанные ранее для ограниченных и однолистных в круге функций.

Наконец, в § 4 приводятся теоремы искажения для функций класса $\mathfrak{M}(R)$ с участием производной Шварца $S_f(z) = f'''(z)/f'(z) - (3/2)(f''(z)/f'(z))^2$. Особенно отметим новое неравенство для $f'(z_k)$ и $S_f(z_k)$ в точках z_k, $k = 1,\dots,n$, симметрично расположенных на единичной окружности. Все выписанные оценки являются точными. Нетрудно показать, что любую регулярную и однолистную в круге функцию f можно представить как предел последовательности функций, которые с точностью до некоторых преобразований подобия областей значений и аргумента принадлежат классу $\mathfrak{M}(R)$. Если при этом f — ограниченная функция, то функции соответствующей последовательности принадлежат классу $\mathfrak{M}(R,M)$, $M < \infty$. Таким образом, любое утверждение данной статьи дает в качестве следствия некоторое утверждение для регулярных и однолистных в круге функций.

§ 1. Экстремальная задача Тейхмюллера и классические теоремы искажения

Пусть D — двусвязная область в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, и пусть E_1, E_2 — компоненты дополнения этой области. Задача Тейхмюллера состоит в отыскании области D с наибольшим значением модуля $M(D)$ при следующих условиях: E_1 содержит точки 0 и -1, а E_2 содержит ∞ и хотя бы одну точку на расстоянии s от начала координат. Хорошо известно, что единственным решением этой задачи является так называемое кольцо Тейхмюллера $D_s = \mathbf{C}\backslash\{[-1,0]\cup[s,+\infty)\}$ [4]. Введем обозначения: $K(r_1,r_2,r_3,r_4) = K\backslash\{[-R,r_1]\cup[r_2,r_3]\cup[r_4,R]\}$, где $-R \le r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \le R$; (a,b,c,d) — ангармоническое отношение четырех точек a, b, c и d на сфере $\overline{\mathbf{C}}$ [22].

Теорема 1. *Пусть функция f мероморфна и однолистна в кольце K, и пусть $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$, $r_1r_2 > 0$, $r_3r_4 > 0$, $1 \le |r_k| \le R$, $k = 1,2,3,4$. Предположим, что образ кольца $K(r_1,r_2,r_3,r_4)$ при отображении f отделяет некоторые точки w_2, w_3 от точек w_1, w_4, причем w_2 и w_3 принадлежат той связной компоненте дополнения области $f(K(r_1,r_2,r_3,r_4))$, которая содержит предельные значения $f(z)$, когда $z\to r_2$, $z\to r_3$. Тогда справедливо неравенство*

$$|(w_3,w_1,w_2,w_4)| \le |(T(r_3),T(r_1),T(r_2),T(r_4))|. \qquad (1)$$

Равенство в (1) имеет место только для суперпозиций $f = \varphi(T(e^{i\theta}z))$ и точек w_k, являющихся образами точек $e^{-i\theta}r_k$ или $e^{-i\theta}r_{5-k}$ соответственно при отображении f, $k = 1, 2, 3, 4$. Здесь φ — произвольное дробно-линейное отображение, а θ — любое вещественное число, если одновременно $r_1 = -R$, $r_2 = -1$, $r_3 = 1$ и $r_4 = R$, в противном случае $\theta = 0$.

Доказательство. Можно считать, что все точки w_k, $k = 1, 2, 3, 4$, различные. Обозначим через $g(w)$ дробно-линейное отображение сферы $\overline{\mathbf{C}}$ на себя, переводящее точки w_1, w_2, w_3 соответственно в точки ∞, -1 и 0. Ввиду инвариантности ангармонического отношения

$$(w_3, w_1, w_2, w_4) = (0, \infty, -1, g(w_4)) = -1/g(w_4).$$

Используя конформную инвариантность модуля и решение задачи Тейхмюллера, получим

$$M(K(r_1, r_2, r_3, r_4)) = M(g(f(K(r_1, r_2, r_3, r_4)))) \leq M(D_s),$$

где $s = |g(w_4)|$. С другой стороны, если $m(w)$ — дробно-линейное отображение, переводящее точки $T(r_1)$, $T(r_2)$, $T(r_3)$ в точки ∞, -1 и 0 соответственно, то аналогично

$$(T(r_3), T(r_1), T(r_2), T(r_4)) = (0, \infty, -1, m(T(r_4))) = -1/m(T(r_4)),$$

$$M(K(r_1, r_2, r_3, r_4)) = M(D_q),$$

где $q = m(T(r_4))$. Из монотонности модуля вытекает неравенство $s \geq q$, равносильное (1).

Предположим теперь, что в (1) имеет место равенство. Тогда необходимо $s = q$ и функции $g \circ f$ и $m \circ T$ отображают кольцо $K(r_1, r_2, r_3, r_4)$ на одно и то же кольцо D_s. Если одна из точек r_k, $1 \leq k \leq 4$ (например, r_2), принадлежит области K, то из аналитичности функции $f(z)$ в кольце K вытекает, что $g(f(r_2)) = -1$ либо $g(f(r_2)) = 0$. В первом случае имеем $g \circ f \equiv m \circ T$ и, следовательно, $f \equiv g^{-1} \circ m \circ T$, что доказывает утверждение о равенстве, при этом $f(r_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Во втором случае суперпозиция $h \circ g \circ f$, где $h(w) = (sw + s)/(w - s)$, отображает кольцо $K(r_1, r_2, r_3, r_4)$ на кольцо D_s и точку r_2 в точку -1, что вновь дает соотношение $f \equiv g^{-1} \circ h^{-1} \circ m \circ T$, причем $f(r_1) = w_4$, $f(r_2) = w_3$, $f(r_3) = w_2$, $f(r_4) = w_1$. Пусть теперь $r_1 = -R$, $r_2 = -1$, $r_3 = 1$ и $r_4 = R$. Тогда из условия равенства вытекает, что $g(f(z)) \equiv m(T(e^{i\theta}z))$, где θ — некоторое вещественное число, а g и m определены выше. Отсюда $f = \varphi(T(e^{i\theta}z))$ и $f(e^{-i\theta}r_k) = w_k$ либо $f(e^{-i\theta}r_k) = w_{5-k}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Здесь φ — дробно-линейное отображение. Теорема доказана.

Для функций f класса $\mathfrak{M}(R)$ прямое применение теоремы 1 ведет к грубой оценке. Точные неравенства получаются, если заметить, что каждая такая функция аналитически продолжается в кольцо $1/R < |z| < R$, и применить теорему 1 к суперпозиции $f(z/R)$, заданной в кольце $K(R^2)$. В результате получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть функция f принадлежит классу $\mathfrak{M}(R)$, и пусть $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$, $r_1r_2 > 0$, $r_3r_4 > 0$, $1/R \leq |r_k| \leq R$, $k = 1, 2, 3, 4$. Предположим, что образ кольца $\{1/R < |z| < R\} \backslash \{[-R, r_1] \cup [r_2, r_3] \cup [r_4, R]\}$ при отображении f отделяет некоторые точки w_2, w_3 от точек w_1, w_4. Тогда*

$$|(w_3, w_1, w_2, w_4)| \leq |(G(r_3), G(r_1), G(r_2), G(r_4))|. \tag{2}$$

Равенство в (2) *реализуется для суперпозиций* $\varphi\circ G$, *где* φ — *конформный автоморфизм внешности круга* $|w|>1$, *и для точек* w_k, *являющихся соответственно образами точек* r_k *или* r_{5-k} *при этом отображении*, $k=1,2,3,4$.

Другой способ применения теоремы 1 к функциям класса $\mathfrak{M}(R)$ заключается в следующем. Обозначим через $\psi(w)=(w+1/w)/2$ функцию Жуковского. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для любых точек a, b, c и d, лежащих в $|w|>1$, выполняется равенство

$$(\psi(a),\psi(b),\psi(c),\psi(d))=\frac{(a,b,c,d)}{(b^{-1},a^{-1},c,d)}.$$

Если теперь $f\in\mathfrak{M}(R)$, то суперпозиция $\psi\circ f$ мероморфна и однолистна в кольце K и теорема 1 дает

Следствие 2. *Пусть функция* f *принадлежит* $\mathfrak{M}(R)$, *и пусть точки* r_k *и* w_k *удовлетворяют условиям теоремы* 1, *причем* $|w_k|\geq 1$, $k=1,2,3,4$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{|(w_3,w_1,w_2,w_4)|}{|(1/w_1,1/w_3,w_2,w_4)|}\leq\frac{|(G(r_3),G(r_1),G(r_2),G(r_4))|}{|(1/G(r_1),1/G(r_3),G(r_2),G(r_4))|}. \tag{3}$$

Равенство в (3) *имеет место в случае, когда* $f=\varphi\circ G$, *где* φ — *конформный автоморфизм области* $|w|>1$, *сохраняющий вещественную ось, и точки* w_k *являются соответственно образами точек* r_k *или* r_{5-k}, $k=1,2,3,4$.

Отметим некоторые следствия неравенств (1)–(3). Запишем сначала неравенство (2) в явном виде:

$$\left|\frac{(w_2-w_3)(w_4-w_1)}{(w_2-w_1)(w_4-w_3)}\right|\leq\left|\frac{(G(r_2)-G(r_3))(G(r_4)-G(r_1))}{(G(r_2)-G(r_1))(G(r_4)-G(r_3))}\right|. \tag{2$'$}$$

Пусть f — регулярная функция класса $\mathfrak{M}(R)$ и z — произвольная точка кольца K. Обозначим через θ произвольное значение аргумента точки z, и пусть φ_θ — поворот вокруг начала координат на угол θ. Положим $r_1=-R$, $r_2=-1/R$, $r_3=1/|z|$, $r_4=|z|$, $w_1=\infty$, $w_2=0$, $w_3=1/\overline{f(z)}$, $w_4=f(z)$ и применим следствие 1 к функции $f\circ\varphi_\theta$. Неравенство (2$'$) дает классическую оценку

$$|f(z)|\geq|G(|z|)|,\quad z\in K. \tag{4}$$

Оценка модуля функции сверху

$$|f(z)|\leq|G(-|z|)|,\quad z\in K, \tag{5}$$

также вытекает из неравенства (2$'$), если положить $r_1=-R$, $r_2=-|z|$, $r_3=-1/|z|$, $r_4=-1/R$, $w_1=\infty$, $w_2=f(z)$, $w_3=1/\overline{f(z)}$, $w_4=0$ и применить следствие 1 к функции $f\circ\varphi_{\theta+\pi}$. Далее, применяя (2$'$) в случае регулярной функции $f\in\mathfrak{M}(R)$ и точек $r_1=-R<r_2<r_3<r_4=-1/R$, а также точек $w_1=\infty$, $w_2=f(r_2)$, $w_3=f(r_3)$, $w_4=0$, приходим к новому неравенству

$$\left|\frac{f(r_2)-f(r_3)}{f(r_3)}\right|\leq\left|\frac{G(r_2)-G(r_3)}{G(r_3)}\right|,$$

справедливому для любых точек r_2, r_3, $-R<r_2<r_3<-1/R$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $r_2\to r_3$ и привлекая при необходимости поворот вокруг начала, получим следующую оценку модуля логарифмической производной:

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \le \left|\frac{G'(-|z|)}{G(-|z|)}\right|, \quad z \in K.$$

Учитывая (5), имеем

$$|f'(z)| \le |G'(-|z|)|, \quad z \in K.$$

Аналогично, положив $r_1 = -R$, $r_2 = -1/R$, $w_1 = \infty$, $w_2 = 0$, $w_3 = f(r_3)$ и $w_4 = f(r_4)$, получаем неравенство

$$\left|\frac{f(r_4) - f(r_3)}{f(r_3)}\right| \ge \left|\frac{G(r_4) - G(r_3)}{G(r_3)}\right|, \quad 1/R < r_3 < r_4 < R,$$

а также неравенства

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \ge \left|\frac{G'(|z|)}{G(|z|)}\right|, \quad z \in K,$$

$$|f'(z)| \ge |G'(|z|)|, \quad z \in K. \tag{6}$$

Отдельные доказательства оценок $|f(z)|$ и $|f'(z)|$ методом экстремальных метрик приведены в [23, с. 24–29]. Неравенство (1) совпадает по форме с неравенством ($2'$), если функцию T заменить на G. Предельным переходом в (1) при $r_1 \to r_2$, $r_4 \to r_3$ получаем следующий результат [9, неравенство (1.1)]:

$$\frac{|f'(r_2)f'(r_3)|}{|f(r_2) - f(r_3)|^2} \ge \frac{|T'(r_2)T'(r_3)|}{|T(r_2) - T(r_3)|^2}, \tag{7}$$

справедливый для любых мероморфных и однолистных в K функций и любых вещественных точек r_2, $r_3 \in K$, отличных от полюсов f.

В работах [6, 7] изучался класс $\mathscr{F}_\rho$ регулярных и однолистных в кольце $R_\rho := \{z : \rho < |z| < 1\}$ функций f, удовлетворяющих условиям $f(R_\rho) \subset \{w : 0 < |w| < 1\}$ и $f(\{z : |z| = 1\}) = \{w : |w| = 1\}$. Учитывая аналитическое продолжение f по принципу симметрии через окружность $|z| = 1$, заключаем, что класс $\mathscr{F}_\rho$ совпадает, по существу, с подклассом регулярных функций класса $\mathfrak{M}(1/\rho)$. Неравенства (4), (5) дают оценки модуля функции в классе $\mathscr{F}_\rho$:

$$|G(-|z|; 1/\rho)| \le |f(z)| \le |G(|z|; 1/\rho)|, \quad z \in R_\rho \tag{8}$$

(ср. [7, с. 195–199]). В дополнение к результатам Дюрена и Хукемана приведем новые оценки модулей производных в классе $\mathscr{F}_\rho$. Значения функции f в точках, симметричных относительно окружности $|z| = 1$, связаны следующим образом: $f(z) = 1/\overline{f(1/\bar{z})}$, $z \in R_\rho$. Поэтому указанные выше неравенства для модулей логарифмических производных в подклассе регулярных функций класса $\mathfrak{M}(R)$ влекут оценки

$$\left|\frac{G'(|z|; 1/\rho)}{G(|z|; 1/\rho)}\right| \le \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \le \left|\frac{G'(-|z|; 1/\rho)}{G(-|z|; 1/\rho)}\right|, \quad z \in R_\rho.$$

Далее, если $f \in \mathscr{F}_\rho$, то $f(\rho z) \in \mathfrak{M}(1/\rho^2)$. Следовательно, из (7) вытекает, что

$$\frac{|f'(r_2)f'(r_3)|}{|f(r_2) - f(r_3)|^2} \ge \frac{|T'(r_2/\rho; 1/\rho^2)T'(r_3/\rho; 1/\rho^2)|}{\rho^2|T(r_2/\rho; 1/\rho^2) - T(r_3/\rho; 1/\rho^2)|^2} = \frac{|G'(r_2; 1/\rho)G'(r_3; 1/\rho)|}{|G(r_2; 1/\rho) - G(r_3; 1/\rho)|^2}$$

для любых вещественных r_2, $r_3 \in \{z : \rho < |z| < 1/\rho\}$. Пусть z — произвольная точка кольца R_ρ. Привлекая при необходимости поворот вокруг начала на $\arg z$ и полагая $r_2 = |z|$, $r_3 = 1/|z|$, получаем

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \ge \frac{|G'(|z|; 1/\rho)|}{1 - |G(|z|; 1/\rho)|^2}.$$

Ввиду (8) последнее неравенство сильнее известной оценки Дюрена [6]:

$$|f'(z)| \geq |G'(|z|; 1/\rho)|$$

(см. также [7, с. 221].) Положим в следствии 2 $r_1 = -R < r_2 < r_3 < -1 = r_4$, $w_1 = \infty$, $w_2 = f(r_2)$, $w_3 = f(r_3)$, $w_4 = -1$ и затем перейдем к пределу при $r_2 \to r_3$. В результате получим неравенство

$$\left|\frac{f'(r_3)(f(r_3)-1)}{f(r_3)(f(r_3)+1)}\right| \leq \left|\frac{G'(r_3)(G(r_3)-1)}{G(r_3)(G(r_3)+1)}\right|, \quad -R < r_3 < -1,$$

которое с учетом поворота справедливо при замене в левой части r_3 на $z \in K$, а в правой — на $-|z|$. Пусть теперь $f \in \mathscr{F}_\rho$, $-1 < a < -\rho$. Из последнего неравенства вытекает, что

$$\frac{|f'(a)|(1+|f(a)|)}{|f(a)|(1-|f(a)|)} \leq \frac{|G'(a;1/\rho)|(1+|G(a;1/\rho)|)}{|G(a;1/\rho)|(1-|G(a;1/\rho)|)}.$$

Поскольку функция $t = (1+x)/[x(1-x)]$ возрастает на промежутке $[\sqrt{2}-1,\ 1)$, с учетом (8) имеем

$$|f'(a)| \leq |G'(a;1/\rho)|$$

в тех случаях, когда $|G(a;1/\rho)| \geq \sqrt{2}-1$ (ср. [6; 7, с. 216]). В общем случае оценка $|f'(a)|$ сверху дана в работе [7].

В дополнение к теореме 1 рассмотрим также теорему искажения для двух точек z_1 и z_2, не лежащих на одной прямой.

Теорема 2. *Пусть функция f мероморфна и однолистна в кольце K, и пусть z_1, z_2 — произвольные различные точки этого кольца. Предположим, что точки w_3 и w_4 принадлежат той связной компоненте дополнения области $f(K)$, которая содержит предельные значения $f(z)$, когда $z \to 1$. Тогда*

$$|(f(z_1), w_3, f(z_2), w_4)| \leq |(T(-|z_1|), T(1), T(|z_2|), T(-1))|.$$

Если точки w_3 и w_4 принадлежат другой связной компоненте дополнения $f(K)$, то справедливо неравенство

$$|(f(z_1), w_3, f(z_2), w_4)| \leq |(T(-|z_1|), T(R), T(|z_2|), T(-R))|.$$

Равенство в каждом из этих случаев имеет место тогда и только тогда, когда точки z_1 и z_2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, и по разные стороны от этого начала, $w_3 = f(z_2/|z_2|)$, $w_4 = f(z_1/|z_1|)$ в первом случае и $w_3 = f(Rz_2/|z_2|)$, $w_4 = f(Rz_1/|z_1|)$ — во втором, а функция f — суперпозиция, состоящая из поворота $\zeta = -z|z_1|/z_1$, функции T и произвольного дробно-линейного автоморфизма сферы.

Доказательство. Рассмотрим двусвязную область

$$\widetilde{K}(z_1, z_2) := K \backslash \{[z_1, Rz_1/|z_1|] \cup [z_2, Rz_2/|z_2|]\}.$$

Из свойств поляризации [2] вытекает неравенство для модулей

$$M(K(r_1, r_2, r_3, r_4)) \leq M(\widetilde{K}(z_1, z_2)),$$

где $r_1 = -|z_1|$, $r_2 = -1$, $r_3 = 1$, $r_4 = |z_2|$. Следуя доказательству теоремы 1, применяем решение задачи Тейхмюллера к двусвязной области $g(f(\widetilde{K}(z_1, z_2)))$ и повторяем это доказательство с переобозначением $w_1 = f(z_1) \leftrightarrow w_3$, $(w_2 = f(z_2))$. Второй случай вытекает из первого либо рассматривается аналогично, но уже с привлечением области $K \backslash \{[z_1, z_1/|z_1|] \cup \{[z_2, z_2/|z_2|]\}$ вместо $\widetilde{K}(z_1, z_2)$. Теорема доказана.

§ 2. Теоремы искажения, связанные с n-кратной симметрией

Введем обозначения

$$G(z;n,R)=\sqrt[n]{G(z^n;R^n)},\quad z\in K,\quad (\sqrt[n]{1}=1);$$

$$T(z;n,R)=\sqrt[n]{T(z^n;R^n)+1},\quad z\in K,\quad (\sqrt[n]{1}=1);$$

$$D_k=\{z=re^{i\theta}:0<r<\infty,\ |\theta-2\pi k/n|<\pi/n\},\quad k=1,\dots,n.$$

Нетрудно видеть, что функция $w=G(z;n,R)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(R)$ и отображает кольцо K на область $|w|>1$ с разрезами по лучам $\arg(w^n)=0$, $G(R^n;R^n)\le|w^n|\le\infty$, а функция $w=T(z;n,R)$ конформно и однолистно отображает кольцо K на плоскость с разрезами по отрезкам $\arg(w^n)=0$; $0\le|w|\le1$ и по лучам $\arg(w^n)=0$, $T(R^n;R^n)+1\le|w^n|\le\infty$.

Теорема 3. *Пусть функция f мероморфна и однолистна в кольце K, r — действительное число, $1<r<R$, и z_k, $k=1,\dots,n$ $(n\ge2)$, — произвольные точки, удовлетворяющие условиям $|z_k|=r$, $f(z_k)\in D_k$, $k=1,\dots,n$. Тогда имеет место неравенство*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{f(z_k)^{n/2-1}f'(z_k)}{\mathrm{Re}f(z_k)^{n/2}}\right|}\ge\frac{T'(r;n,R)}{T(r;n,R)}.$$

Равенство достигается для функций вида $f(z)=cT(z;n,R)$ и точек

$$z_k=r\exp(2\pi ik/n),\quad k=1,\dots,n,$$

где c — произвольная положительная постоянная.

Доказательство. Следуя работе [9], рассмотрим два конденсатора [2]:

$$C^*=\left(\bigcup_{k=1}^{n}[0,re^{i2\pi k/n}]\cup E,\bigcup_{k=1}^{n}[(r+\Delta r)e^{i2\pi k/n},Re^{i2\pi k/n}]\cup\{z:|z|\ge R\}\right),$$

$$C=\left(\bigcup_{k=1}^{n}[0,z_k]\cup E,\bigcup_{k=1}^{n}[z_k+z_k\Delta r/r,z_kR/r]\cup\{z:|z|\ge R\}\right),$$

где $E=\{z:|z|\le1\}$ и положительное число Δr выбрано настолько малым, что точки $f(z_k+z_k\Delta r/r)$ принадлежат секторам D_k, $k=1,\dots,n$. Конденсатор C является результатом дессимметризации конденсатора C^*, и по теореме 1.10 в [2, с. 35] для емкостей этих конденсаторов выполняется неравенство

$$\mathrm{cap}\ C^*\ge\mathrm{cap}\ C. \tag{9}$$

Обозначим через $f(C)$ образ конденсатора C при отображении f. Согласно следствию 2.5 работы [9] справедлива оценка

$$\mathrm{cap}\ C=\mathrm{cap}\ f(C)\ge2\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbf{K}(q_k)}{\mathbf{K}(\sqrt{1-q_k^2})}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{4}{\sqrt{1-q_k^2}}+o(1),\quad \Delta r\to0,$$

где

$$q_k=\frac{|f^{n/2}(z_k+z_k\Delta r/r)+\overline{f^{n/2}(z_k)}|-|f^{n/2}(z_k+z_k\Delta r/r)-f^{n/2}(z_k)|}{|f^{n/2}(z_k+z_k\Delta r/r)+\overline{f^{n/2}(z_k)}|+|f^{n/2}(z_k+z_k\Delta r/r)-f^{n/2}(z_k)|}.$$

С другой стороны, конденсатор C^* конформно эквивалентен конденсатору $(\{z : 0 \le z^n \le 1\},\ \{z : z^n \ge t^n\})$, $t = T(r+\Delta r; n, R)/T(r; n, R)$, и его емкость равна

$$\operatorname{cap} C^* = 2n\frac{\mathbf{K}(\sqrt{t^{-n}})}{\mathbf{K}(\sqrt{1-t^{-n}})} = \frac{4n}{\pi}\log\frac{4}{\sqrt{1-t^{-n}}} + o(1), \quad \Delta r \to 0$$

(см. [8, с. 116]). С учетом неравенства (9) приходим к соотношению

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-q_k^2\right) \ge (1-t^{-n})^n(1+o(1)).$$

Осталось заметить, что

$$1-q_k^2 = n\Delta r\left|\frac{f(z_k)^{n/2-1}f'(z_k)}{\operatorname{Re} f(z_k)^{n/2}}\right| + o(\Delta r), \quad \Delta r \to 0,$$

$$(1-t^{-n}) = n\Delta r\left|\frac{T'(r; n, R)}{T(r; n, R)}\right| + o(\Delta r), \quad \Delta r \to 0.$$

Теорема доказана.

Следствие 3. *Если функция f мероморфна и однолистна в K, а точки z_k, $k = 1, \dots, n$ $(n \ge 2)$, удовлетворяют условиям $|z_k| = r$, $1 < r < R$, $\arg f(z_k)/f(z_1) = 2\pi(k-1)/n$, $k = 1, \dots, n$, то*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{f'(z_k)}{f(z_k)}\right|} \ge \frac{T'(r; n, R)}{T(r; n, R)}.$$

Равенство имеет место для функций вида $f(z) = cT(e^{-i\theta}z; n, R)$ и точек $z_k = r\exp(i(\theta + 2\pi k/n))$, $k = 1, \dots, n$, где θ — вещественная, а c — произвольная отличная от нуля постоянные.

Следствие 4. *Если $f \in \mathfrak{M}(R)$, а точки z_k, $k = 1, \dots, n$, как в предыдущем следствии, то*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{f'(z_k)}{f(z_k)}\right|} \ge \frac{G'(r; n, R)}{G(r; n, R)}.$$

Равенство достигается для функций $f(z) = e^{i\psi}G(e^{-i\theta}z; n, R)$ и точек

$$z_k = r\exp(i(\theta + 2\pi k/n)), \quad k = 1, \dots, n,$$

где θ и ψ — вещественные постоянные.

Следствие 5. *Если $f \in \mathfrak{M}(R)$, то для любых точек z_1, z_2, z_3 на окружности $|z| = 1$ имеет место точная оценка*

$$\frac{\left|\prod\limits_{k=1}^{3} f'(z_k)\right|}{|(f(z_1)-f(z_2))(f(z_2)-f(z_3))(f(z_3)-f(z_1))|} \ge \frac{\sqrt{3}}{9}\left[\frac{G'(r; 3, R)}{G(r; 3, R)}\right]^3$$

с равенством для функций $f(z) = e^{i\psi}G(e^{-i\theta}z; 3, R)$ и точек $z_k = \exp(i(\theta + 2\pi k/3))$, $k = 1, 2, 3$, где θ и ψ — вещественные постоянные.

Доказательство вытекает из следствия 3, примененного к суперпозиции $\Phi \circ f$, где Φ — конформный автоморфизм области $|w| > 1$, переводящий точки $f(z_k)$ в симметричные точки на единичной окружности $|w| = 1$.

Введем следующие обозначения:

$L(r,f)$ $(1 \le r < R)$ — образ окружности $|z| = r$ при отображении $f \in \mathfrak{M}(R)$ (линия уровня);

$w(r,f,\varphi)$ — произвольная точка пересечения линии уровня $L(r,f)$ с лучом $\arg w = \varphi$ (разные точки могут получить одно обозначение);

$X_f(r,\varphi)$ $(1 < r \le R)$ — расстояние от начала координат до ближайшей граничной точки множества $f(\{z : 1 < |z| < r\})$, лежащей на луче $\arg w = \varphi$, $1 < |w| < \infty$ $(f \in \mathfrak{M}(R))$. Если при данном φ указанной точки не существует, то полагаем $X_f(r,\varphi) = +\infty$.

Теорема 4. *Если f — регулярная функция класса $\mathfrak{M}(R)$, то для любых θ, r и ρ, $1 \le r < R$, $1 \le \rho < R$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\log\frac{w(r,f,\theta+2\pi k/n)}{w(\rho,f,\theta+2\pi k/n)}\right| \ge \left|\log\frac{G(r;n,R)}{G(\rho;n,R)}\right|.$$

Равенство имеет место для функций $f(z) = e^{i\theta}G(z;n,R)$ и любых r, ρ.

Доказательство. Можно считать, что $1 \le r < \rho < R$. Обозначим через γ_k отрезок $[w(r,f,\theta+2\pi k/n), w(\rho,f,\theta+2\pi k/n)]$, и пусть $z = z_k(t)$ — кусочно непрерывная на отрезке $[r,\rho]$ функция, удовлетворяющая условиям: $z_k(t) \in f^{-1}(\gamma_k)$, $|z_k(t)| = t$, $r \le t \le \rho$, $k = 1,\dots,n$. С учетом следствия 4 при $n \ge 2$ и неравенства (6) в случае $n = 1$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\log\frac{w(r,f,\theta+2\pi k/n)}{w(\rho,f,\theta+2\pi k/n)}\right| = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k}\frac{|dw|}{|w|} \ge \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{f^{-1}(\gamma_k)}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right||dz|$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{r}^{\rho}\left|\frac{f'(z_k(t))}{f(z_k(t))}\right|dt \ge n\int\limits_{r}^{\rho}\frac{G'(t;n,R)}{G(t;n,R)}\,dt = n\log\frac{G(\rho;n,R)}{G(r;n,R)}.$$

Теорема доказана.

Полагая в теореме 4 $\rho = 1$, получаем

Следствие 6 [9, § 3]. *Для любой регулярной функции класса $\mathfrak{M}(R)$ и любых n, θ, r, $1 < r \le R$, выполняется точное неравенство*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}X_f(r,\theta+2\pi k/n)} \ge G(r;n,R).$$

Следствие 7. *Пусть f — регулярная функция класса $\mathfrak{M}(R)$, $1 < r < R$, и пусть точки z_k, $k = 1,\dots,n$ $(n \ge 1)$, удовлетворяют условиям $|z_k| = r$, $\arg(f(z_k)/f(z_1)) = 2\pi(k-1)/n$, $k = 1,\dots,n$. Тогда*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}|f'(z_k)|} \ge G'(r;n,R).$$

Равенство имеет место для $f(z) = e^{i\psi}G(e^{-i\theta}z;n,R)$ и точек $z_k = r\exp(i(\theta + 2\pi k/n))$, $k = 1,\dots,n$.

Это утверждение непосредственно вытекает из следствия 4 $(n \ge 2)$, неравенства (6) $(n = 1)$ и следствия 6.

§ 3. Аналог неравенства Нехари и граничное искажение при конформном отображении

Пусть функция f регулярна и однолистна в круге $U := \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяет условию $|f(z)| < 1$ при $z \in U$. В теории функций хорошо известно неравенство Нехари [16, с. 258]

$$\left|\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k\delta_l \log\frac{f(z_k)-f(z_l)}{z_k-z_l}\right| \le \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k\bar{\delta}_l \log\frac{1-f(z_k)\overline{f(z_l)}}{1-z_k\bar{z}_l},$$

справедливое для любых точек z_k, $k = 1,\ldots,n$, в круге U и любых комплексных постоянных δ_k, $k = 1,\ldots,n$, таких, что $\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n = 0$. Поскольку функция Грина в круге U имеет вид

$$g_U(z,a) = \log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right|,$$

ограничиваясь вещественными постоянными δ_k, $k = 1,\ldots,n$, приходим к соотношению

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log(r(U,z_k)|f'(z_k)|) + \sum_{\substack{k,l=1,\\ k\ne l}}^{n} \delta_k\delta_l g_U(z_k,z_l)$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log r(U,f(z_k)) + \sum_{\substack{k,l=1,\\ k\ne l}}^{n} \delta_k\delta_l g_U(f(z_k),f(z_l)). \quad (10)$$

Рассмотрим близкие неравенства для функций f, заданных в кольце $K(R)$, с заменой функций Грина функциями Робена, а внутренних радиусов — радиусами Робена [1, 17].

Теорема 5. *Пусть функция f принадлежит классу $\mathfrak{M}(R,M)$, γ — непустое замкнутое подмножество $\partial K(R)$, состоящее из конечного числа невырожденных жордановых дуг, и пусть Γ — такое же подмножество границы $\partial K(M)$. Пусть z_k, $k = 1,\ldots,n$, — произвольные точки множества $\overline{K(R)}\backslash\gamma$, причем в случае $|z_k| = R$ требуем дополнительно, чтобы $M \ne \infty$, $|f(z_k)| = M$ и отображение f было конформно в z_k, $1 \le k \le n$, а в случае $M = \infty$ точки z_k были отличны от полюса функции f, $k = 1,\ldots,n$. Предположим, что $f(\gamma) \subset \Gamma$, где образ $f(\gamma)$ понимается в смысле граничного соответствия. Тогда для любых вещественных чисел δ_k, $k = 1,\ldots,n$, справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\delta_k^2 \log(r(K(R),\gamma,z_k)|f'(z_k)|) + \sum_{\substack{k,l=1,\\ k\ne l}}^{n} \alpha_k\delta_k\delta_l g_{K(R)}(z_k,z_l,\gamma)$$
$$\ge \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\delta_k^2 \log r(K(M),\Gamma,f(z_k)) + \sum_{\substack{k,l=1\\ k\ne l,}}^{n} \alpha_k\delta_k\delta_l g_{K(M)}(f(z_k),f(z_l),\Gamma), \quad (11)$$

где $\alpha_k = 1$, если $z \in \partial K(R)$, и $\alpha_k = 2$, если $z \in K(R)$, $k = 1,\ldots,n$. Равенство в (11) при $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k^2 \ne 0$ достигается тогда и только тогда, когда $\overline{f(K(R))} = \overline{K(M)}$, $f(\gamma) = \Gamma$ и множество $K(M) \cap \partial f(K(R))$ состоит из конечного числа кусочно *гладких кривых, во внутренних точках которых производная по нормали от функции*

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k g_{K(M)}(w, f(z_k), \Gamma) \tag{12}$$

равна нулю.

Если для отображения f верно включение $f((\partial K(R))\backslash\gamma) \subset (\partial K(M))\backslash\Gamma$, то для любых вещественных δ_k, $k = 1, \ldots, n$, справедливо неравенство в другую сторону:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_k^2 \log(r(K(R), \gamma, z_k)|f'(z_k)|) + \sum_{\substack{k,l=1,\\ k\neq l}}^{n} \alpha_k \delta_k \delta_l g_{K(R)}(z_k, z_l, \gamma)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_k^2 \log r(K(M), \Gamma, f(z_k)) + \sum_{\substack{k,l=1,\\ k\neq l}}^{n} \alpha_k \delta_k \delta_l g_{K(M)}(f(z_k), f(z_l), \Gamma). \tag{13}$$

Равенство в (13) при $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k^2 \neq 0$ имеет место в том и только в том случае, когда $\overline{f(K(R))} = \overline{K(M)}$, $f(\gamma) \cap \partial K(M) = \Gamma$ и функция (12) равна нулю на множестве $K(M) \cap f(\gamma)$.

Доказательство. Можно считать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k^2 \neq 0$. Пусть выполняется включение $f(\gamma) \subset \Gamma$. Для достаточно малого r рассмотрим обобщенные конденсаторы [1]:

$$C_1 = C\big(r; K(R), \gamma, \{z_k\}_{k=1}^n, \{\delta_k\}_{k=1}^n, \{r, \ldots, r\}\big),$$

$$C_2 = C\big(r; f(K(R)), f(\gamma), \{f(z_k)\}_{k=1}^n, \{\delta_k\}_{k=1}^n, \{r|f'(z_k)|\}_{k=1}^n\big),$$

$$C_3 = C\big(r; K(M), \Gamma, \{f(z_k)\}_{k=1}^n, \{\delta_k\}_{k=1}^n, \{r|f'(z_k)|\}_{k=1}^n\big).$$

Ввиду конформной инвариантности и монотонности емкости (теоремы 1 и 2 работы [1]) имеем

$$\operatorname{cap}\, C_1 = \operatorname{cap}\, C_2 \leq \operatorname{cap}\, C_3.$$

Осталось применить асимптотическую формулу (7) работы [1] для емкостей конденсаторов C_1 и C_3 при $r \to 0$. Утверждение о равенстве в (11) вытекает из теорем 1 и 3 статьи [12]. Аналогично устанавливается неравенство (13), когда справедливо включение $f((\partial K(R))\backslash\gamma) \subset (\partial K(M))\backslash\Gamma$. В этом случае к конденсаторам C_1, C_2 и C_3 необходимо применить теоремы 3 и 7 работы [1]. Для доказательства случая равенства при $\gamma \neq \partial K(R)$ используются теоремы 1 и 2 [12], а при $\gamma = \partial K(R)$ — теорема 1 работы [13]. Теорема доказана.

В случае, когда $\gamma = \partial K(R)$, $\Gamma = \partial K(M)$, включение $f(\varnothing) \subset \varnothing$ выполняется по определению и неравенство (13) является аналогом неравенства Нехари (10) для функций f, заданных в кольце, причем без условия $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k = 0$. Приведем некоторые следствия теоремы 5 для специальных подобранных множеств γ, Γ, точек z_k и чисел δ_k, $k = 1, \ldots, n$.

Следствие 8. *Пусть функция f класса $\mathfrak{M}(R,M)$, $M \neq \infty$, принимает вещественные значения в точках кольца $K(R)$ на вещественной оси, и пусть $f(1)=1$. Тогда для любого α, $|\alpha|=1$, $\alpha \neq 1$, и любой вещественной точки $z \in K(R)$ имеет место неравенство*

$$|f'(z)| \geq \left| \frac{T(\alpha;R)T'(z;R)T(f(z);M)(T(f(z);M)-T(f(\alpha);M))}{T(f(\alpha);M)T'(f(z);M)T(z;R)(T(z;R)-T(\alpha;R))} \right|. \qquad (14)$$

Равенство в (14) достигается для функций класса $\mathfrak{M}(R,M)$, отображающих кольцо $K(R)$ на кольцо $K(M)$ с разрезами по вещественной оси.

Доказательство. Возьмем в теореме 5 в качестве множества γ дугу окружности $|z|=1$, соединяющую точки α, $\bar{\alpha}$ и проходящую через точку $z=1$, и пусть $n=1$, $z_1=z$, $\delta_1=1$. Неравенство (11) дает оценку

$$|f'(z)| \geq \frac{r(K(M),f(\gamma),f(z))}{r(K(R),\gamma,z)}. \qquad (15)$$

Для вычисления радиусов Робена заметим, что функция

$$w=\Phi(z) \equiv T(z;R)/(T(z;R)-T(\alpha;R))$$

конформно и однолистно отображает кольцо $K(R)$ на w — плоскость с разрезами по вещественной оси, причем дуга γ переходит в смысле граничного соответствия в луч $[-\infty,0]$. Учитывая симметрию функции Грина такой плоскости с разрезами с полюсом в вещественной точке $\Phi(z)$, заключаем, что

$$r(K(R),\gamma,z)\cdot|\Phi'(z)| = r(\mathbf{C}_w \setminus [-\infty,0],\Phi(z)) = 4\Phi(z).$$

Отсюда находим радиус Робена $r(K(R),\gamma,z)$. Аналогично вычисляется величина $r(K(M),f(\gamma),f(z))$. Утверждение о равенстве вытекает из теоремы 5 и того факта, что производная по нормали к вещественной оси от функции $g_{K(M)}(w,f(z),f(\gamma))$ в точках кольца $K(M)$, отличных от полюса $f(z)$, равна нулю. Следствие доказано.

Из приведенного доказательства видно, что в случае $\alpha=-1$ условие вещественности z и вещественности f на вещественной оси можно убрать. При этом вновь справедливо неравенство (14), где необходимо заменить z, $f(z)$ на $|z|$, $|f(z)|$ соответственно, и $\alpha=f(\alpha)=-1$, $T(\alpha;R)=T(f(\alpha);M)=-1$.

В случае $M=\infty$ вновь имеем неравенство (15), где для вычисления радиусов Робена необходимо воспользоваться функцией $(z+1/z)/4-1/2$ вместо функции Тейхмюллера $T(z;R)$. В этом случае мы дополняем соответствующую оценку $|f'(z)|$ снизу из § 1 с учетом граничного поведения f на окружности $|z|=1$.

Из результатов Дженкинса [24] следует, что $f(\gamma) \subset G(\gamma;R,M)$, где $G(z;R,M)$ — функция, конформно и однолистно отображающая кольцо $K(R)$ на кольцо $K(M)$ с разрезом по некоторому отрезку $[-M,\delta(M,R)]$, $G(1;R,M)=1$. Поэтому из неравенства (15) вытекает оценка

$$|f'(z)| \geq \frac{r(K(M),G(\gamma;R,M),f(z))}{r(K(R),\gamma,z)}$$

с равенством для функции $G(z;R,M)$.

Аналогично следствию 8 устанавливается

Следствие 9. *Если функция f класса $\mathfrak{M}(R,M)$, $M\neq\infty$, определена также в некоторой граничной точке z, $|z|=R$, причем $|f(z)|=M$ и f конформна в точке z, то для любого замкнутого подмножества γ единичной окружности $|z|=1$, состоящего из конечного числа невырожденных жордановых дуг, справедливо неравенство* (15) *с равенством в случае, когда $f(\cdot)=G(\cdot;R,M)$, $z=R$ и множество γ симметрично относительно вещественной оси.*

В простейшем случае $\gamma=\{z:|z|=1\}$ (и, следовательно, $f(\gamma)=\{w:|w|=1\}$) неравенство (15) для граничной точки z перепишется в виде

$$|f'(z)|\geq\frac{r(K(M^2),M)}{r(K(R^2),R)},\quad |z|=R,\ |f(z)|=M.$$

Учитывая связь между функциями класса $\mathfrak{M}(R,M)$ и ограниченными в круге функциями (см. введение), заключаем, что выписанное неравенство содержит в пределе оценку Солынина — Поммеренке — Васильева вида $|f'(z)|\geq 1/\sqrt{|f'(0)|}$ [19, с. 125; 20].

Мы пропускаем оценки модуля производной, получающиеся, как и выше, но из неравенства (13), и переходим к двуточечным теоремам искажения (см. также [14]). Приведем частный случай теоремы 5 с указанием некоторых способов вычисления функций и радиусов Робена.

Следствие 10. *Пусть функция $w=f(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(R,M)$, и пусть z_1 и z_2 — произвольные различные точки множества $\overline{K(R)}$, причем либо обе эти точки одновременно принадлежат кольцу $K(R)$, либо у них одинаковый модуль. Кроме того, в случае $|z_1|=|z_2|=R$ считаем, что $M\neq\infty$, $|f(z_1)|=|f(z_2)|=M$ и отображение f конформно в точках z_k, $k=1,2$. Тогда при $|z_k|\neq1$, $|z_k|\neq\infty$, $k=1,2$, для любых вещественных δ_1 и δ_2 справедливо неравенство*

$$|f'(z_1)|^{\delta_1^2}|f'(z_2)|^{\delta_2^2}\geq\left[\frac{r(K(M),\Gamma,f(z_1)}{r(K(R),\gamma,z_1)}\right]^{\delta_1^2}\left[\frac{r(K(M),\Gamma,f(z_2)}{r(K(R),\gamma,z_2)}\right]^{\delta_2^2}$$
$$\times\exp\{2\delta_1\delta_2[g_{K(M)}(f(z_1),f(z_2),\Gamma)-g_{K(R)}(z_1,z_2,\gamma)]\},\quad (11')$$

где $\gamma=\{z:|z|=1\}$, $\Gamma=\{w:|w|=1\}$. Равенство в $(11')$ *при $\delta_1^2+\delta_2^2\neq0$ достигается тогда и только тогда, когда $\overline{f(K(R))}=\overline{K(M)}$ и множество $K(M)\cap\partial f(K(R))$ состоит из конечного числа кусочно гладких кривых, во внутренних точках которых производная по нормали функции $\delta_1g_{K(M)}(w,f(z_1),\Gamma)+\delta_2g_{K(M)}(w,f(z_2),\Gamma)$ равна нулю. В случае $M\neq\infty$ и $|z_k|\neq R$, $k=1,2$, для любых вещественных δ_1 и δ_2 имеет место неравенство*

$$|f'(z_1)|^{\delta_1^2}|f'(z_2)|^{\delta_2^2}\leq\left[\frac{r(K(M),\Gamma_M,f(z_1)}{r(K(R),\gamma_R,z_1)}\right]^{\delta_1^2}\left[\frac{r(K(M),\Gamma_M,f(z_2)}{r(K(R),\gamma_R,z_2)}\right]^{\delta_2^2}$$
$$\times\exp\{2\delta_1\delta_2[g_{K(M)}(f(z_1),f(z_2),\Gamma_M)-g_{K(R)}(z_1,z_2,\gamma_R)]\},\quad (13')$$

где $\gamma_R=\{z:|z|=R\}$, $\Gamma_M=\{w:|w|=M\}$. Равенство в $(13')$ *при $\delta_1^2+\delta_2^2\neq0$ выполняется в том и только в том случае, когда $\overline{f(K(R))}=\overline{K(M)}$ и функция $\delta_1g_{K(M)}(w,f(z_1),\Gamma_M)+\delta_2g_{K(M)}(w,f(z_2),\Gamma_M)$ равна нулю на множестве $K(M)\cap f(\gamma_R)$.*

Функции и радиусы Робена в неравенствах $(11')$ и $(13')$ можно выразить через функции Грина, внутренние радиусы либо через функцию Гретша. Например, очевидно равенство

$$g_{K(R)}(z,\zeta,\gamma)=g_{K(R^2)}(z,R^2/\bar\zeta)+g_{K(R^2)}(z,\zeta),\quad z\in K(R).$$

Отсюда
$$\log r(K(R),\gamma,\zeta)=g_{K(R^2)}(\zeta,R^2/\bar\zeta)+\log r(K(R^2),\zeta).$$
Далее, непосредственно убеждаемся в соотношении
$$g_{K(R)}(z,\zeta,\gamma)=\log\left|\frac{1-G(z|\zeta|/\zeta;R)G(|\zeta|;R)}{G(z|\zeta|/\zeta;R)-G(|\zeta|;R)}\right|,\quad z,\zeta\in K(R).$$
Следовательно,
$$r(K(R),\gamma,\zeta)=\left|\frac{G^2(|\zeta|;R)-1}{G'(|\zeta|;R)}\right|,\quad \zeta\in K(R).$$
Из определения функций Грина и Робена вытекают равенства
$$g_{K(\infty)}(w,\omega,\Gamma)=g_{K(\infty)}(w,\omega)=\log\left|\frac{1-\overline{\omega}w}{\omega-w}\right|,$$
$$r(K(\infty),\Gamma,\omega)=r(K(\infty),\omega)=|\omega|^2-1.$$
Аналогично считаются другие функции и радиусы Робена из следствия 10.

Неравенство $(11')$ при $|z_1|=|z_2|=R$ и $|f(z_1)|=|f(z_2)|=M$ является распространением результата Поммеренке — Васильева [21, неравенства (1.1), (2.25)] на случай функций, заданных в кольце, и на случай любых δ_k, $k=1,2$. Неравенство $(13')$ при $\delta_1=-\delta_2=1$ и $M\to\infty$ дает оценку, близкую теореме 1.4 работы [9], но отличную от нее. Наконец, то же неравенство при $|z_1|=|z_2|=1$ и $\delta_1=-\delta_2=1$ совпадает, по существу, с результатом Солынина [19, неравенство 4.13].

В заключение приведем следующее наблюдение. Пусть $K(R)^+$ — это часть кольца $K(R)$, лежащая в верхней полуплоскости, а $\gamma^+=[-R,-1]\cup\{z:|z|=1, \operatorname{Im} z\geq 0\}\cup[1,R]$. Тогда для любой фиксированной точки ζ на окружности $|\zeta|=R$, Im $\zeta>0$, и любых точек $z\in K(R)$ имеем
$$g_{K(R)^+}(z,\zeta,\gamma^+)=g_{K(R)}(z,\zeta,\gamma)-g_{K(R)}(z,\bar\zeta,\gamma).$$
Отсюда
$$\log[r(K(R),\gamma,\zeta)r(K(R),\gamma,\bar\zeta)]-2g_{K(R)}(\zeta,\bar\zeta,\gamma)=2\log r(K(R)^+,\gamma^+,\zeta).$$
С другой стороны,
$$r(K(R)^+,\gamma^+,\zeta)|T'(\zeta;R)|=r(\mathbf{C}_w\backslash[-\infty,T(R)],T(\zeta;R))=4(T(\zeta;R)-T(R)).$$
Аналогичные соображения справедливы для кольца $K(M)$, $M\neq\infty$, а также для обоих колец, повернутых вокруг начала координат. Поэтому неравенство $(11')$ в случае $|z_1|=|z_2|=R$, $|f(z_1)|=|f(z_2)|=M$ имеет вид
$$|f'(z_1)f'(z_2)|\geq\left|\frac{\bigl[T\bigl(f(z_1)\frac{|f(z_1)+f(z_2)|}{f(z_1)+f(z_2)};M\bigr)-T(M;M)\bigr]T'\bigl(z_1\frac{|z_1+z_2|}{z_1+z_2};R\bigr)}{\bigl[T\bigl(z_1\frac{|z_1+z_2|}{z_1+z_2};R\bigr)-T(R;R)\bigr]T'\bigl(f(z_1)\frac{|f(z_1)+f(z_2)|}{f(z_1)+f(z_2)};M\bigr)}\right|^2.$$

§ 4. Неравенства с участием производной Шварца

Теорема 5 и, в частности, следствие 10 при $\delta_1=-\delta_2=1$ приводят к некоторым оценкам шварциана для функций класса $\mathfrak{M}(R,M)$. В качестве примера рассмотрим одну из таких оценок.

Теорема 6. *Если $f\in\mathfrak{M}(R)$, то для любого положительного $z\in K(R)$ имеет место неравенство*
$$\operatorname{Re}\ S_f(z)+\frac{6|f'(z)|^2}{(|f(z)|^2-1)^2}\geq S_G(z)+\frac{6|G'(z)|^2}{(|G(z)|^2-1)^2},$$
где $G(z)=G(z;R)$.

Доказательство. Пусть z_0 — вещественная точка кольца $K(R)$ на положительной полуоси, и пусть $\rho > 0$ настолько мало, что точка $z_0 + \rho$ также принадлежит кольцу $K(R)$. Положив в следствии 10 $z_1 = z_0$, $z_2 = z_0 + \rho$, $\delta_1 = -\delta_2 = 1$, $M = \infty$ и учитывая представления функций и радиусов Робена через функцию $G(z; R)$, приведенные после этого следствия, получаем из $(11')$ следующее неравенство:

$$\frac{|f'(z_0)f'(z_0+\rho)|}{|f(z_0)-f(z_0+\rho)|^2}\cdot\frac{|1-\overline{f(z_0)}f(z_0+\rho)|^2}{(|f(z_0)|^2-1)(|f(z_0+\rho)|^2-1)} \geq \frac{|G'(z_0)G'(z_0+\rho)|}{|G(z_0)-G(z_0+\rho)|^2}\cdot\frac{|1-G(z_0)G(z_0+\rho)|^2}{(G(z_0)^2-1)(G(z_0+\rho)^2-1)}. \quad (16)$$

В некоторой окрестности точки z_0 функция f представима в виде степенного ряда $f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \ldots$ и, следовательно, $f'(z) = c_1 + 2c_2(z-z_0) + 3c_3(z-z_0)^2 + \ldots$. Отсюда несложно установить асимптотику первого сомножителя в левой части неравенства (16):

$$\frac{|f'(z_0)f'(z_0+\rho)|}{|f(z_0)-f(z_0+\rho)|^2} = \frac{1}{\rho^2}\left|1+\left(\frac{c_3}{c_1}-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)\rho^2+o(\rho^2)\right| = \frac{1}{\rho^2}\left|1+\frac{1}{6}S_f(z_0)\rho^2+o(\rho^2)\right|, \quad \rho\to 0.$$

Также элементарный, но более длинный счет дает

$$\frac{|1-\overline{f(z_0)}f(z_0+\rho)|^2}{(|f(z_0)|^2-1)(|f(z_0+\rho)|^2-1)} = 1+\frac{|c_1|^2}{(|c_0|^2-1)^2}\rho^2+o(\rho^2), \quad \rho\to 0.$$

Полагая $f = G$, получаем асимптотику правой части неравенства (16), что в итоге приводит к утверждению теоремы 6.

Неравенство (13) теоремы 5 дает, как и выше, аналогичную оценку $\operatorname{Re} S_f(z)$ сверху. Более того, емкостный подход приводит к оценке Сингха [25] для шварциана $S_f(z)$, зависящей от ядер Бергмана области $K(R)$ относительно класса всех функций, регулярных и с интегрируемым квадратом модуля в ней [26] (см. [следствие 3.8, 14]). Многочисленные неравенства с участием шварциана в терминах различных ядер установлены Ю. Е. Аленицыным в работе [27]. Приведем новые оценки для функций класса $\mathfrak{M}(R)$ и симметричных точек на единичной окружности. Эти оценки вытекают из свойств емкостей обобщенных конденсаторов. Однако для упрощения доказательств нам удобнее здесь воспользоваться результатами о неналегающих областях работ [10, 11].

Теорема 7. *Для любой функции f класса $\mathfrak{M}(R)$ выполняются неравенства*

$$\frac{n^2-1}{2}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{G_n'(z_k)}{f'(z_k)}\right|^2\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{Re}\big[z_k^2(S_f(z_k)-S_{G_n}(z_k))\big]}{|f'(z_k)|^2} \leq \frac{n^2+2}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{G_n'(z_k)}{f'(z_k)}\right|^2-n\right),$$

где $G_n(z) = G(z; n, R)$ и $z_k = \exp(i(\pi/n + 2\pi(k-1)/n))$, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Всюду ниже мы рассматриваем функции f и G_n продолженными в кольцо $1/R < |z| < R$ по принципу симметрии. Заметим, что функция G_n отображает область $B_k := \{z : 1/R < |z| < R,\ 2\pi(k-1)/n < \arg z < 2\pi k/n\}$ на угол $\{w : 2\pi(k-1)/n < \arg w < 2\pi k/n\}$ так, что $G_n(z_k) = z_k$, $k = 1, \ldots, n$. Введем следующие обозначения: $h_1(\zeta) = G_n^{-1}[(i(1+\zeta)/(1-\zeta))^{2/n}]$, $h(0) = z_1$, $h_k(\zeta) = \exp(i(2\pi(k-1)/n))h_1(\zeta)$, $|\zeta| < 1$, $k = 1, \ldots, n$. Функция

h_k отображает круг $|\zeta| < 1$ конформно и однолистно на область B_k, причем $h_k(0) = z_k$, $k = 1, \ldots, n$. Поэтому суперпозиции $g_k := f \circ h_k$ отображают круг $|\zeta| < 1$ на попарно не налегающие области и $|g_k(0)| = 1$, $k = 1, \ldots, n$. Из теоремы 8 работы [10] и теоремы 8 из [11] вытекают неравенства

$$\frac{n(n^2-1)}{12} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|g_k'(0)|^2} \le \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} \frac{g_k^2(0) S_{g_k}(0)}{(g_k'(0))^2} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|g_k'(0)|^2} - \frac{n(n^2+2)}{24}.$$

Отсюда

$$\frac{n(n^2-1)}{12} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|f'(z_k)h_1'(0)|^2} \le \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} \left[\frac{f^2(z_k) S_f(z_k)}{(f'(z_k))^2} + \frac{S_{h_1}(0)}{|f'(z_k)h_1'(0)|^2} \right]$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|f'(z_k)h_1'(0)|^2} - \frac{n(n^2+2)}{24}. \quad (17)$$

Здесь и ниже мы неоднократно пользуемся тем фактом, что функция f отображает окружность $|z| = 1$ на окружность $|w| = 1$ и что для произвольной суперпозиции $f \circ h$ справедлива формула $S_{f \circ h} = (S_f \circ h)(h')^2 + S_h$. Элементарные вычисления дают

$$|h_1'(0)| = \frac{4}{nG_n'(z_1)},$$

$$\frac{S_{h_1}(0)}{|h_1'(0)|^2} = -z_1^2 S_{G_n}(z_1) + (G_n'(z_1))^2 \frac{n^2-4}{8} = -z_k^2 S_{G_n}(z_k) + |G_n'(z_k)|^2 \frac{n^2-4}{8},$$

$k = 1, \ldots, n$. Подставляя эти соотношения в (17), получим требуемые неравенства. Теорема доказана.

Заметим, что метод симметризации [2] приводит к оценке

$$\prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)| \le \prod_{k=1}^{n} |G_n'(z_k)| = (G_n'(z_1))^n, \quad f \in \mathfrak{M}(R),\ n \ge 2$$

(см. [19, с. 135]), а также к неравенству

$$\prod_{k=1}^{n} |f'(\widetilde{z}_k)| \ge (G_n'(1))^n, \quad f \in \mathfrak{M}(R),\ n \ge 2,$$

справедливому для точек $\tilde{z}_k$, расположенных на единичной окружности $|z| = 1$ и таких, что $f(\tilde{z}_k) = \exp(i(\theta + 2\pi k/n))$, θ — вещественное число, $k = 1, \ldots, n$ [10, § 3]. Вопрос об оценке произведения $\prod\limits_{k=1}^{n} |f'(z_k)|$ снизу, а также об оценке сверху суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} |f'(z_k)|^{-2}$ остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубинин В. Н.* Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 2003. Т. 302. С. 38–51.
2. *Дубинин В. Н.* Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 1. С. 3–76.
3. *Дубинин В. Н., Костюченко Е. В.* Экстремальная задача Тейхмюллера и теоремы искажения в теории однолистных функций // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 302–306.
4. *Teichmüller O.* Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung // Deutsch. Math. 1938. V. 3. P. 621–678.
5. *Grötzsch H.* Über einige Extremalprobleme der konformer Abbildung // Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.- phys. Kl. 1928. Bd 80. S. 367–376.

6. *Duren P. L.* Distortion in certain conformal mappings of an annulus // Michigan Math. J. 1963. V. 10. P. 431–441.

7. *Huckemann F.* Extremal elements in certain classes of conformal mappings of an annulus // Acta Math. 1967. V. 118, N 3, 4. P. 193–221.

8. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

9. *Дубинин В. Н., Костюченко Е. В.* Экстремальные задачи теории функций, связанные с n-кратной симметрией // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 2001. Т. 276. С. 83–111.

10. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 1997. Т. 237. С. 56–73.

11. *Дубинин В. Н., Эйрих Н. В.* Некоторые применения обобщенных конденсаторов в теории аналитических функций // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 2004. Т. 314. С. 52–75.

12. *Дубинин В. Н., Прилепкина Е. Г.* О сохранении обобщенного приведенного модуля при геометрических преобразованиях плоских областей // Дальневост. мат. журн. 2005. Т. 6, № 1, 2. С. 39–56.

13. *Ковалев Л. В.* Монотонность обобщенного приведенного модуля // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 2001. Т. 276. С. 219–236.

14. *Dubinin V. N., Vuorinen M.* Robin functions and distortion theorems for regular mappings // Math. Nachrichten. (To appear).

15. *Дубинин В. Н.* Теоремы покрытия отрезков при конформном отображении кольца // Изв. вузов. Математика. 1987. № 9. С. 42–50.

16. *Nehari Z.* Some inequalities in the theory of functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 75, N 2. P. 256–286.

17. *Duren P.* Robin capacity // Computational methods and function theory (CMFT'97) / N. Papamichael, St. Ruscheweyh, E. B. Saff (Eds.). Singapore: World Sci. Publ. Co., 1999. P. 177–190.

18. *Henrici P.* Applied and computational complex analysis.. New York: Wiley–Intersci., 1986. V. 3.

19. *Солынин А. Ю.* Граничное искажение и экстремальные задачи в некоторых классах однолистных функций // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 1993. Т. 204. С. 115–142.

20. *Pommerenke Ch., Vasil'ev A.* On bounded univalent functions and the angular derivative // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sect. A. 2000. V. 8. P. 79–106.

21. *Pommerenke Ch., Vasil'ev A.* Angular derivatives of bounded univalent functions and extremal partitions of the unit disk // Pacific J. Math. 2002. V. 206, N 2. P. 425–450.

22. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1967.

23. *Антонюк Г. К.* Некоторые вопросы теории экстремальных метрик. Краснодар: Изд-во Кубанского гос. ун-та, 1983.

24. *Jenkins J. A.* Some theorems on boundary distortion // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 81, N 2. P. 477–500.

25. *Singh V.* Grunsky inequalities and coefficients of bounded schlicht functions // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI. Math. 1962. N 310. P. 1–21.

26. *Шиффер М.* Некоторые новые результаты в теории конформных отображений // Р. Курант. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. Приложение. С. 234–301.

27. *Аленицын Ю. Е.* Об однолистных функциях без общих значений в многосвязной области // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1968. Т. 94. С. 4–18.

Статья поступила 27 января 2009 г.

Дубинин Владимир Николаевич, Прилепкина Елена Гумеровна
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
`dubinin@iam.dvo.ru`, `pril-elena@yandex.ru`