Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 512.542.5

СТРОГО ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУППАХ

А. А. Гальт

Аннотация. Доказана строгая вещественность бесконечной серии групп. Также доказана строгая вещественность элементов специального вида в простых вещественных группах.

Ключевые слова: строго вещественный элемент, строго вещественная группа, унипотентный и полупростой элементы, конечная группа лиева типа.

1. Введение

Вопросы сопряженности являются центральными в теории групп и приложениях. Особенно важен вопрос о сопряженности элемента со своим обратным. Назовем элемент x группы G *вещественным* (соответственно *строго вещественным*), если элементы x и x^{-1} сопряжены в группе G (соответственно сопряжены инволюцией в группе G). Назовем группу G *вещественной* (*строго вещественной*), если все элементы группы G являются вещественными (строго вещественными). Проблема вещественности и строгой вещественности групп изучалась разными авторами (см. [1–11]). В частности, в [1] получена классификация конечных простых вещественных групп. Вопрос о строгой вещественности знакопеременных и спорадических групп решен в [2] и [3] соответственно. В [4–6] показано, что симплектические группы $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ являются строго вещественными тогда и только тогда, когда $q \not\equiv 3 \pmod 4$. В [7] доказано, что в случае четной характеристики поля группы $\Omega_n^\epsilon(q)$ строго вещественны тогда и только тогда, когда $4|n$. В настоящей статье изучается вопрос о том, какие из вещественных ортогональных групп являются строго вещественными. В частности, получена новая бесконечная серия простых строго вещественных групп. Аналогичные результаты другими методами были получены в работе [8].

2. Обозначения и известные результаты

В [9, теорема 2(a)] доказано, что если V — конечномерное векторное пространство над полем нечетной характеристики с невырожденной билинейной симметричной формой и $S \in O(V)$, то S является произведением двух инволюций из $O(V)$. Таким образом, любой элемент из $O(V)$ обратим с помощью

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00391), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–344.2008.1) и АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419).

инволюции. Используя идею доказательства теоремы 2(a) из [9], покажем, что в том случае, когда размерность пространства V делится на 4, любой элемент из $O(V)$ обратим с помощью инволюции из $SO(V)$.

Везде далее, за исключением леммы 10, предполагается, что характеристика поля не равна 2. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F нечетной характеристики. Известно, что любая инволюция H определяет и определяется разложением пространства V в прямую сумму двух подпространств $V = V^+ \oplus V^-$, где $V^+ = \{x \in V \mid xH = x\}$ — *плюс подпространство* и $V^- = \{x \in V \mid xH = -x\}$ — *минус подпространство*.

Пусть M — конечномерное векторное пространство с билинейной симметричной формой $(\ ,\ )$. Подпространство U пространства M называется *невырожденным*, если для любого ненулевого $x \in U$ существует $y \in U$ такой, что $(x, y) \neq 0$. В противном случае подпространство U называется *вырожденным*.

Подпространство U размерности n, инвариантное относительно линейного преобразования L, называется *циклическим*, если существует элемент $u \in U$ такой, что множество $u, uL, uL^2, \dots , uL^{n-1}$ является базисом подпространства U. В этом случае говорится, что вектор u *порождает* пространство U. Если подпространство U циклическое, то L — *циклическое линейное преобразование на* U.

Полином $p(x)$ называется *унитарным*, если коэффициент при его максимальной степени равен 1. Полином $\tilde{p}(x)$ называется *двойственным* полиному $p(x)$, если полином $\tilde{p}(x)$ унитарный и все корни полинома $\tilde{p}(x)$ являются обратными для корней полинома $p(x)$ с соответствующими кратностями. Ясно, что у полинома $p(x)$ есть двойственный тогда и только тогда, когда все его корни отличны от нуля, т. е. $p(0) \neq 0$. Унитарный полином $p(x)$ называется *возвратным*, если $p(x) = \tilde{p}(x)$. Для полинома $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ обозначим через $\check{p}(x)$ полином $a_n + a_{n-1}x + \ldots + a_0x^n$. Полином $p(x)$ называется *симметричным*, если $p(x) = \check{p}(x)$. Ясно, что унитарный полином четной степени является возвратным тогда и только тогда, когда он симметричен, а унитарный полином нечетной степени является возвратным тогда и только тогда, когда $p(x) = \pm\check{p}(x)$. В частности, либо 1, либо -1 является корнем унитарного возвратного полинома нечетной степени. Следовательно, если возвратный полином нечетной степени имеет вид $p(x)^n$, где $p(x)$ — неприводимый полином, то $p(x) = x \pm 1$.

Нам потребуется следующая лемма, доказательство которой является частью доказательства теоремы 1 из [9]. Мы приведем моменты, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Для конечномерного векторного пространства M справедливы следующие утверждения.*

(I) *Если S — циклическое линейное преобразование на M и его характеристический полином симметричен и имеет степень $2m$, то S и S^{-1} сопряжены инволюцией из $GL(M)$.*

(II) *Если S — циклическое линейное преобразование на M и его характеристический полином имеет вид $(x - \epsilon)^{2m+1}$, где $\epsilon = \pm 1$, то S и S^{-1} сопряжены инволюцией из $GL(M)$.*

Доказательство. (I) Возьмем $u \in M$ такой что $u, uS, \dots , uS^{2m-1}$ является базисом пространства M. Положим $y = uS^m$, тогда наш базис имеет вид $yS^{-m}, yS^{-m+1}, \dots , y, \dots ,\ yS^{m-1}$. Рассмотрим новый базис, состоящий из двух последовательностей векторов: $y, y(S + S^{-1}), \dots , y(S^{m-1} + S^{-m+1})$ и $y(S - S^{-1}), y(S^2 - S^{-2}), \dots , y(S^m - S^{-m})$. Рассмотрим подпространства P и Q, порожденные векторами первой и второй последовательностей соответственно. Пусть H — инволюция с плюс и минус пространствами P и Q соответственно. В доказательстве теоремы 1 из [9] показана справедливость равенства $SH = HS^{-1}$.

(II) Пусть $v, vS, \dots, vS^{2m}$ — базис пространства M. Положим $y = uS^m$, тогда наш базис имеет вид $yS^{-m}, \dots, y, \dots, yS^m$. Возьмем новый базис, состоящий из двух последовательностей векторов: $y, y(S+S^{-1}), \dots, y(S^m+S^{-m})$ и $y(S-S^{-1}), \dots, y(S^m-S^{-m})$. Так же, как в (I), обозначим через P и Q подпространства, порожденные первой и второй последовательностями векторов соответственно, и через H — инволюцию с плюс и минус пространствами P и Q соответственно. В доказательстве теоремы 1 из [9] показана справедливость равенства $SH = HS^{-1}$. $\square$

Замечание 1. Для построенных подпространств P и Q справедливы равенства: $\dim P = \dim Q$ в случае (I); $\dim P = \dim Q + 1$ в случае (II).

3. Основная теорема

Теорема 1. *Пусть V — конечномерное векторное пространство размерности $4m$ с невырожденной билинейной симметричной формой $(\ ,\ )$. Пусть $S \in O(V)$, тогда S и S^{-1} сопряжены инволюцией из $SO(V)$.*

Доказательство. Пусть $p(x)$ — минимальный полином для S. В силу [9, с. 328] полином $p(x)$ раскладывается в произведение неразложимых возвратных множителей, т. е. $p(x) = \Pi_i r_i(x)^{h_i}$, где все $r_i(x)$ являются возвратными, причем либо

(1) $r_i(x) = g_i(x)\tilde{g}_i(x)$ — произведение двух различных неразложимых полиномов;

либо

(2) $r_i(x)$ — неразложимый полином, являющийся возвратным.

Тогда по [9, следствие] пространство $M = \bigoplus \mathrm{Ker}(r_i(S)^{h_i})$ раскладывается в прямую сумму невырожденных взаимно ортогональных подпространств, инвариантных относительно S. Обозначим ограничение $S|_{\mathrm{Ker}(r_i(S)^{h_i})}$ через S_i. Таким образом, $S = \bigoplus S_i$, где S_i — ортогональное преобразование с минимальным полиномом $r_i(x)^{h_i}$. Покажем сначала, что инволюцию, инвертирующую S_i, для любого i можно выбрать в $O(\mathrm{Ker}(r_i(S)^{h_i}))$. Рассмотрим последовательно возникающие случаи (1) и (2). Тот факт, что сопрягающая инволюция в случае (1) лежит в $O(V)$, вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 2 [9, лемма 1]. *Пусть M — конечномерное векторное пространство с невырожденной билинейной симметричной формой $(\ ,\ )$. Пусть $S \in O(M)$ и минимальный многочлен для S является n-й степенью произведения двух различных неразложимых полиномов $g(x)$ и $\tilde{g}(x)$. Тогда M разлагается в прямую сумму циклических взаимно ортогональных невырожденных S-инвариантных подпространств.*

Лемма 3 [9, лемма 2]. *Пусть M — конечномерное векторное пространство с невырожденной билинейной симметричной формой $(\ ,\ )$. Пусть $S \in O(M)$ — циклическое преобразование. Тогда инволюция, построенная в лемме 1, является ортогональной.*

Случай (2). Определим высоту вектора следующим образом.

Пусть M — конечномерное векторное пространство, S — линейное преобразование пространства M и $p(x)^k$ — минимальный полином для S. Тогда вектор $u \in M$ *имеет высоту* $p(S)^n$, если $up(S)^{n-1} \neq 0$ и $up(S)^n = 0$.

Лемма 4 [9, лемма 3]. *Пусть M — конечномерное векторное пространство с билинейной симметричной формой $(\ ,\ )$. Пусть $S \in O(M)$ и минимальный многочлен $p(x)^n$ для S является степенью неразложимого полинома $p(x)$, и пусть $u \in M$ — вектор высоты $p(S)^n$. Тогда подпространство U, порожденное элементом u, является невырожденным, если и только если существует вектор $v \in U$ такой, что $(up(S)^{n-1}, v) \neq 0$. Отметим, что любой вектор v, для которого справедливо неравенство $(up(S)^{n-1}, v) \neq 0$, имеет высоту $p(S)^n$.*

Лемма 5 [9, лемма 4]. *Пусть M — конечномерное векторное пространство с невырожденной билинейной симметричной формой $(\ ,\ )$. Пусть $S \in O(M)$ и минимальный многочлен для S является n-й степенью неразложимого полинома $p(x)$. Тогда справедливо в точности одно из следующих утверждений:*

(а) *существует вектор w высоты $p(S)^n$, который порождает невырожденное подпространство W,*

(б) *существуют два вектора u, w высоты $p(S)^n$, которые порождают подпространства U и W такие, что $U \cap W = 0$ и $U \oplus W$ невырожденно.*

В силу леммы 5 в пространстве M есть невырожденное S-инвариантное подпространство M_1. Следовательно, получаем разложение $M = M_1 \oplus M_1^{\perp}$, и ограничение преобразования S на подпространство $M_1^{\perp}$ удовлетворяет условиям леммы 5. Повторяя это процесс, приходим к разложению пространства M в прямую сумму ортогональных подпространств M_i, где каждое подпространство M_i либо циклическое, либо является прямой суммой двух вырожденных циклических подпространств и векторы, порождающие эти подпространства, имеют одинаковую высоту.

Лемма 6. *Пусть M — конечномерное векторное пространство с невырожденной билинейной симметричной формой $(\ ,\ )$, $S \in O(M)$ и $p(x)^n$ — минимальный полином преобразования S, причем полином $p(x)$ неприводим. Предположим, что для любого вектора u высоты $p(S)^n$ из M циклическое подпространство U, порожденное этим вектором, является вырожденным. Предположим также, что M раскладывается в прямую сумму $U \oplus W$ двух циклических подпространств, порожденных векторами высоты $p(S)^n$. Тогда S и S^{-1} сопряжены инволюцией из $O(M)$.*

Доказательство. Пусть u_1 — вектор, порождающий подпространство U. Положим $y_1 = u_1 S^m$, где $m = [\dim(U)/2]$. Пусть P_1 — пространство, порожденное векторами $y_1, y_1(S + S^{-1}), \dots , y_1(S^k + S^{-k})$, где $k = m - 1$, если $\dim(U)$ четна, и $k = m$, если $\dim(U)$ нечетна, а Q_1 — подпространство, порожденное векторами $y_1(S - S^{-1}), \dots , y_1(S^m - S^{-m})$. Если степень $p(x)$ четна, то возьмем вектор $w = u_1 p(S)^{n-1} S^{-m(n-1)} \in P_1$. Если степень $p(x)$ нечетна, то, как мы отмечали ранее, $p(x) = x \pm 1$ и возьмем вектор $w = u_1(S \pm 1)^{n-1} \in P_1$, так как его высота равна $S \pm 1$. В любом случае $w \notin Q_1$, и мы можем найти вектор $y_2 \in Q_1^{\perp}$, удовлетворяющий неравенству $(w, y_2) \neq 0$. Как отмечено в лемме 4, вектор y_2 имеет высоту $p(S)^n$. Положим $u_2 = y_2 S^{-m}$. Тогда u_2 также имеет высоту $p(S)^n$ и, как следует из леммы 5, порождает пространство W. Разложим пространство $W = P_2 \oplus Q_2$ так же, как пространство U, где подпространство P_2 порождается векторами $y_2, y_2(S + S^{-1}), \dots , y_2(S^k + S^{-k})$, а пространство Q_2 — векторами $y_2(S - S^{-1}), \dots , y_2(S^m - S^{-m})$. Покажем, что $y_1(S^i + S^{-i})(S^j - S^{-j}) \in Q_1$ для любых i, j. Если степень $p(x)$ четна, то, как мы отмечали ранее, полином $p(x)$ симметричен и

$$S^m + S^{-m} = -a_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_{m-i}(S^i + S^{-i}).$$

Если степень $p(x)$ нечетна, то $p(x) = x \pm 1$ и $(S \pm 1)^{2m+1} = 0$. Следовательно, $(S \pm 1)^{2m}(S^2 - 1) = 0$, и, домножая на $(S^{-1})^{m+1}$, имеем

$$(S + S^{-1} \pm 2)^m (S - S^{-1}) = 0 = \sum_{i=1}^{m+1} d_i(S^i - S^{-i}),$$

где $d_{m+1} = 1$. В обоих случаях получаем, что

$$y_1(S^i + S^{-i})(S^j - S^{-j}) = y_1(S^{i+j} - S^{-(i+j)}) - y_1(S^{i-j} - S^{-(i-j)}) \in Q_1.$$

Равенства

$$(y_1(S^i + S^{-i}), y_2(S^j - S^{-j})) = -(y_1(S^i + S^{-i})(S^j - S^{-j}), y_2) = 0$$

справедливы, так как $y_2 \in Q_1^{\perp}$. Поэтому $P_1^{\perp} \supseteq Q_1 + Q_2$. Аналогично $P_2^{\perp} \supseteq Q_1 + Q_2$. Определим H как инволюцию с плюс пространством $P = P_1 \oplus P_2$ и минус пространством $Q = Q_1 \oplus Q_2$. Тогда H — ортогональная инволюция и аналогично лемме 1 справедливо равенство $SH = HS^{-1}$ на пространствах $P_1 + Q_1$ и $P_2 + Q_2$, т. е. на M. $\square$

Замечание 2. Если выполнены условия из леммы 6, то полином $p(x)$ возвратный. Если k — степень полинома $p(x)$, то $\dim(M) = 2nk$ четна. Если число nk четно, то размерность $\dim(P) = \dim(Q) = \dim(M)/2$ также четна. Если же число nk нечетно, то, как отмечено ранее, $p(x) = (x \pm 1)$ (в частности, $k = 1$). Значит, либо преобразование S, либо преобразование $-S$ является унипотентным ортогональным преобразованием пространства M. В силу [10, лемма 3.5] (см. лемму 7 ниже) $\dim(M)$ делится на 4, что противоречит предположению о нечетности числа $nk = \dim(M)/2$. Таким образом, если реализуется ситуация из леммы 6, то $\dim(P) = \dim(Q)$ четна.

Таким образом, мы доказали, что любой элемент S из $O(V)$ сопряжен со своим обратным с помощью инволюции H из $O(V)$. Для завершения доказательства теоремы нужно показать, что полученную инволюцию можно выбрать из $SO(V)$. Допустим, что $H \notin SO(V)$. Пусть P_H и Q_H — плюс и минус пространства инволюции H соответственно, тогда $\dim Q_H$ нечетна. В ходе доказательства теоремы пространство V раскладывается в сумму циклических подпространств M_i. Для каждого пространства M_i строятся плюс и минус подпространства P_i и Q_i соответственно, причем в силу замечаний 1 и 2 либо $\dim(P_i) = \dim(Q_i)$, либо $\dim(P_i) = \dim(Q_i) + 1$. Следовательно, ввиду равенства $\sum(\dim P_i + \dim Q_i) = 4m$ хотя бы один раз встречается случай, когда $\dim P_i = \dim Q_i + 1$. Пусть P_k и Q_k — плюс и минус пространства для этого случая. Определим плюс и минус пространства $P_H^{'}$ и $Q_H^{'}$ для новой инволюции $H^{'}$ следующим образом: положим $P_k^{'} = Q_k$, $Q_k^{'} = P_k$ и $P_i^{'} = P_i$, $Q_i^{'} = Q_i$ для всех $i \neq k$. Тогда новая инволюция $H^{'}$ по-прежнему инвертирует S и в силу равенства $\dim Q_H^{'} = \dim Q_H + 1$ размерность $\dim Q_H^{'}$ четна, т. е. $H \in SO(V)$.

Теорема 2. *Пусть $G = \mathbf{P}\Omega_{4n}^{-}(q)$, где q нечетно. Тогда группа G является строго вещественной.*

Доказательство. Для любого элемента из $\Omega_{4n}^{-}(q)$ по теореме 1 существует инволюция из $SO_{4n}(q)$, которая его инвертирует. В силу [3, лемма 8.4] $SO_{4n}^{-}(q) = \mathbb{Z}_2 \times \Omega_{4n}^{-}(q)$. $\square$

4. Сопряженность элементов специального вида

Через J_n обозначается жорданов блок размера n, т. е. $n \times n$-матрица (a_{ij}), где $a_{ii} = a_{i,i+1} = 1$, $a_{ij} = 0$ в остальных случаях.

Если n нечетно, то $O_n(q)$ содержит унипотентные элементы, сопряженные с J_n. Будем называть такие элементы *неразложимыми* в $O_n(q)$.

Пусть $n \equiv 0 \pmod 4$, $n = 2m$. Будем называть элемент из $O_n(q)$ *неразложимым* в $O_n(q)$, если он сопряжен в $O_n(q)$ с

$$\begin{pmatrix} J_m & 0 \\ 0 & {J'}_m^{-1} \end{pmatrix}.$$

Лемма 7 [10, лемма 3.5]. *Пусть f — невырожденная квадратичная форма на векторном пространстве V над полем F нечетной характеристики. Пусть u — унипотентный элемент в $O(f)$. Тогда $V = \bigoplus V_i$ — ортогональная прямая сумма u-инвариантных подпространств и ограничение элемента u на каждое V_i является неразложимым в V_i.*

Лемма 8. *Пусть q, n нечетны и $u \in \Omega_n(q)$ — регулярный унипотентный элемент. Пусть $q \equiv 1 \pmod 4$ или $n \equiv \pm 1 \pmod 8$. Тогда существует элемент $g \in \Omega_n(q)$ такой, что $g^{-1}ug = u^{-1}$, $g^2 = e$.*

Доказательство. В силу [9, теорема 2(a)] существует элемент $g \in O_n(q)$ такой, что справедливы равенства $g^{-1}ug = u^{-1}$, $g^2 = e$. Домножая при необходимости элемент g на скалярную матрицу, состоящую из минус единиц, можно считать, что $g \in SO_n(q)$.

В силу [11, лемма 8.7] спинорная норма элемента g равна $(-1)^{(n^2-1)/8}\mathbb{F}_q^{*2}$. Так как $q \equiv 1 \pmod 4$ или $n \equiv \pm 1 \pmod 8$, то $(-1)^{(n^2-1)/8} \in \mathbb{F}_q^{*2}$. Таким образом, $g \in \Omega_n(q)$. $\square$

Лемма 9. *Пусть $q \equiv 1 \pmod 4$ и u — унипотентный элемент в $\Omega_n^{\epsilon}(q)$, где $\epsilon = +$, если n четно. Тогда существует элемент $g \in \Omega_n^{\epsilon}(q)$ такой, что $g^{-1}ug = u^{-1}$, $g^2 = e$.*

Доказательство. С учетом леммы 7 можно считать, что u неразложим в $O_n(q)$. Если n нечетно, то элемент g существует в силу леммы 8. Пусть n четно, $n = 2m$. Тогда $n \equiv 0 \pmod 4$. Пусть элемент w имеет вид

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times m}.$$

Тогда $w^{-1}J_m w = J'_m$ и $w^2 = e$. Положим

$$g = \begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix}.$$

Элемент g можно записать в виде произведения двух матриц

$$g = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix},$$

спинорная норма которых лежит в $\mathbb{F}_q^{*2}$. Действительно, для первой матрицы это верно по [1, с. 301], а спинорная норма второй матрицы равна $(-1)^{m/2}\mathbb{F}_q^{*2} \in \mathbb{F}_q^{*2}$, поскольку $q \equiv 1 \pmod 4$. Таким образом, элемент g лежит в $\Omega_n^\epsilon(q)$. Так как $w = w' = w^{-1}$, то

$$\begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J_m & 0 \\ 0 & J'^{-1}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wJ'^{-1}_m w & 0 \\ 0 & wJ_m w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_m^{-1} & 0 \\ 0 & J'_m \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $g^{-1}ug = u^{-1}$ и $g^2 = e$. $\square$

Идея доказательства следующей леммы известна, ее можно найти, например, в [10].

Лемма 10. *Пусть G — конечная простая группа лиева типа. Пусть $\overline{G}$ — простая присоединенная линейная алгебраическая группа над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{F}}_p$ конечного поля $\mathbb{F}_p$ порядка p и σ — отображение Фробениуса такие, что $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Предположим, что $\overline{G}$ не имеет тип A_n, D_{2n+1} или E_6. Тогда любой полупростой элемент группы G является строго вещественным.*

Доказательство. Пусть Φ — корневая система группы $\overline{G}$, W — группа Вейля группы $\overline{G}$, w_0 — элемент максимальной длины в W и $\overline{T}$ — максимальный тор в $\overline{G}$. Пусть $w \in W$ и n_{w_0}, n_w — прообразы элементов w_0, w при гомоморфизме из $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ в W. Так как $\overline{T} = \langle h_{r_i}(\lambda) \mid r_i \in \Phi, \lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^*\rangle$ и $n_{w_0}^{-1}h_{r_i}(\lambda)n_{w_0} = h_{-r_i}(\lambda) = h_{r_i}(\lambda^{-1})$, то для любого $t \in \overline{T}$ справедливо равенство $t^{n_{w_0}} = t^{-1}$.

Если группу W рассматривать как подгруппу в $GL_n(\mathbb{R})$, то $w_0 = -E \in Z(GL_n(\mathbb{R}))$, поэтому $w_0 \in Z(W)$, т. е. $[w, w_0] = e$ для любого $w \in W$. Тогда $t = [n_{w_0}, n_w] \in \overline{T}$ и

$$[n_{w_0}^2, n_w] = [n_{w_0}, n_w]^{n_{w_0}} \cdot [n_{w_0}, n_w] = t^{n_{w_0}} \cdot t = e.$$

Следовательно, для любого прообраза n_{w_0} элемента w_0 имеем $n_{w_0}^2 \in Z(N_{\overline{G}}(\overline{T}))$. Покажем, что $Z(N_{\overline{G}}(\overline{T})) = Z(\overline{G})$. Действительно, пусть $x \in Z(N_{\overline{G}}(\overline{T}))$. Отметим, что $Z(N_{\overline{G}}(\overline{T})) \leq \overline{T}$, поскольку $C_{\overline{G}}(\overline{T}) = \overline{T}$. Возьмем подгруппу Бореля $\overline{B}$, содержащую $\overline{T}$. Тогда $x \in \bigcap\limits_{n \in N_{\overline{G}}(\overline{T})} \overline{B}^n = Z(\overline{G})$, т. е. $Z(N_{\overline{G}}(\overline{T})) = Z(\overline{G})$. Поскольку $Z(\overline{G}) = 1$, любой прообраз элемента w_0 является инволюцией. Покажем, что прообраз элемента w_0 можно выбрать в группе G. Действительно, $\langle w_0 \rangle = Z(W)$, значит, любой автоморфизм группы W оставляет элемент w_0 неподвижным. В частности, $w_0^\sigma = w_0$. Если теперь $\overline{S}$ — некоторый σ-инвариантный максимальный тор группы $\overline{G}$, то существует элемент $g \in \overline{G}$ такой, что $\overline{S} = \overline{T}^g$. В силу [12] имеем $g^\sigma g^{-1} \in N_{\overline{G}}(\overline{T})$, и если w_1 — образ элемента $g^\sigma g^{-1}$ в $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$, то $N_{\overline{G}}(\overline{S})_\sigma/(\overline{S})_\sigma \simeq C_{(W,\sigma)}(w_1)$, где $C_{(W,\sigma)}(w_1) = \{w \in W \mid w^\sigma w_1 w^{-1} = w_1\}$. Так как $w_0 \in Z(W)$ и $w_0^\sigma = w_0$, получаем, что $w_0 \in C_{(W,\sigma)}(w_1)$ для любого $w_1 \in W$. Значит, для любого σ-инвариантного максимального тора $\overline{S}$ группы $\overline{G}$ элемент w_0 лежит в $N_{\overline{G}}(\overline{S})_\sigma/(\overline{S})_\sigma$, поэтому прообраз элемента w_0 можно выбрать в G. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tiep P. H., Zalesski A. E.* Real conjugacy classes in algebraic groups and finite groups of Lie type // J. Group Theory. 2005. V. 8, N 3. P. 291–315.
2. *Baginski C.* On sets of elements of the same order in the alternating group A_n // Publ. Math. 1987. V. 34. P. 313–315.
3. *Kolesnikov S. G., Nuzhin Ja. N.* On strong reality of finite simple groups // Acta Appl. Math. 2005. V. 85, N 1–3. P. 195–203.

4. *Gow R.* Commutators in the symplectic group // Arch. Math. (Basel). 1988. V. 50, N 3. P. 204–209.
5. *Gow R.* Products of two involutions in classical groups of characteristic 2 // J. Algebra. 1981. V. 71, N 2. P. 583–591.
6. *Ellers E. W., Nolte W.* Bireflectionality of orthogonal and symplectic groups // Arch. Math. 1982. V. 39. P. 113–118.
7. *Ramo J.* Strongly real elements of orthogonal groups in even characteristic // J. Group Theory. (To appear).
8. *Knüppel F., Thomsen G.* Involutions and commutators in orthogonal groups // J. Austral. Math. Soc. 1998. V. 65, N 1. P. 1–36.
9. *Wonenburger M. J.* Transformations which are products of two involutions // J. Math. Mech. 1966. V. 16. P. 327–338.
10. *Feit W., Zuckerman G. J.* Reality properties of conjugacy classes in spin groups and symplectic groups // Contemp. Math. 1982. V. 13. P. 239–253.
11. *Pham Huu Tiep, Zalesski A. E.* Unipotent elements of finite groups of Lie type and realization fields of their complex representations // J. Algebra. 2004. V. 271. P. 327–390.
12. *Carter R. W.* Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. 1978. V. 37, N 3. P. 491–507.

Статья поступила 16 января 2009 г.

Гальт Алексей Альбертович
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
galt84@gmail.com