Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 517.983.27:517.972.8

НОВАЯ ФОРМА ЛЕММЫ ФАРКАША

С. С. Кутателадзе

Аннотация. В рамках булевозначного анализа даны операторные версии классической леммы Фаркаша в теории линейных неравенств.

Ключевые слова: пространство Канторовича, линейное программирование, линейные неравенства, полиэдральные сублинейные неравенства, интервальное уравнение, теорема об альтернативе, булевозначные модели.

Лемма Фаркаша, известная также как лемма Фаркаша — Минковского, играет ключевую роль в линейном программировании и родственных разделах оптимизации (см. [1, 2]). Используя булевозначный анализ [3] и субдифференциальное исчисление [4], мы устанавливаем некоторые довольно общие свойства систем операторных неравенств. Эта заметка возникла в порядке краткого комментария к [5].

Пусть X — вещественное векторное пространство, Y — некоторое пространство Канторовича. Через $L(X,Y)$ обозначим пространство линейных операторов из X в Y. Если X снабжено некоторой Y-полунормой, под $L^{(m)}(X,Y)$ мы будем понимать пространство мажорированных линейных операторов из X в Y. Для $T : X \to Y$ и $y \in Y$, как обычно, полагаем $\{T \le y\} := \{T(\cdot) \le y\} := \{x \in X \mid Tx \le y\}$ и $\ker(T) := \{T = 0\} := T^{-1}(0)$.

Рассмотрим еще одно вещественное векторное пространство W и диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "B"'] & & W \arrow[dl, "\mathfrak{X}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Как известно,

(i) $(\exists \mathfrak{X})\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \ker(A) \subset \ker(B)$;

(ii)[1] *если W упорядочено конусом W_+ и $A(X) - W_+ = W_+ - A(X) = W$, т. е. $A(X)$ мажорирует W, то*

$$(\exists \mathfrak{X} \ge 0)\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \{A \le 0\} \subset \{B \le 0\}.$$

1. Системы линейных неравенств

Пусть $\mathbb{B} := \mathbb{B}(Y)$ — *база* Y, т. е. полная булева алгебра проекторов в Y, а $m(Y)$ — максимальное расширение Y. Будем считать, что $W = Y$. В этой ситуации имеет место операторный аналог леммы Фаркаша.

Автор признателен А. Е. Гутману за тонкие и глубокие замечания к предварительным вариантам этой статьи.

[1] Теорема Канторовича (см. [4, с. 44]).

Теорема 1.1. *Пусть X — вещественное Y-полунормированное пространство, где Y — некоторое пространство Канторовича. Допустим также, что заданы мажорированные операторы $A_1, \dots, A_N, B \in L^{(m)}(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *для любого $b \in \mathbb{B}$ операторное неравенство $bBx \leq 0$ является следствием системы операторных неравенств $bA_1x \leq 0, \dots, bA_Nx \leq 0$, т. е.*

$$\{bB \leq 0\} \supset \{bA_1 \leq 0\} \cap \dots \cap \{bA_N \leq 0\};$$

(2) *существуют положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \operatorname{Orth}(m(Y))$ такие, что*

$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k,$$

т. е. B принадлежит операторно выпуклой конической оболочке $A_1, \dots, A_N$.

Начнем с утверждений, представляющих варианты леммы Фаркаша для векторных пространств над подполями вещественной прямой. Доказательства этих утверждений даны для полноты, так как приводимые результаты основаны на их прямой булевозначной интерпретации.

Лемма 1.1. *Пусть X — векторное пространство над подполем R поля вещественных чисел $\mathbb{R}$. Пусть, далее, f, g — это R-линейные функционалы над X, символически $f, g \in X^{\#}$.*

Включение

$$\{g \leq 0\} \supset \{f \leq 0\}$$

имеет место в том и только в том случае, если найдется $\alpha \in \mathbb{R}_+$ такое, что $g = \alpha f$.

Доказательство. Установим лемму в сторону необходимости, ибо достаточность очевидна.

Случай $f = 0$ тривиален. Если $f \neq 0$, то для некоторого $x \in X$ будет $f(x) \in \mathbb{R}$ и $f(x) > 0$. Обозначим через R_0 образ $f(X)$. Пусть теперь $h := g \circ f^{-1}$, т. е. $h \in R_0^{\#}$ — единственное решение уравнения $h \circ f = g$. По условию h — положительный R-линейный функционал на R_0. По теореме Бигарда [4, с. 108] h допускает продолжение до положительного гомоморфизма $\bar{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, поскольку группа R_0 мажорирует $\mathbb{R}$. Положительный автоморфизм $\mathbb{R}$ есть умножение на положительное число. В качестве искомого α можно взять $\bar{h}(1)$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть X — некоторое $\mathbb{R}$-полунормированное пространство над подполем R поля $\mathbb{R}$. Пусть, далее, $f_1, \dots, f_N$ и g — это ограниченные R-линейные функционалы над X, символически $f_1, \dots, f_N, g \in X^* := L^{(m)}(X, \mathbb{R})$.*

Включение

$$\{g \leq 0\} \supset \bigcap_{k=1}^{N} \{f_k \leq 0\}$$

имеет место в том и только в том случае, если найдутся $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}_+$ такие, что $g = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k f_k$.

Доказательство. Проведем индукцию по N. Предположим, что требуемое доказано для любого набора из N функционалов на любом пространстве X, и осуществим шаг индукции.

Рассмотрим поточечные супремумы $q := f_1 \vee \dots \vee f_{N+1}$ и $p := q \vee (-g)$. Ясно, что $p(x) \geq 0$ для всех $x \in X$. Действительно, если одно число $f_k(x)$ строго положительно, то строго положительно и число $q(x)$. Если все числа $f_1(x), \dots, f_{N+1}(x)$ отрицательны, то отрицательно и число $g(x)$ и, стало быть, $p(x) \geq -g(x) \geq 0$.

Поле $\mathbb{R}$ над R допускает выпуклый анализ (см. [4, с. 119; 6, с. 259]). Стало быть, найдутся положительные числа γ_1, γ_2 такие, что $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ и для некоторого f из субдифференциала $\partial(q)$ будет $\gamma_1 f - \gamma_2 g = 0$.

Если $\gamma_2 > 0$, то все доказано, ибо $\partial(q) = \mathrm{co}\{f_1, \dots, f_{N+1}\}$. Если же $\gamma_2 = 0$, то найдется выпуклая комбинация $\sum\limits_{k=1}^{N+1} t_k f_k = 0$. Один из коэффициентов $t_1, \dots, t_{N+1}$ не равен нулю. Для определенности можно считать, что это t_{N+1}. Таким образом,

$$-f_{N+1} = \sum_{k=1}^{N} \bar{t}_k f_k$$

для некоторых положительных коэффициентов $\bar{t}_k, k := 1, \dots, N$.

Пусть $X_0 := \{f_{N+1} = 0\} = \ker(f_{N+1})$. Если $x_0 \in X_0$ и $f_k(x_0) \leq 0$ для всех $k := 1, \dots, N$, то по условию $g(x_0) \leq 0$. По предположению индукции найдутся положительные числа $\beta_1, \dots, \beta_N$ такие, что $h|_{X_0} = 0$, где

$$h := g - \sum_{k=1}^{N} \beta_k f_k.$$

Функционалы h и f_{N+1} ограничены по условию и, стало быть, допускают единственные продолжения до линейных над $\mathbb{R}$ функционалов на пополнении X. Таким образом, для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ будет

$$g - \sum_{k=1}^{N} \beta_k f_k = \gamma f_{N+1}.$$

Если $\gamma \geq 0$, то требуемое представление для g получено. Если же $\gamma < 0$, то

$$g = \sum_{k=1}^{N} (\beta_k + |\gamma| \bar{t}_k) f_k.$$

Тем самым лемма доказана полностью.

Отметим, что в случае, когда $R = \mathbb{R}$, требования ограниченности функционалов излишни.

Доказательство теоремы 1.1. (2) $\to$ (1) Если $B = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k A_k$ для подходящих положительных $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ из $\mathrm{Orth}(m(Y))$, а $b \in \mathbb{B}$ и $x \in X$ таковы, что $bA_k x \leq 0$, то

$$bBx = b \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k x = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k b A_k x \leq 0,$$

ибо ортоморфизмы коммутируют и проекторы являются ортоморфизмами.

(1)$\to$ (2) Рассмотрим отделимый булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ над базой $\mathbb{B}$ пространства Y. В силу теоремы Гордона [4, с. 496] подъем $Y\!\uparrow$ есть поле $\mathscr{R}$ вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Используя каноническое вложение, мы видим, что $X^\wedge$ — это $\mathscr{R}$-полунормированное векторное пространство над стандартным именем $\mathbb{R}^\wedge$ поля $\mathbb{R}$. При этом $\mathbb{R}^\wedge$ — подполе и подрешетка $\mathscr{R} = Y{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Положим $f_k := A_k{\uparrow}$ для $k := 1, \dots, N$ и $g := B{\uparrow}$. Ясно, что $f_1, \dots, f_N, g \in (X^\wedge)^*$ внутри $\mathbb{V}^{\mathbb{B}}$. Определим последовательность $f : \{1, \dots, N\}^\wedge \to (X^\wedge)^*$ как подъем семейства $(f_1, \dots, f_N)$. При этом для оценок истинности справедливы соотношения

$$[\![f_{k^\wedge}(x^\wedge) = A_k x]\!] = \mathbb{1}, \quad [\![g(x^\wedge) = Bx]\!] = \mathbb{1}$$

для всех $x \in X$ и $k := 1, \dots, N$.

Пусть $b := [\![A_1 x \le 0^\wedge]\!] \wedge \dots \wedge [\![A_N x \le 0^\wedge]\!]$. Тогда $bA_k x \le 0$ для всех $k := 1, \dots, N$ и по условию будет $bBx \le 0$. Стало быть, $[\![A_1 x \le 0^\wedge]\!] \wedge \dots \wedge [\![A_N x \le 0^\wedge]\!] \le [\![Bx \le 0^\wedge]\!]$. Иначе говоря,

$$[\![(\forall k := 1^\wedge, \dots, N^\wedge) f_k(x^\wedge) \le 0^\wedge]\!] = \bigwedge_{k:=1,\dots,N} [\![f_{k^\wedge}(x^\wedge) \le 0^\wedge]\!] \le [\![g(x^\wedge) \le 0^\wedge]\!].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &[\![(\forall x \in X^\wedge)((\forall k := 1^\wedge, \dots, N^\wedge)\ f_k(x) \le 0^\wedge) \to g(x) \le 0^\wedge)]\!] \\ &= \bigwedge_{x \in X} [\![((\forall k := 1^\wedge, \dots, N^\wedge)\ f_k(x^\wedge) \le 0^\wedge) \to g(x^\wedge) \le 0^\wedge]\!] = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 1.2 внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и используя принцип максимума булевозначного анализа, найдем конечную последовательность $\alpha : \{1^\wedge, \dots, N^\wedge\} \to \mathscr{R}_+$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ такую, что

$$\left[\!\!\left[(\forall x \in X^\wedge)\ g(x) = \sum_{k=1^\wedge}^{N^\wedge} \alpha(k) f_k(x) \right]\!\!\right] = \mathbb{1}.$$

Положим $\alpha_k := \alpha(k^\wedge) \in \mathscr{R}_+{\downarrow}$ для $k := 1, \dots, N$. Операторы умножения в $\mathscr{R}{\downarrow}$ — ортоморфизмы $m(Y)$. При этом $B = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k A_k$, что и требовалось доказать.

Лемма 1.1, относящаяся к следствиям одного неравенства, не использует никаких предположений, ограничивающих класс рассматриваемых функционалов. Аналогичный вариант леммы Фаркаша для двух неравенств в общем случае просто неверен. В самом деле, включение $\{f = 0\} \subset \{g \le 0\}$, эквивалентное включению $\{f = 0\} \subset \{g = 0\}$, не обеспечивает пропорциональности f и g в случае произвольного подполя поля $\mathbb{R}$. Достаточно рассмотреть, скажем, $\mathbb{R}$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, взять разрывный $\mathbb{Q}$-линейный функционал на $\mathbb{R}$ и тождественное отображение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

В этой связи уместно сформулировать такой результат.

Теорема 1.2. *Пусть X — вещественное векторное пространство, Y — некоторое пространство Канторовича и $A, B \in L(X, Y)$. Эквивалентны утверждения:*

(1) $(\exists \alpha \in \operatorname{Orth}(m(Y)))\ B = \alpha A$*;*

(2) *существует проектор $\varkappa \in \mathbb{B}$ такой, что для всякого $b \in \mathbb{B}$ выполнено*[2)]

$$\{\varkappa bB \le 0\} \supset \{\varkappa bA \le 0\}, \quad \{\neg\varkappa bB \le 0\} \supset \{\neg\varkappa bA \ge 0\}.$$

[2)] Как обычно, $\neg\varkappa := \mathbb{1} - \varkappa$.

Доказательство. Булевозначный анализ сводит дело к скалярному случаю. Дважды применяя лемму 1.1 и расписывая оценки истинности, мы завершаем доказательство.

В условиях мажорирования можно получить аналоги теоремы 1.2 для полилинейных форм.

Теорема 1.3. *Пусть X — вещественное Y-полунормированное пространство, где Y — пространство Канторовича. Для некоторого $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим две мажорированные Y-значные N-линейные формы A, B на X.*

Существует ортоморфизм $\alpha \in \operatorname{Orth}(Y)_+$ такой, что $B = \alpha A$, в том и только в том случае, если для каждого $b \in \mathbb{B}$ будет $\{bA \leq 0\} \subset \{bB \leq 0\}$.

Доказательство. В скалярном случае эта теорема выведена в [7] в качестве простого следствия основного результата из [8]. В указанных работах рассматриваются полилинейные отображения, действующие из векторного пространства над некоторым полем в это же самое поле. Условие мажорации позволяет воспользоваться прямой булевозначной интерпретацией скалярного результата по схеме доказательства теоремы 1.1.

2. Системы сублинейных неравенств

Перейдем к лемме Фаркаша для сублинейных операторов. Обозначим через $\operatorname{Sub}(X, Y)$ множество сублинейных операторов из X в Y. Оператор $P \in \operatorname{Sub}(X, Y)$ называют *полиэдральным* и пишут $P \in \operatorname{PSub}(X, Y)$ при условии, что P представляет собою верхнюю огибающую конечного набора линейных операторов, т. е. если найдется конечное множество $\Lambda \subset L(X, Y)$ такое, что

$$P(x) = P_\Lambda(x) := \sup\{Ax \mid A \in \Lambda\}.$$

В случае, когда X снабжено какой-нибудь Y-полунормой, мы рассматриваем множество мажорированных сублинейных операторов $\operatorname{Sub}^{(m)}(X, Y)$ и множество полиэдральных мажорированных сублинейных операторов $\operatorname{PSub}^{(m)}(X, Y)$, подразумевая операторы, чьи субдифференциалы лежат в $L^{(m)}(X, Y)$.

Начнем с двух скалярных лемм, вторая из которых обобщает основной результат [9].

Лемма 2.1. *Пусть X — вещественное векторное пространство. Предположим, что $f_1, \dots, f_N \in X^\#$ и $p \in \operatorname{Sub}(X) := \operatorname{Sub}(X, \mathbb{R})$.*

Включение

$$\{p \geq 0\} \supset \bigcap_{k=1}^{N} \{f_k \leq 0\}$$

имеет место в том и только в том случае, когда найдутся положительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}_+$ такие, что

$$(\forall x \in X)\ p(x) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k(x) \geq 0.$$

Доказательство. Достаточность очевидна, а необходимость мы проверим. Для этого положим $H := \bigcap_{k=1}^{N} \{f_k \leq 0\}$. Ясно, что H — (выпуклый) конус в X. По условию $p(x) \geq 0$ для всех $x \in H$. По соответствующей теореме субдифференциального исчисления (см. [4, 3.2.16]) имеется функционал $l \in \partial(p)$

такой, что $l(h) \geq 0$ при любом $h \in H$. По лемме Фаркаша $-l = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k$ для подходящих положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$. Тем самым доказательство закончено.

Лемма 2.2. *Пусть X — вещественное векторное пространство. Предположим, что $p_1, \ldots, p_N \in \mathrm{PSub}(X) := \mathrm{PSub}(X, \mathbb{R})$ и $p \in \mathrm{Sub}(X)$.*

Следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\{p \geq 0\} \supset \bigcap_{k=1}^{N} \{p_k \leq 0\}$;

(2) *существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}_+$ такие, что*

$$(\forall x \in X)\ p(x) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k p_k(x) \geq 0.$$

Доказательство. По условию даны конечные подмножества $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N$ алгебраически сопряженного пространства $X^{\#}$ такие, что $p_k = P_{\Lambda_k}$ для $k := 1, \ldots, N$. Пусть Λ — дизъюнктное объединение всех Λ_k для $k := 1, \ldots, N$. Ясно, что

$$\bigcap_{k=1}^{N} \{p_k \leq 0\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \{\lambda \leq 0\}.$$

По лемме 2.1 найдутся $(\beta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbb{R}_+$ такие, что для всех $x \in X$ будет выполнено следующее:

$$\begin{aligned} 0 &\leq p(x) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \beta_\lambda \lambda(x) = p(x) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\lambda \in \Lambda_k} \beta_\lambda \lambda(x) \\ &\leq p(x) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\lambda \in \Lambda_k} \beta_\lambda p_k(x) = p(x) + \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{\lambda \in \Lambda_k} \beta_\lambda \Big) p_k(x). \end{aligned}$$

Полагая $\alpha_k := \sum_{\lambda \in \Lambda_k} \beta_\lambda$ для $k := 1, \ldots, N$, мы завершаем доказательство.

Перейдем теперь к операторному случаю.

Лемма 2.3. *Пусть X — векторное пространство над некоторым подполем R поля вещественных чисел $\mathbb{R}$. Предположим, что $f \in X^{\#}$ и $p \in \mathrm{Sub}(X)$.*

Для того чтобы имело место включение

$$\{p \geq 0\} \supset \{f \leq 0\},$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлось положительное число $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $(\forall x \in X)\ p(x) + \alpha f(x) \geq 0$.

Доказательство. Рассуждаем, как в лемме 2.1, ссылаясь на лемму 1.1 вместо леммы Фаркаша.

Теорема 2.1. *Пусть X — вещественное векторное пространство, а Y — пространство Канторовича. Предположим, что $A \in L(X, Y)$ и $P \in \mathrm{Sub}(X, Y)$.*

Включение

$$\{bP \geq 0\} \supset \{bA \leq 0\}$$

имеет место для всех $b \in \mathbb{B}$ в том и только в том случае, если найдется элемент $\alpha \in \operatorname{Orth}(m(Y))_+$ такой, что

$$(\forall x \in X)\ P(x) + \alpha A x \geq 0.$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2.3 с помощью булевозначной интерпретации.

Теорема 2.2. *Пусть X — вещественное Y-полунормированное пространство, где Y — некоторое пространство Канторовича. Допустим также, что заданы мажорированные полиэдральные сублинейные операторы $P_1, \dots, P_N \in \operatorname{PSub}^{(m)}(X, Y)$ и мажорированный сублинейный оператор $P \in \operatorname{Sub}^{(m)}(X, Y)$.*

Следующие утверждения эквивалентны:

(1) для всех $b \in \mathbb{B}$ сублинейное операторное неравенство $bP(x) \geq 0$ является следствием системы полиэдральных сублинейных операторных неравенств $bP_1(x) \leq 0, \dots, bP_N x \leq 0$, т. е. $\{bP \geq 0\} \supset \{bP_1 \leq 0\} \cap \dots \cap \{bP_N \leq 0\}$;

(2) найдутся положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \operatorname{Orth}(m(Y))$ такие, что

$$(\forall x \in X)\ P(x) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k P_k(x) \geq 0.$$

Доказательство. Утверждение устанавливается, как в лемме 2.2, с заменой ссылки на лемму Фаркаша ссылкой на теорему 1.1.

Остановимся немного на исследовании линейных неравенств с неточными данными в духе интервального анализа.

Предположим дополнительно, что X является векторной решеткой. Напомним, под *интервальным оператором* $\mathbf{T}$ из X в Y понимают просто порядковый интервал $[\underline{T}, \overline{T}]$ в пространстве порядково ограниченных операторов $L^{(r)}(X, Y)$. По умолчанию разумеется, что $\underline{T} \leq \overline{T}$. Говорят, что интервальное уравнение $\mathbf{B} = \mathfrak{X}\mathbf{A}$ имеет *слабое интервальное решение*, если для некоторых $A \in \mathbf{A}$ и $B \in \mathbf{B}$ решение имеет уравнение $B = \mathfrak{X}A$. Принято рассматривать и иные типы решений. В целях иллюстрации механизма исследований такого рода ограничимся слабыми интервальными решениями уравнений, уравновешивая объем и идеи. Все уместные подробности в конечномерном случае можно извлечь из [10, гл. 2, 3].

С каждым интервальным оператором $\mathbf{T}$ свяжем сублинейный оператор $P_{\mathbf{T}}$. Заметим, что $\mathbf{T} = [0, \overline{T} - \underline{T}] + \underline{T}$. Стало быть, для $x \in X$ будет

$$P_{\mathbf{T}}(x) = P_{[0, \overline{T} - \underline{T}]} x + \underline{T} x = (\overline{T} - \underline{T}) x_+ + \underline{T} x = \overline{T} x_+ - \underline{T} x_-.$$

Оператор $\mathbf{T}$ назовем *адаптированным*, если $P_{\mathbf{T}} \in \operatorname{PSub}(X, Y)$, т. е. если $\mathbf{T}$ имеет конечное число o-крайних точек[3)] или, что то же самое, оператор $\overline{T} - \underline{T}$ представляет собой сумму конечного числа дизъюнктных слагаемых. Отметим, что если X и Y — конечномерные пространства, то все интервальные операторы из X в Y адаптированы. Наконец, положим $\sim(x) := -x$ для всех $x \in X$.

Лемма 2.4. *Пусть X — векторная решетка. Предположим, что $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — интервальные функционалы, причем $\mathbf{f}$ адаптирован.*

Следующие утверждения эквивалентны:

[3)] См. [4, с. 95].

(1) *уравнение* $\mathbf{g} = \alpha\mathbf{f}$ *имеет слабое интервальное решение* $\alpha \in \mathbb{R}_+$;

(2) $\{\mathfrak{g} \geq 0\} \supset \{\mathfrak{f}^\sim \leq 0\}$ *для* $\mathfrak{f}^\sim := P_{\mathbf{f}} \circ \sim$ *и* $\mathfrak{g} := P_{\mathbf{g}}$.

Доказательство. Сублинейный функционал $\mathfrak{f}$ полиэдрален. Стало быть, по лемме 2.2 условие (2) равносильно существованию $\alpha \in \mathbb{R}_+$ такого, что $\mathfrak{g}(x) + \alpha\mathfrak{f}(-x) \geq 0$ для всех $x \in X$. Сублинейный функционал положителен в том и только в том случае, если у него есть положительный опорный. Иначе говоря, (2) эквивалентно существованию положительного α, для которого $0 \in (\mathbf{g} - \alpha\mathbf{f})$.

Теорема 2.3. *Пусть X — векторная решетка, а Y — некоторое пространство Канторовича. Допустим также, что в пространстве порядково ограниченных операторов $L^{(r)}(X, Y)$ заданы адаптированные интервальные операторы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N$ и произвольный интервальный оператор $\mathbf{B}$.*

Следующие утверждения эквивалентны:

(1) *интервальное уравнение*

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{A}_k$$

имеет слабое интервальное решение $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(Y)_+$;

(2) *для всех* $b \in \mathbb{B}$ *будет*

$$\{b\mathfrak{B} \geq 0\} \supset \{b\mathfrak{A}_1^\sim \leq 0\} \cap \dots \cap \{b\mathfrak{A}_N^\sim \leq 0\},$$

где $\mathfrak{A}_k^\sim := P_{\mathbf{A}_k} \circ \sim$ *для* $k := 1, \dots, N$ *и* $\mathfrak{B} := P_{\mathbf{B}}$.

Доказательство. Достаточно повторить рассуждение леммы 2.4 и сослаться на теорему 2.2.

3. Системы неоднородных неравенств

Перейдем к случаю неоднородных неравенств.

Лемма 3.1. *Пусть X — векторное пространство над подполем R поля вещественных чисел $\mathbb{R}$, а $f, g \in X^\#$ и $u, v \in \mathbb{R}$. Допустим, что неоднородное неравенство $f(x) \leq u$ совместно.*

Включение $\{g \leq v\} \supset \{f \leq u\}$ выполнено в том и только в том случае, если найдется $\alpha \in \mathbb{R}_+$ такое, что $g = \alpha f$ и $v \geq \alpha u$.

Доказательство. Установим лемму в сторону необходимости, ибо достаточность очевидна.

Положим $p(x) := (f(x) - u) \vee (v - g(x))$ для всех $x \in X$. По условию $(\forall x \in X)\ p(x) \geq 0$. Стало быть, найдутся положительные числа γ, δ такие, что $\gamma + \delta = 1$ и при этом $\gamma g - \delta f = 0$ и $\gamma v \geq \delta u$. Если $\gamma > 0$, то полагаем $\alpha := \delta/\gamma$. Если же $\gamma = 0$, то $\delta = 1$. Следовательно, $f = 0$. Учитывая совместность, видим, что $v \geq 0$, а $g = 0$. Значит, в этом случае можно взять $\alpha := 0$.

Лемма 3.2. *Пусть X — некоторое $\mathbb{R}$-полунормированное пространство над подполем R поля $\mathbb{R}$. Пусть, далее, $f_1, \dots, f_N, g \in X^*$, а $u_1, \dots, u_N, v \in \mathbb{R}$. Предположим также, что система неоднородных неравенств $f_k(x) \leq u_k$, где $k := 1, \dots, N$, совместна.*

Неоднородное неравенство $g(x) \leq v$ является следствием рассматриваемой неоднородной системы в том и только в том случае, если найдутся $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}_+$ такие, что

$$g = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k, \quad v \geq \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k.$$

Доказательство. По-прежнему нуждается в доказательстве лишь необходимость приведенного условия.

Как это принято, воспользуемся конструкцией преобразования Хёрмандера [4, с. 28]. Рассмотрим пространство $X \times \mathbb{R}$ над полем R и снабдим его естественной полунормой произведения. Для $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ положим $\bar{f}_k(x,t) := f_k(x) - tu_k$, $\bar{g}(x,t) := g(x) - tv$ и $\tau(x,t) := -t$. Пусть

$$(x,t) \in \{\tau \le 0\} \cap \bigcap_{k=1}^{N} \{\bar{f}_k \le 0\}.$$

Если при этом $t > 0$, то $u_k \ge f_k(x/t)$ для $k := 1, \dots, N$ и, стало быть, $g(x/t) \le v$ по условию. Иначе говоря, $(x,t) \in \{\bar{g} \le 0\}$. Если $t = 0$, то выберем какое-нибудь решение $\bar{x}$ рассматриваемой системы неоднородных неравенств, являющееся одновременно решением неоднородного следствия $g(\bar{x}) \le v$. Пусть $x \in K := \bigcap_{k=1}^{N} \{f_k \le 0\}$. Тогда $x + \bar{x} \in \bigcap_{k=1}^{N} \{f_k \le u_k\}$. Следовательно, $x \in \{g \le v - g(\bar{x})\}$, т. е. R-линейный функционал g ограничен сверху на выпуклом конусе K. Значит, g принимает отрицательные значения на K. Применяя лемму 1.2, найдем положительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta$ такие, что

$$\bar{g} = \beta\tau + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \bar{f}_k.$$

Ясно, что найденные параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ искомые. Тем самым лемма доказана полностью.

Отметим, что доказательство леммы 3.2 дословно проходит в случае, когда X — это вещественное векторное пространство, а рассматриваемые функционалы принадлежат $X^{\#}$.

Теорема 3.1. *Пусть X — вещественное Y-полунормированное пространство, где Y — пространство Канторовича. Допустим также, что заданы мажорированные операторы $A_1, \dots, A_N, B \in L^{(m)}(X,Y)$ и элементы $u_1, \dots, u_N, v \in Y$. Предположим еще, что система неоднородных неравенств $A_1 x \le u_1, \dots, A_N x \le u_N$ совместна. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *для любого $b \in \mathbb{B}$ неоднородное неравенство $bBx \le bv$ является следствием системы неоднородных неравенств $bA_1 x \le bu_1, \dots, bA_N x \le bu_N$, т. е.*

$$\{bB \le bv\} \supset \{bA_1 \le bu_1\} \cap \dots \cap \{bA_N \le bu_N\}.$$

(2) *существуют положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(m(Y))$ такие, что*

$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k, \quad v \ge \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k.$$

Доказательство. Как и прежде, проверить нужно только импликацию (1)→(2). Повторяя доказательство теоремы 1.1, положим $f_k := A_k\!\uparrow$ для $k := 1, \dots, N$ и $g := B\!\uparrow$. Ясно, что $f_1, \dots, f_N, g \in (X^{\wedge})^*$ внутри $\mathbb{V}^{\mathbb{B}}$. Определим последовательности $f : \{1, \dots, N\}^{\wedge} \to (X^{\wedge})^*$, $\quad u : \{1, \dots, N\}^{\wedge} \to \mathscr{R}$ как подъемы семейств $(f_1, \dots, f_N)$ и $(u_1, \dots, u_N)$. Понятно, что неравенство $g(x) \le v$ является следствием системы неравенств $f(k)(x) \le u(k)$ для $k \in \{1, \dots, N\}^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{\mathbb{B}}$. Легко видеть, что система всех рассматриваемых неравенств совместна внутри $\mathbb{V}^{\mathbb{B}}$. Стало быть, применима лемма 3.2, и имеется последовательность $\alpha : \{1^\wedge, \dots, N^\wedge\} \to \mathscr{R}_+$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ такая, что

$$\left[\!\!\left[(\forall x \in X^\wedge)\ g(x) = \sum_{k=1^\wedge}^{N^\wedge} \alpha(k) f(k)(x) \right]\!\!\right] = \mathbb{1}, \quad \left[\!\!\left[v \geq \sum_{k=1^\wedge}^{N^\wedge} \alpha(k) u(k) \right]\!\!\right] = \mathbb{1}.$$

Полагая $\alpha_k := \alpha(k^\wedge) \in \mathscr{R}_+{\downarrow}$ для $k := 1, \dots, N$, завершаем доказательство.

Перейдем теперь к случаю неоднородных неравенств. Для иллюстрации рассмотрим только два частных случая.

Теорема 3.2. *Пусть X — вещественное векторное пространство, а Y — пространство Канторовича. Пусть, далее, $u, v \in Y$ и $A, B \in L(X, Y)$. Допустим, что неоднородное неравенство $Ax \leq u$ совместно.*

Включение $\{bB \leq bv\} \supset \{bA \leq bu\}$ имеет место для всех $b \in \mathbb{B}$ в том и только в том случае, если найдется ортоморфизм $\alpha \in \operatorname{Orth}(m(Y))_+$ такой, что $B = \alpha A$ и $v \geq \alpha u$.

Доказательство. Это прямая булевозначная интерпретация леммы 3.1.

В приложениях встречаются неоднородные матричные неравенства над конечномерными пространствами разных размерностей (см. [11, предложение 2.1]).

Теорема 3.3. *Пусть X — вещественное Y-полунормированное пространство, где Y — некоторое пространство Канторовича. Допустим также, что заданы мажорированные операторы $A \in L^{(m)}(X, Y^s)$ и $B \in L^{(m)}(X, Y^t)$ и элементы $u \in Y^s$, $v \in Y^t$, где s, t — натуральные числа, причем неравенство $Ax \leq u$ совместно. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *для любого $b \in \mathbb{B}$ неоднородное операторное неравенство $bBx \leq bv$ является следствием неоднородного неравенств $bAx \leq bu$, т. е. $\{bB \leq bv\} \supset \{bA \leq bu\}$.*

(2) *существует $s \times t$-матрица, составленная из положительных ортоморфизмов $m(Y)$, такая, что для соответствующего оператора $\mathfrak{X} \in L_+(Y^s, Y^t)$ будет $B = \mathfrak{X} A$ и $\mathfrak{X} u \leq v$.*

Доказательство. Проверим только импликацию (1) $\to$ (2). Пусть $A_k := \operatorname{Pr}_k A$, $u_k := \operatorname{Pr}_k u$ и $B_l := \operatorname{Pr}_l B$, $v_l := \operatorname{Pr}_l v$ для соответствующих координатных проекторов. Тогда для всех $l := 1, \dots, t$ и $b \in \mathbb{B}$ будет

$$\{bB_l \leq bv_l\} \supset \{bB \leq bv\} \supset \bigcap_{k=1}^{s} \{bA_k \leq bu_k\}.$$

По теореме 3.1 найдутся положительные ортоморфизмы $\alpha_{lk} \in \operatorname{Orth}(m(Y))$ такие, что

$$B_l = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{lk} A_k; \quad v_l \geq \sum_{k=1}^{s} \alpha_{lk} u_k.$$

Тем самым доказательство теоремы 3.3 завершено.

Уравновешивая краткость и полноту, остановимся на неоднородных операторных неравенствах в случае комплексных скаляров.

Теорема 3.4. *Пусть X — комплексное Y-полунормированное пространство, где Y — некоторое пространство Канторовича. Допустим также, что заданы элементы $u_1, \dots, u_N, v \in Y$ и мажорированные операторы $A_1, \dots, A_N, B \in$*

$L^{(m)}(X, Y_{\mathbb{C}})$, *действующие в комплексификацию*[4)] $Y_{\mathbb{C}} := Y \otimes iY$ *пространства* Y. *Предположим, что система неоднородных неравенств* $|A_1x| \le u_1, \dots, |A_Nx| \le u_N$ *совместна. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *для любого* $b \in \mathbb{B}$ *неравенство* $b|Bx| \le bv$ *служит следствием системы неравенств* $b|A_1x| \le bu_1, \dots, b|A_Nx| \le bu_N$, *т. е.*

$$\{b|B(\cdot)| \le bv\} \supset \{b|A_1(\cdot)| \le bu_1\} \cap \dots \cap \{b|A_N(\cdot)| \le bu_N\};$$

(2) *существуют комплексные ортоморфизмы* $c_1, \dots, c_N \in \operatorname{Orth}(m(Y)_{\mathbb{C}})$ *такие, что*

$$B = \sum_{k=1}^{N} c_k A_k, \quad v \ge \sum_{k=1}^{N} |c_k| u_k.$$

Доказательство. Вновь нужно проверить (1)→(2).

Повторяя доказательство теоремы 1.1 и полагая $f_k := A_k\!\uparrow$ для $k := 1, \dots, N$ и $g := B\!\uparrow$, мы сводим дело к скалярному случаю. Ясно, что $f_1, \dots, f_N, g \in (X^\wedge)^* := L^{(m)}(X^\wedge, \mathscr{C})$, где $\mathscr{C}$ — поле комплексных чисел внутри $\mathbb{V}^{\mathbb{B}}$. Определим последовательности $f : \{1, \dots, N\}^\wedge \to (X^\wedge)^*$, $u : \{1, \dots, N\}^\wedge \to \mathscr{C}$ как подъемы семейств $(f_1, \dots, f_N)$ и $(u_1, \dots, u_N)$.

По принципу переноса неравенство $\operatorname{Re}(g(x)) \le v$ является следствием совместной системы вещественных неравенств $\operatorname{Re}(f(k))(x) \le u(k)$, $\operatorname{Im}(f(k))(x) \le u(k)$ для $x \in X^\wedge$ и $k \in \{1, \dots, N\}^\wedge$. По лемме 3.2 найдутся последовательности $\alpha : \{1^\wedge, \dots, N^\wedge\} \to \mathscr{R}_+$, $\beta : \{1^\wedge, \dots, N^\wedge\} \to \mathscr{R}_+$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ такие, что

$$\left[\!\!\left[(\forall x \in X^\wedge)\ \operatorname{Re}(g(x)) = \sum_{k=1^\wedge}^{N^\wedge} \big(\alpha(k)\operatorname{Re}(f(k)(x)) + \beta(k)\operatorname{Im}(f(k)(x))\big) \right]\!\!\right] = \mathbb{1};$$

$$\left[\!\!\left[v \ge \sum_{k=1^\wedge}^{N^\wedge} (\alpha(k) + \beta(k)) u(k) \right]\!\!\right] = \mathbb{1}.$$

Пусть теперь $c_k := \alpha(k^\wedge) - i^\wedge \beta(k^\wedge) \in \mathscr{C}\!\downarrow$ для $k := 1, \dots, N$.

Легко видеть, что для двух $\mathbb{C}$-линейных функционалов l, m на X и чисел $a, b \in \mathbb{R}$ для $c := a - ib$ будет $l = cm$ в том и только в том случае, если $\operatorname{Re}(l(x)) = a\operatorname{Re}(m(x)) + b\operatorname{Im}(m(x))$ для всех $x \in X$. При этом $|c| \le |a| + |b|$. Учитывая это наблюдение и осуществляя спуск, мы завершаем доказательство.

В заключение отметим, что в теории линейных неравенств популярны варианты леммы Фаркаша в виде утверждений о взаимоисключающих возможностях (см., например, [2] и [12, гл. 4]). В качестве иллюстрации приведем соответствующую переформулировку только теоремы 1.1.

Теорема об альтернативе. *Пусть* X — *вещественное* Y-*полунормированное пространство, где* Y — *некоторое пространство Канторовича. Допустим также, что заданы мажорированные операторы* $A_1, \dots, A_N, B \in L^{(m)}(X, Y)$. *Тогда имеет место в точности одна из следующих возможностей:*

(1) *найдутся точка* $x \in X$ *и проекторы* $b, b' \in \mathbb{B}$ *такие, что* $b' \le b$ *и*

$$b'Bx > 0,\ bA_1x \le 0,\ \dots,\ bA_Nx \le 0;$$

[4)] См. [3, с. 338].

(2) *существуют положительные ортоморфизмы* $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(m(Y))$ *такие, что*

$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k.$$

Доказательство. Неравенство $bBx \leq 0$ нарушено в том и только в том случае, если для некоторого проектора $\mathfrak{b} \in \mathbb{B}$ будет $\mathfrak{b}bBx > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kjeldsen T. H.* Different motivations and goals in the historical development of the theory of systems of linear inequalities // Arch. Hist. Exact Sci. 2002. V. 56, N 6. P. 459–538.
2. *Encyclopedia of optimization* / Floudas C. A., Pardalos P. M. (eds.) Berlin; New York: Springer, 2009.
3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
4. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения. М.: Наука, 2007.
5. *Bartl D.* A short algebraic proof of the Farkas lemma // SIAM J. Optim. 2008. V. 19, N 1. P. 234–239.
6. *Kuczma M.* An Introduction to the theory of functional equations and inequalities. Basel etc.: Birkhäuser, 2009.
7. *Downey L.* Farkas' lemma and multilinear forms // Missouri J. Math. Sci. 2009. V. 21, N 1. P. 65–67.
8. *Aron R., Downey L., Maestre M.* Zero sets and linear dependence of multilinear forms // Note Mat. 2005/2006. V. 25, N 1. P. 49–54.
9. *Jeyakumar V., Li G. I.* Farkas' lemma for separable sublinear functionals // Optim. Letters. 2009. V. 3, N 4. P. 537–545.
10. *Задачи линейной оптимизации с неточными данными* / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, и др. М.; Ижевск: РХД, 2008.
11. *Mangasarian O. L.* Set containment characterization // J. Glob. Optim. 2002. V. 24, N 4. P. 473–480.
12. *Giannessi F.* Constrained optimization and image space analysis. V. 1: Separation of sets and optimality conditions. New York: Springer, 2005.

Статья поступила 25 июня 2009 г.

Кутателадзе Семён Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sskut@math.nsc.ru