Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БОЛЬШИМИ СЛАГАЕМЫМИ

Е. В. Крутенко, В. Б. Левенштам

Аннотация. Рассмотрены линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, коэффициенты при неизвестных у которых содержат плавные и быстро осциллирующие слагаемые, пропорциональные определенным положительным степеням частоты осцилляций. Построены и обоснованы полные асимптотические разложения решений задачи Коши.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, большие плавное и быстро осциллирующие слагаемые, построение и обоснование полной асимптотики решения.

Работа нацелена на дальнейшее развитие теории асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами, и примыкает к статьям [1–4]. В этих статьях указанная теория развивается для дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими слагаемыми, пропорциональными положительным степеням частоты осцилляций. Стимулом развития указанной систематической теории послужил ряд известных физических задач, описываемых дифференциальными уравнениями с быстро осциллирующими слагаемыми, пропорциональными положительным степеням частоты осцилляций, в которых обнаружены удивительные эффекты высокочастотных вибраций (подробнее см., например [2, 4], где имеется соответствующая библиография). Отметим, что в [1–4] рассматриваются нелинейные уравнения, в которых большие слагаемые имеют нулевые средние; здесь же представлена несколько иная ситуация.

В данной работе рассматриваются линейные дифференциальные уравнения второго порядка, коэффициенты при неизвестных в которых содержат большие слагаемые двух типов: плавное и быстро осциллирующее с нулевым средним, пропорциональные определенным положительным степеням высокой частоты осцилляций. Построены и обоснованы полные асимптотические разложения решений задачи Коши.

Для линейных уравнений, содержащих лишь плавные большие слагаемые, вопросы асимптотического интегрирования хорошо изучены и относятся к одному из направлений в асимптотической теории дифференциальных уравнений, которое связано с именами Ж. Лиувилля, Л. Шлезингера, Г. Биркхоффа, Я. Д. Тамаркина, В. С. Пугачёва, М. В. Федорюка, Н. Н. Моисеева и ряда других авторов (см., в частности, [5, гл. IV], где рассматриваемая в данной статье задача изучена при отсутствии в ней быстро осциллирующих слагаемых).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке второго автора Южным математическим институтом ВНЦ РАН и РСО-А, г. Владикавказ.

Работ, в которых рассматриваются дифференциальные уравнения с большими слагаемыми обоих типов, немного. Наиболее общие результаты здесь представлены, по-видимому, в работе Ю. Л. Далецкого [6] (см. также [7, гл. VII, § 3]), где методами функционального анализа изучаются линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, причем как в нерезонансном, так и в резонансном случаях. При этом вывод и обоснование асимптотик в [6, 7] базируется на довольно глубоких вспомогательных результатах, что отвечает значительной степени общности рассматриваемых там задач.

Данная работа методически близка к упоминавшимся выше исследованиям Н. Н. Моисеева [5]. Рассматриваемые здесь скалярные обыкновенные дифференциальные уравнений второго порядка (см. (1) и (68) ниже) имеют несколько отличный от [6, 7] вид (сравните, например, представив уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка), так как могут содержать коэффициенты, пропорциональные соответствующим более высоким степеням асимптотического параметра. В работе изложен простой вывод асимптотик в нерезонансном случае и с помощью начальных результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений осуществлено их обоснование.

1. Пусть $T > 0$, $a(t)$ и $b_k(t,\tau)$, $k = 0,1,2,3$, — заданные на множествах $t \in [0,T]$ и $(t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty) \equiv \Pi$ соответственно вещественные непрерывные функции, обладающие непрерывными производными по t любого порядка. Будем предполагать, что $a(t)$ не принимает целых и полуцелых значений ($a(t) \neq \frac{n}{2}$, $n \in Z$) — нерезонансный случай, а функции $b_k(t,\tau)$, $k = 0,1,2,3$, являются 2π-периодическими по τ, причем $b_k(t,\tau)$ имеют непрерывные на Π производные первого порядка по τ.

Рассмотрим на участке $t \in [0,T]$ задачу Коши

$$\ddot{x} + [\omega^2 a^2(t) + \omega^{\frac{3}{2}} b_3(t,\omega t) + \omega b_2(t,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} b_1(t,\omega t) + b_0(t,\omega t)]x = 0, \qquad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \omega x_1, \qquad (2)$$

где ω — большой вещественный параметр, а x_0 и x_1 — заданные вещественные числа[1)].

Решения всех рассматриваемых в работе задач понимаются в классическом смысле.

Отметим, что решение $x_\omega(t)$ линейной задачи (1), (2), которое согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений существует и единственно, является вещественным. Действительно, поскольку данные этой задачи вещественны, то, применяя к ней операцию комплексного сопряжения, убеждаемся, что вместе с $x_\omega(t)$ решением задачи (1), (2) является и комплексно сопряженная функция $\bar{x}_\omega(t)$, а потому $x_\omega(t) = \bar{x}_\omega(t)$.

Асимптотическое разложение решения $x_\omega(t)$ задачи (1), (2) согласно методу ВКБ (см., например, [5]) и методу двухмасштабных разложений (см., например, [8]) будем строить в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int_0^t (\omega\lambda_k(s) + \sqrt{\omega}\mu_k(s))\,ds} \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) \right), \qquad (3)$$

[1)]Вместо второго условия (2) можно рассматривать условие вида $\dot{x}(0) = \omega x_2 + \omega^{\frac{1}{2}} x_1 + x_0$. Кроме того, к коэффициентам уравнения (1) и к правым частям (2) можно добавить слагаемые, пропорциональные степеням $\omega^{-\frac{n}{2}}$, где n натуральное. При этом, как видно из дальнейших рассуждений, алгоритм построения асимптотики и его обоснование, по существу, не меняются.

где функции $v_{jk}(t,\tau)$ являются 2π-периодическими функциями по τ с нулевым средним:

$$\langle v_{jk}(t,\tau)\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{jk}(t,s)\,ds = 0. \tag{4}$$

Функции $\lambda_k(t)$, $\mu_k(t)$, $u_{jk}(t)$ и $v_{jk}(t,\tau)$, входящие в (3), будем искать следующим образом. Подставим ряд (3) в уравнение (1) и приравняем в левой и правой частях полученного равенства коэффициенты при одинаковых функциях. Отметим, что указанные функции имеют вид

$$\omega^{\frac{m}{2}} e^{\int\limits_0^t (\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))\,ds}, \quad m = 4, 3, 2, \ldots, k = 1, 2. \tag{5}$$

Получим бесконечную последовательность равенств, каждое из которых разобьем затем с помощью операции усреднения $\langle\ldots\rangle$ по быстрой переменной $\tau = \omega t$ на два уравнения. В результате найдем неизвестные λ_k, μ_k, а также получим уравнения для коэффициентов $v_{jk}(t,\tau)$ и коэффициентов $u_{jk}(t)$. Коэффициенты $v_{jk}(t,\tau)$ однозначно определяются построенными уравнениями в силу условия (4). Для однозначного определения коэффициентов $u_{jk}(t)$ требуются начальные условия, которые находим, подставив ряд (3) в равенства (2) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ω.

Для формулировки теоремы введем следующие обозначения.

Задачей типа (A) назовем задачу на полуоси $\tau \in [0,\infty)$ о нахождении 2π-периодического по τ с нулевым средним решения уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varphi(t,\tau),$$

где $t \in [0,T]$ — параметр, а $\varphi(t,\tau)$ — непрерывная на множестве Π функция, 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Задачей типа $(B_\pm)$ назовем задачу на полуоси $\tau \in [0,\infty)$ о нахождении 2π-периодического по τ решения уравнения

$$\frac{\partial w(t,\tau)}{\partial \tau} \pm 2ia(t)w(t,\tau) = \psi(t,\tau), \tag{6}$$

где $t \in [0,T]$ — параметр, а $\psi(t,\tau)$ — непрерывная на множестве Π функция, 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Задачей типа $(C_\pm)$ назовем задачу Коши на участке $t \in [0,T]$ вида

$$\pm 2ia(t)\dot{u} + \left(\langle b_2(t,\tau) + b_3(t,\tau)\beta_\pm(t,\tau)\rangle \pm i\dot{a}(t) - \frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle^2}{4a^2(t)}\right)u = \chi(t), \quad u(0) = u_0,$$

где $\chi(t), u_0$ — вещественные непрерывная функция и число, а $\beta_\pm(t,\tau)$ – 2π-периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \beta_\pm}{\partial \tau^2} \pm 2ia(t)\frac{\partial \beta_\pm}{\partial \tau} = \{b_3(t,\tau)\}_\tau.$$

Здесь и ниже используются обозначения

$$\{b_k(t,\tau)\}_\tau = b_k(t,\tau) - \langle b_k(t,\tau)\rangle.$$

Отметим, что задачи (A), $(B_\pm)$ и $(C_\pm)$, как известно (см. леммы 1, 2 ниже), однозначно разрешимы, а потому решения задач (B_-) и (C_-) связаны с соответствующими решениями задач (B_+) и (C_+) операцией комплексного сопряжения.

Частичную сумму ряда (3)[2)]

$$x^n(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t (\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))\,ds} \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{n} \omega^{-\frac{j}{2}} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) \right), \qquad (7)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T],$$

будем называть n-м *приближением* решения $x_\omega(t)$ задачи (1), (2).

Теорема 1. *Для любого целого неотрицательного числа n найдутся такие положительные числа C_n и ω_n, что при $\omega > \omega_n$ описанным выше способом эффективно строится n-е приближение $x^n(t)$ решения $x_\omega(t)$ задачи* (1), (2), *которое вещественно и при всех $t \in [0, T]$ удовлетворяет оценкам*

$$|x_\omega(t) - x^n(t)| \le C_n \omega^{\frac{-n-1}{2}}, \quad |\dot{x}_\omega(t) - \dot{x}^n(t)| \le C_n \omega^{\frac{-n+1}{2}}. \qquad (8)$$

Под эффективностью понимается тот факт, что построение приближения $x^n(t)$ сводится к решению $n+1$ задач каждого из типов: (A), (B_+), (C_+).

Замечание 1. Говоря о действиях, к которым сводится построение приближения, мы исключаем арифметические операции, операцию дифференцирования известных функций и операцию определения среднего известных непрерывных периодических функций.

Доказательство теоремы довольно длинное, поэтому изложим его в следующих трех пунктах: в п. 2 докажем часть теоремы, относящуюся к формальному построению приближений $x^n(t)$, и установим их вещественность, а в пп. 3, 4 докажем оценки (8).

2. Начнем с формулировок двух известных простых утверждений.

Лемма 1. *Задача типа* (A) *имеет единственное решение*

$$v(t,\tau) = \int\limits_0^\tau \varphi(t,s)\,ds - \left\langle \int\limits_0^\tau \varphi(t,s)\,ds \right\rangle, \quad (t,\tau) \in \Pi.$$

Доказательство леммы 1 ввиду его простоты опускается.

Лемма 2. *Задача типа* $(B_\pm)$ *имеет единственное решение*

$$w_\pm(t,\tau) = \int\limits_0^\tau e^{\mp 2ia(t)(\tau-s)}\psi(t,s)\,ds + (1 - e^{\mp 4\pi a(t)i})^{-1} \int\limits_0^{2\pi} e^{\mp 2ia(t)(2\pi-s+\tau)}\psi(t,s)\,ds, \qquad (9)$$

причем $\langle w_\pm(t,\tau)\rangle = 0$.

Действительно (см. [9, с. 34]), каждое из двух уравнений (6) имеет единственное 2π-периодическое по τ решение $w(t,\tau)$, и последние имеют вид (9). Применив к равенствам (5) операцию $\langle \ldots \rangle$ усреднения по τ, получим $\langle w(t,\tau)\rangle = 0$.

[2)] При этом полагается $x^0(t) = \sum\limits_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t (\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))\,ds} u_{0k}(t)$.

Для нахождения неизвестных функций, входящих в (7), дважды формально продифференцируем равенство (3). При этом производную по t будем по-прежнему обозначать точкой, а производную по $\tau = \omega t$ — штрихом:

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int_0^t (\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))\,ds} \Bigg[(\omega\lambda_k(t) + \sqrt{\omega}\mu_k(t)) \\ \times \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t))\right) \\ + \dot{u}_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} (\dot{u}_{jk}(t) + \dot{v}_{jk}(t,\omega t) + \omega v'_{jk}(t,\omega t))\Bigg], \quad (10)$$

$$\ddot{x}(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int_0^t (\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))\,ds} \Bigg[(\omega\lambda_k(t) + \sqrt{\omega}\mu_k(t)) \Bigg[(\omega\lambda_k(t) + \sqrt{\omega}\mu_k(t)) \\ \times \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t))\right) \\ + 2\left[\dot{u}_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} (\dot{u}_{jk}(t) + \dot{v}_{jk}(t,\omega t) + \omega v'_{jk}(t,\omega t))\right]\Bigg]\Bigg] \\ + (\omega\dot{\lambda}_k(t) + \sqrt{\omega}\dot{\mu}_k(t))\Bigg(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) + \ddot{u}_{0k}(t) \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} (\ddot{u}_{jk}(t) + \ddot{v}_{jk}(t,\omega t) + 2\omega\dot{v}'_{jk}(t,\omega t) + \omega^2 v''_{jk}(t,\omega t))\Bigg). \quad (11)$$

Подставим выражения (3), (11) в уравнение (1) и приравняем коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях полученного равенства. В результате получим последовательность пар уравнений, первая из которых (равенство коэффициентов при функциях (5) в случае $m = 4$) имеет вид

$$(\lambda_k^2(t) + a^2(t))u_{0k}(t) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (12)$$

Положим

$$\lambda_{1,2}(t) = \pm a(t)i, \quad (13)$$

тогда равенства (12) будут выполнены.

Вторая пара уравнений ($m = 3$) имеет вид

$$2\lambda_k\mu_k u_{0k} + \lambda_k^2(u_{1k} + v_{1k}) + 2\lambda_k v'_{1k} + v''_{1k} + a^2(u_{1k} + v_{1k}) + b_3 u_{0k} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (14)$$

Применяя к последнему уравнению операцию усреднения по τ и учитывая (12), получаем равенства

$$2\lambda_k\mu_k u_{0k} + \langle b_3\rangle u_{0k} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (15)$$

из которых с учетом (13) находим

$$\mu_{1,2} = \mp\frac{\langle b_3\rangle i}{2a(t)}. \quad (16)$$

Разность уравнений (14) и (15) имеет вид

$$v''_{1k} + 2\lambda_k v'_{1k} + \{b_3\}_\tau u_{0k} = 0, \quad \langle v_{1k}\rangle = 0, \quad k = 1, 2. \tag{17}$$

Произведя в задачах (17) замену

$$v'_{1k}(t,\tau) = w_{1k}(t,\tau)u_{0k}(t), \quad \langle w_{1k}\rangle = 0, \quad k = 1, 2, \tag{18}$$

преобразуем их к задачам типа $(B_\pm)$ и найдем согласно лемме 2

$$\begin{aligned} w_{1k} = (1 - e^{\mp 4a(t)\pi})^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \{b_3(t,s)\}_s e^{\pm 2a(t)i(s-\tau-2\pi)}\, ds \\ + \int\limits_0^{\tau} \{b_3(t,s)\}_s e^{\pm 2a(t)i(s-\tau)}\, ds \equiv \alpha_k(t,\tau), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\alpha_k(t, \tau + 2\pi) = \alpha_k(t,\tau), \quad \langle \alpha_k(t,\tau)\rangle = 0.$$

Заметим, что $\alpha_1(t,\tau) = \bar{\alpha}_2(t,\tau)$, а потому для нахождения функций $w_{1k}(t,\tau)$, $k = 1, 2$, достаточно решить лишь задачу (B_+) и воспользоваться операцией комплексного сопряжения. Подставив выражения (19) в (18), придем к задачам типа (A), которые согласно лемме 1 однозначно разрешимы и решения которых имеют вид

$$v_{1k}(t,\tau) = \beta_k(t,\tau)u_{0k}(t), \tag{20}$$

где

$$\beta_k(t,\tau) = \int\limits_0^{\tau} \alpha_k(t,s)\, ds - \left\langle \int\limits_0^{\tau} \alpha_k(t,s)\, ds \right\rangle. \tag{21}$$

Здесь опять достаточно решить лишь одну задачу типа (A) и, найдя $\beta_1(t,\tau)$, положить $\beta_2(t,\tau) = \bar{\beta}_1(t,\tau)$.

Третья пара уравнений ($m = 2$) рассматриваемой нами последовательности имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_k^2(u_{2k} + v_{2k}) + 2\lambda_k\mu_k(u_{1k} + v_{1k}) + \mu_k^2 u_{0k} + 2\lambda_k\dot{u}_{0k} + \dot{\lambda}_k u_{0k} + v''_{2k} \\ + a^2(u_{2k} + v_{2k}) + b_3(u_{1k} + v_{1k}) + b_2 u_{0k} = 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Применяя к этим уравнениям операцию $\langle \dots \rangle$ усреднения по $\tau = \omega t$ и учитывая равенства (12), (15), получим

$$\mu_k^2 u_{0k} + 2\lambda_k\dot{u}_{0k} + \dot{\lambda}_k u_{0k} + \langle b_3 v_{1k}\rangle + \langle b_2\rangle u_{0k} = 0.$$

Отсюда в силу (13), (16), (20) вытекают равенства

$$\pm 2a(t)i\dot{u}_{0k}(t) + \left(\langle b_2(t,\tau) + b_3(t,\tau)\beta_k\rangle \pm \dot{a}(t)i - \frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle^2}{4a^2(t)} \right) u_{0k} = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{22}$$

Для нахождения соответствующих уравнениям (22) начальных условий положим в равенствах (3) и (9) $t = 0$ и приравняем коэффициенты в их левых и правых частях при одинаковых степенях ω. Для неизвестных $u_{0k}(0)$ получим таким образом соотношения

$$u_{01}(0) + u_{02}(0) = x_0, \quad \lambda_1 u_{01}(0) + \lambda_2 u_{02}(0) = x_1. \tag{23}$$

Эта система имеет единственное решение u_{01}, u_{02}, причем $u_{01} = \bar{u}_{02}$. Последнее соотношение является следствием того факта, что наряду с решением u_{01}, u_{02} системы (23) ее решением, очевидно, является $\bar{u}_{02}, \bar{u}_{01}$.

Задачи Коши для уравнений (22) с начальными условиями

$$u_{0k}(0) = u_{0k}, \quad k = 1, 2, \tag{24}$$

соответствуют задачам типа $(C_\pm)$. Определив из (22)–(24) функции $u_{0k}(t)$, $k = 1, 2$, найдем по формулам (20) функции $v_{1k}(t,\tau)$. Ясно, что $u_{01}(t) = \bar{u}_{02}(t)$, $v_{11}(t,\tau) = \bar{v}_{12}(t,\tau)$. Опять заметим, что нахождение функций $u_{0k}(t)$ сводится к решению задачи C_+ и последующему применению операции сопряжения.

Предположим теперь, что для некоторого числа N нахождение функций u_{jk}, $v_{j+1,k}$, $k = 1, 2$, $j \le N$, сводится к решению $j+1$ задач типов (A), (B_+) и (C_+), причем $u_{j1}(t) = \bar{u}_{j2}(t)$, $v_{j+1,1}(t,\tau) = \bar{v}_{j+1,2}(t,\tau)$, а значит, функции x^j, $0 \le j \le N$, вещественны. Покажем, что тогда для нахождения неизвестных $u_{N+1,k}$, $v_{N+2,k}$ достаточно будет решить по одной задаче типов (A), (B_+), (C_+), при этом $u_{N+1,1} = \bar{u}_{N+1,2}$, $v_{N+2,1} = \bar{v}_{N+2,1}$. Для этого рассмотрим пару уравнений введенной выше последовательности, полученных приравниванием коэффициентов при функциях вида (5) в случае $m = N-2$:

$$\begin{aligned}
&\lambda_k^2(t)(u_{N+2,k} + v_{N+2,k}) + 2\lambda_k\mu_k(u_{N+1,k} + v_{N+1,k}) + \mu_k^2(u_{N,k} + v_{N,k})\\
&\quad + \dot{\lambda}_k(u_{N,k} + v_{N,k}) + \dot{\mu}_k(u_{N-1,k} + v_{N-1,k}) + 2\lambda_k(\dot{u}_{N,k} + \dot{v}_{N,k} + v'_{N+2,k})\\
&\quad + 2\mu_k(\dot{u}_{N-1,k} + \dot{v}_{N-1,k} + v'_{N+1,k}) + \ddot{u}_{N-2,k} + \ddot{v}_{N-2,k} + 2\dot{v}'_{N,k} + v''_{N+2,k}\\
&\qquad + a^2(t)(u_{N+2,k} + v_{N+2,k}) + b_3(t,\tau)(u_{N+1,k} + v_{N+1,k})\\
&\qquad + b_2(t,\tau)(u_{N,k} + v_{N,k}) + b_1(t,\tau)(u_{N-1,k} + v_{N-1,k})\\
&\qquad\qquad + b_0(u_{N-2,k} + v_{N-2,k}) = 0, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{25}$$

Применяя к ним операцию усреднения по τ, получим равенства

$$\begin{aligned}
&\mu_k^2 u_{N,k} + \dot{\lambda}_k u_{N,k} + \dot{\mu}_k u_{N-1,k} + 2\lambda_k\dot{u}_{N,k} + 2\mu_k\dot{u}_{N-1,k} + \ddot{u}_{N-2,k}\\
&\quad + \langle b_3(t,\tau)v_{N+1,k}\rangle + \langle b_2(t,\tau)\rangle u_{N,k} + \langle b_2(t,\tau)v_{N,k}\rangle + \langle b_1(t,\tau)\rangle u_{N-1,k}\\
&\quad + \langle b_1(t,\tau)v_{N-1,k}\rangle + \langle b_0(t,\tau)\rangle u_{N-2,k} + \langle b_0(t,\tau)v_{N-2,k}\rangle = 0, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{26}$$

Эти равенства используются при определении коэффициентов u_{Nk}. Поскольку последние по предположению найдены, то здесь этими уравнениями заниматься не будем.

Разность уравнений (25) и (26) имеет вид

$$\begin{aligned}
&v''_{N+2,k} + 2\lambda_k v'_{N+2,k} + \{b_3(t,\tau)\}_\tau u_{N+1,k} = \langle b_3(t,\tau)v_{N+1,k}\rangle\\
&\quad - (2\lambda_k\mu_k + b_3(t,\tau))v_{N+1,k} - 2\mu_k v'_{N+1,k} - (\mu_k^2 + \dot{\lambda}_k + b_2(t,\tau))v_{N,k} - 2\lambda_k\dot{v}_{N,k}\\
&\quad + \langle b_2(t,\tau)v_{N,k}\rangle + \langle b_1(t,\tau)v_{N-1,k}\rangle - \dot{\mu}_k v_{N-1,k} - \ddot{v}_{N-2,k} - b_0(t,\tau)v_{N-2,k}\\
&\qquad + \langle b_0(t,\tau)v_{N-2,k}\rangle - \{b_2(t,\tau)\}_\tau u_{N,k} - \{b_1(t,\tau)\}_\tau u_{N-1,k}\\
&\qquad\qquad - \{b_0(t,\tau)\}_\tau u_{N-2,k} \equiv \psi_{n+2,k}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{27}$$

Произведя в задачах (27) замену

$$v'_{N+2,k} = w_{N+2,k}, \tag{28}$$

преобразуем их к задачам типа $(B_\pm)$ и найдем согласно лемме 2

$$\begin{aligned}
w_{N+2,k}(t,\tau) &= \int\limits_0^\tau [\{b_3(t,s)\}_\tau u_{N+1,k} - \psi_{N+2,k}] e^{2\lambda_k(t)(s-\tau)}\,ds \\
&\quad + (1-e^{-4\lambda_k(t)\pi})^{-1} \int\limits_0^\tau [\{b_3(t,s)\}_\tau u_{N+1,k} - \psi_{N+2,k}] e^{2\lambda_k(t)(s-2\pi-\tau)}\,ds \\
&\equiv \alpha_k(t,\tau) u_{N+1,k}(t) + \gamma_{N+2,k}(t,\tau), \qquad (29)
\end{aligned}$$

где $\gamma_{N+2,k}$ — известные функции с нулевым средним по τ. Подставив выражения (29) в равенства (28), придем к задачам типа (A), которые согласно лемме 1 однозначно разрешимы и решения которых суть

$$\begin{aligned}
v_{N+2,k} &= \left\{ \int\limits_0^\tau (\alpha_k(t,s) u_{N+1,k}(t) + \gamma_{N+2,k}(t,s))\,ds \right\}_\tau \\
&\equiv \xi_k(t,\tau) u_{N+1,k}(t) + \eta_{N+2,k}(t,\tau), \quad k=1,2, \qquad (30)
\end{aligned}$$

где ξ_k и $\eta_{N+2,k}$ — известные функции с нулевым средним по τ.

Следующая пара уравнений $(m = N-1)$ рассматриваемой нами последовательности имеет вид

$$\begin{aligned}
&\lambda_k^2(t)(u_{N+3,k}+v_{N+3,k}) + 2\lambda_k\mu_k(u_{N+2,k}+v_{N+2,k}) + \mu_k^2(u_{N+1,k}+v_{N+1,k}) \\
&\quad + \dot\lambda_k(u_{N+1,k}+v_{N+1,k}) + \dot\mu_k(u_{N,k}+v_{N,k}) + 2\lambda_k(\dot u_{N+1,k}+\dot v_{N+1,k}+v'_{N+3,k}) \\
&\quad + 2\mu_k(\dot u_{N,k}+\dot v_{N,k}+v'_{N+2,k}) + \ddot u_{N-1,k} + \ddot v_{N-1,k} + 2\dot v'_{N+1,k} + v''_{N+3,k} \\
&+ a_2(t)(u_{N+3,k}+v_{N+3,k}) + b_3(t,\tau)(u_{N+2,k}+v_{N+2,k}) + b_2(t,\tau)(u_{N+1,k}+v_{N+1,k}) \\
&\quad + b_1(t,\tau)(u_{N,k}+v_{N,k}) + b_0(u_{N-1,k}+v_{N-1,k}) = 0, \quad k=1,2. \qquad (31)
\end{aligned}$$

Применяя к уравнениям (31) операцию усреднения, получим соотношение

$$\begin{aligned}
&2\lambda_k\dot u_{N+1,k} + \big(\mu_k^2 + \dot\lambda_k + \langle b_2(t,\tau)\rangle\big)u_{N+1,k} + \langle b_3(t,\tau)v_{N+2,k}\rangle \\
&\quad = -(\dot\mu_k u_{N,k} + 2\mu_k\dot u_{N,k} + \ddot u_{N-1,k} + \langle b_2(t,\tau)v_{N+1,k}\rangle + \langle b_1(t,\tau)v_{N,k}\rangle \\
&\qquad + \langle b_0(t,\tau)v_{N-1,k}\rangle + \langle b_1(t,\tau)\rangle u_{N,k} + \langle b_0(t,\tau)\rangle u_{N-1,k}).
\end{aligned}$$

Отсюда в силу (30)

$$\begin{aligned}
&2\lambda_k\dot u_{N+1,k} + (\mu_k^2 + \dot\lambda_k + \langle b_2(t,\tau)\rangle + \langle b_3(t,\tau)\xi_k(t,\tau)\rangle)u_{N+1,k} \\
&= -\langle b_3(t,\tau)\eta_{N+1,k}\rangle - \dot\mu_k u_{N,k} - 2\mu_k\dot u_{N,k} - \ddot u_{N-1,k} - \langle b_2(t,\tau)v_{N+1,k}\rangle - \langle b_1(t,\tau)v_{N,k}\rangle \\
&\quad - \langle b_0(t,\tau)v_{N-1,k}\rangle - \langle b_1(t,\tau)\rangle u_{N,k} - \langle b_0(t,\tau)\rangle u_{N-1,k}, \quad k=1,2. \qquad (32)
\end{aligned}$$

Полагая $t=0$ в уравнениях (3) и (10), придем к системе

$$\begin{aligned}
u_{N+1,1}(0) + u_{N+1,2}(0) &= \nu_{N+1}, \\
\lambda_1(0)u_{N+1,1}(0) + \lambda_2(0)u_{N+1,2}(0) &= \sigma_{N+1},
\end{aligned} \qquad (33)$$

где

$$\begin{aligned}
\nu_{N+1} &= -v_{N+1,1}(0,0) - v_{N+1,2}(0,0), \\
\sigma_{N+1} &= -\lambda_1(0)v_{N+1,1}(0,0) - \lambda_2(0)v_{N+1,2}(0,0) \\
&\quad - \mu_1(0)u_{N,1}(0) - -\mu_2(0)u_{N,2}(0) - \mu_1(0)v_{N,1}(0,0) \\
&\quad - \mu_2(0)v_{N,2}(0,0) - v'_{N+1,1}(0,0) - v'_{N+1,2}(0,0).
\end{aligned} \qquad (34)$$

Отсюда видно, что числа ν_{N+1} и σ_{N+1} вещественны и

$$\bar{u}_{N+1,2}(0) = u_{N+1,1}(0). \tag{35}$$

Задачи для уравнений (32) с начальными условиями $u_{N+1,k}(t)|_{t=0} = u_{N+1,k}(0)$ являются задачами типа $(C_\pm)$. Определив из них функции $u_{N+1,k}(t)$, $k = 1,2$, найдем по формулам (31) функции $v_{N+2,k}(t,\tau)$, $k = 1,2$. Из предыдущих рассуждений легко следуют соотношения

$$\bar{u}_{N+1,2}(t) = u_{N+1,1}(t), \quad \bar{v}_{N+2,2}(t,\tau) = v_{N+2,1}(t,\tau).$$

Первая часть теоремы доказана.

3. Задачу (1), (2) перепишем в виде

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \omega y, \\ &\dot{y} = [-\omega a^2(t) - \omega^{\frac{1}{2}} b_3(t,\tau) - b_2(t,\tau) - \omega^{-\frac{1}{2}} b_1(t,\tau) - \omega^{-1} b_0(t,\tau)]x, \\ &x(0) = x_0, y(0) = x_1 \end{aligned} \tag{36}$$

или

$$\begin{aligned} &\dot{u} = [\omega A_1(t) + \omega^{\frac{1}{2}} A_2(t,\tau) + A_3(t,\tau) + \omega^{-\frac{1}{2}} A_4(t,\tau) + \omega^{-1} A_5(t,\tau)]u, \\ &u(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{37}$$

где

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(t) & 0 \end{pmatrix}, \ A_2(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_3(t,\tau) & 0 \end{pmatrix}, \ A_3(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_2(t,\tau) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_1(t,\tau) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_0(t,\tau) & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

С целью уничтожения в задаче (37) слагаемого $\{A_2(t,\tau)\}_\tau$, $\tau = \omega t$, произведем в ней замену переменных

$$u = v + \omega^{-\frac{1}{2}} C(t,\omega t)v, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где $C(t,\tau)$ — неизвестная 2π-периодическая по τ матрица второго порядка. Получим

$$\begin{aligned} \dot{v} = (\omega A_1 + \omega^{\frac{1}{2}} \langle A_2 \rangle)v + \omega^{\frac{1}{2}}(A_1 C - C A_1 - C' + \{A_2\}_\tau)v \\ + (A_3 + A_2 C + C^2 A_1 - C(A_1 C + A_2 - C'))v + \omega^{-\frac{1}{2}} B_1(t,\omega t,\omega)v. \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь $B_1(t,\tau,\omega)$ зависит от $C(t,\tau)$, причем для любой 2π-периодической по τ и равномерно ограниченной на множестве Π матрицы-функции $C(t,\tau)$

$$B_1(t,\tau,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} B_k(t,\tau), \quad \omega \gg 1,$$

— равномерно сходящийся на множестве Π ряд, коэффициенты $B_k(t,\tau)$ которого непрерывны и 2π-периодичны по τ. Приравняем к нулю матрицу, заключенную во вторые скобки равенства (39):

$$C' - A_1(t)C + CA_1(t) - \{A_2(t,\tau)\}_\tau = 0. \tag{40}$$

Переходя от матричного уравнения (40) к системе соответствующих поэлементных равенств, получим
$$\xi' = A(t)\xi + f(t,\tau), \tag{41}$$
где
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a^2(t) & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -a^2(t) & 0 & 0 & a^2(t) \\ 0 & -a^2(t) & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Поскольку характеристические числа матрицы A имеют вид $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm 2a(t)i$, то уравнение (41), а значит, и (40) имеют единственное 2π-периодическое по τ решение. Покажем это. Поскольку элементами матрицы $A_2(t,\tau)$ являются 2π-периодические по τ функции, имеющие на множестве Π непрерывные производные по τ, имеет место представление
$$f(t) = \sum_{k\neq 0} \alpha_k(t) e^{ik\tau},$$
где равномерно относительно $t \in [0,T]$ справедлива формула $|\alpha_k(t)| = O\big(\frac{1}{k}\big)$, $k \to \infty$. Решение ξ уравнения (41) будем искать в виде
$$\xi = \sum_{k\neq 0} \beta_k(t) e^{ik\tau}. \tag{42}$$
Подставляя последнее в (41), получим
$$(ikE - A(t))\beta_k = \alpha_k.$$
Согласно теореме Крамера эта система имеет единственное решение, если
$$|ikE - A(t)| \neq 0, \quad k \in Z,\ k \neq 0,$$
т. е. при условии $2a(t)i \neq \pm ik$. Последнее выполнено в силу наложенных на $a(t)$ ограничений. При этом
$$\beta_k(t) = (ikE - A)^{-1}\alpha_k.$$
Поскольку
$$|\beta_k| = |(ik - A)^{-1}\alpha_k| = \left| \frac{1}{ik}\left(E - \frac{A}{ik}\right)^{-1} \alpha_k \right| = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \to \infty,$$
ряд $\sum\limits_{k\neq 0} \beta_k(t) e^{ik\tau}$, фигурирующий в представлении (42), равномерно и абсолютно сходится.

Таким образом, существует искомая матрица $C(t,\tau)$, при которой задача (37) в результате замены (38) примет вид
$$\begin{aligned} \dot v_1 &= \omega v_2 + d_1(t,\omega t,\omega)v_1 + d_2(t,\omega t,\omega)v_2, \\ \dot v_2 &= -\omega(a^2 + \omega^{-\frac{1}{2}}\langle b_3\rangle)v_1 + d_3(t,\omega t,\omega)v_1 + d_4(t,\omega t,\omega)v_2, \\ v_1(0) &= v_{1\omega}, \quad v_2(0) = v_{2\omega}. \end{aligned} \tag{43}$$
Здесь $d_k(t,\tau,\omega), \omega \gg 1$, — непрерывные на множестве Π и равномерно ограниченные относительно ω функции, представленные сходящимися асимптотическими рядами:
$$d_k(t,\tau,\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} d_{kj}(t,\tau), \quad k = 1,2,3,4, \tag{44}$$

где $d_{kj}(t,\tau)$ — непрерывные по (t,τ) функции, 2π-периодические по τ.

Выразим из первого уравнения системы (43) v_2:

$$v_2(t) = \omega^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{2}}e_{1j}(t,\omega t)\dot v_1 + \omega^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{2}}e_{2j}(t,\omega t)v_1$$
$$\equiv \omega^{-1}(e_1(t,\tau,\omega)\dot v_1 + e_2(t,\tau,\omega)v_1), \tag{45}$$

а затем продифференцируем это же уравнение по t и в полученное равенство подставим выражение функции v_2 из (45) и выражение ее производной $\dot v_2$ из (43), в котором v_2 опять же представлена рядом (45). Получим дифференциальное уравнение второго порядка для v_1. Начальные условия для него найдем из (43). В результате от задачи (43) придем к задаче

$$\begin{gathered}\ddot v_1 + \omega^2(a^2+\omega^{-\frac12}\langle b_3\rangle)v_1 + g_1(t,\omega t,\omega)\dot v_1 + \omega g_2(t,\omega t,\omega)v_1 = 0,\\ v_1(0) = w_1(\omega), \quad \dot v_1(0) = \omega w_2(\omega).\end{gathered} \tag{46}$$

Здесь $g_i(t,\tau,\omega)$, $k=1,2,$ — функции того же типа, что и $d_k(t,\tau,\omega)$, $w_1(\omega) = v_1(\omega)$, а $w_2(\omega)$ — функция того же типа, что и $w_1(\omega)$.

Задачу (46) с помощью замены переменных

$$v_1(t) = e^{\frac12\int\limits_0^t g_1(s,\omega s,\omega)\,ds}z(t) \tag{47}$$

приведем к виду

$$\ddot z + \omega^2(a^2+\omega^{-\frac12}\langle b_3\rangle)z + \omega h(t,\omega t,\omega)z = 0, \quad z(0) = w_{1\omega}, \quad \dot z(0) = \omega w_{3\omega}. \tag{48}$$

Здесь

$$h(t,\tau,\omega) = g_2(t,\tau,\omega) + \frac12\frac{\partial g_1(t,\omega t,\omega)}{\partial t} + \frac{\omega}{2}\frac{\partial g_1(t,\omega t,\omega)}{\partial \tau}.$$

Асимптотическое разложение решения задачи (48) может быть построено в виде

$$z(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t(\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))\,ds}\left(y_{0k}(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{2}}(y_{jk}(t)+w_{jk}(t,\tau))\right), \ \langle w_{jk}(t,\tau)\rangle = 0 \tag{49}$$

совершенно аналогично тому, как была построена асимптотика (3) решения $x(t)$ задачи (1), (2). При этом частичные суммы

$$z^n(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t(\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))\,ds}\left(y_{0k}(t)+\sum_{j=1}^{n}\omega^{-\frac{j}{2}}(y_{jk}(t)+w_{jk}(t,\tau))\right) \tag{50}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\ddot z^n + \omega^2(a^2+\omega^{-\frac12}\langle b_3\rangle)z^n + \omega h(t,\omega t,\omega)z^n = \epsilon_n(t,\omega t,\omega), \tag{51}$$

$$z^n(0) = w_1^n(\omega), \dot z^n(0) = \omega w_3^n(\omega), \tag{52}$$

где

$$\sup_{(t,\tau)\in\Pi}|\epsilon_n(t,\tau,\omega)| = O(\omega^{-\frac{n-3}{2}}), \tag{53}$$

$$\left|w_k^n(\omega) - w_k(\omega)\right| = O(\omega^{-\frac{n+1}{2}}), \quad k=1,2. \tag{54}$$

4. В этом заключительном пункте доказательства теоремы завершим вывод оценок (8). Сам пункт разбит на две части: в первой доказана лемма 3, в которой установлены оценки типа оценок (8) для задачи (48), во второй части показано, что оценки (8) являются следствием леммы 3.

Лемма 3. *Для любого целого неотрицательного числа n найдутся такие положительные числа C_n и ω_n, что при всех $\omega > \omega_n$ и $t \in [0,T]$ справедливы оценки*

$$\left|z_\omega(t) - z_\omega^n(t)\right| \le C_n\omega^{-\frac{n+1}{2}}, \quad |\dot z_\omega(t) - \dot z^n(t)| \le C_n\omega^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{55}$$

Здесь z_ω — решение задачи (48), *а z^n — его n-е приближение* (50).

Доказательство леммы 3. Введем обозначение $p^n = z_\omega - z^n$. Отметим, что оценки (55) будут доказаны, если для любого целого неотрицательного числа n найдутся натуральное $N \ge n$ и положительные числа $\widehat{C}_N$ и $\widehat{\omega}_N$ такие, что при всех $\omega > \widehat{C}_N$ и $t \in [0,T]$ справедливы оценки

$$|p^N| \le \widehat{C}_N\omega^{-\frac{n+1}{2}}, \quad |\dot p^N| \le \widehat{C}_N\omega^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{56}$$

Действительно, из первого неравенства (56), равенства (17) и неравенства треугольника следуют соотношения

$$|p^n(t)| \le |z_\omega(t) - z^N(t)| + |z^N(t) - z^n(t)| \le \widehat{C}_N\omega^{-\frac{n+1}{2}}$$
$$+ \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=n+1}^{N}\omega^{-\frac{j}{2}}(|y_{jk}(t)| + |w_{jk}(t,\omega t)|) \le (\widehat{C}_N + d_N)\omega^{-\frac{n+1}{2}} \equiv C_n\omega^{-\frac{n+1}{2}},$$

где $d_N = \mathrm{const} > 0$. Аналогичным образом из второго неравенства (56) вытекает вторая оценка (55).

Для доказательства неравенств (56) из первого равенства (48) вычтем равенство (51), а из остальных равенств (48) — соответствующие равенства (52). Придем к задаче

$$\ddot p + \omega^2(a(t) + \omega^{-\frac{1}{2}}\langle b_3(t,\tau)\rangle)p + \omega h(t,\omega t,\omega)p = -\epsilon_N(t,\omega t,\omega), \tag{57}$$
$$p(0) = \omega^{-\frac{N+1}{2}}p_{1\omega}, \dot p(0) = \omega^{-\frac{N-1}{2}}p_{2\omega}, \tag{58}$$

где в силу (54)

$$|p_{1\omega}| = O(1), \quad |p_{2\omega}| = O(1), \quad \omega \to \infty. \tag{59}$$

Умножим уравнение (57) на $\dot p(t)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до t. В результате получим

$$\frac{1}{2}\dot p^2(t) + \frac{1}{2}\omega^2(a^2(t) + \omega^{-\frac{1}{2}}\langle b_3(t,\tau)\rangle)p^2(t) + \frac{1}{2}\omega h(t,\tau,\omega)p^2(t)$$
$$= -\int_0^t \epsilon_N(s,\omega s,\omega)\dot p(s)\,ds + \omega^2\int_0^t a(s)\dot a(s)p^2(s)\,ds$$
$$+ \frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\int_0^t\langle\dot b_3(s,\omega s)\rangle p^2(s)\,ds + \frac{1}{2}\omega\int_0^t(\dot h(s,\omega s,\omega) + \omega h'(s,\omega s,\omega))p^2(s)\,ds$$
$$+ \frac{1}{2}[\dot p^2(0) + (\omega^2a^2(0) + \omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(0,0)\rangle + \omega h(0,0,0))p^2(0)].$$

В силу (58) и (59) последнее равенство можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\dot p^2(t) + \frac{1}{2}\omega^2a^2(t)p^2(t) + \frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(t,\tau)\rangle p^2(t) + \frac{1}{2}\omega h(t,\tau,\omega)p^2(t)$$
$$= -\int_0^t \epsilon_N(t,\omega s,\omega)\dot p(s)\,ds + \omega^2\int_0^t a(s)\dot a(s)p^2(s)\,ds + \frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\int_0^t\langle\dot b_3(s,\omega s)\rangle p^2(s)\,ds$$
$$+ \frac{1}{2}\omega\int_0^t(\dot h(s,\omega s,\omega) + \omega h'(s,\omega s,\omega))p^2(s)\,ds + \epsilon_{N_1}, \tag{60}$$

где
$$\max_{(t,\tau)\in\Pi}|\epsilon_{N_1}(t,\tau,\omega)| = O(\omega^{-N+1}), \quad \omega\to\infty. \tag{61}$$

Так как $\dot p^2(t)\geq 0$, из равенства (60) следует неравенство

$$\frac{1}{2}(\omega^2 a^2(t)+\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(t,\tau)\rangle+\omega h(t,\tau,\omega))p^2(t)$$
$$\leq -\int\limits_0^t \epsilon_N(t,\omega s,\omega)\dot p(s)\,ds+\omega^2\int\limits_0^t a(s)\dot a(s)p^2(s)\,ds$$
$$+\frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^t\langle\dot b_3(s,\omega s)\rangle p^2(s)\,ds+\frac{1}{2}\omega\int\limits_0^t(\dot h(s,\omega s,\omega)+\omega h'(s,\omega s,\omega))p^2(s)\,ds+\epsilon_{N_1}.$$

Применяя к первому интегралу метод интегрирования по частям, придем к соотношению

$$\frac{1}{2}(\omega^2 a^2(t)+\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(t,\tau)\rangle+\omega h(t,\tau,\omega))p^2(t)\leq-\epsilon_N(t,\omega s,\omega)p(t)+\epsilon_N(0,0,0)p(0)$$
$$+\int\limits_0^t(\dot\epsilon_N(s,\omega s,\omega)-\omega\epsilon_N'(s,\omega s,\omega))p(s)\,ds+\int\limits_0^t p^2(s)(\omega^2 a(s)\dot a(s)$$
$$+\frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\langle\dot b_3(s,\omega s)\rangle+\frac{1}{2}\omega(\dot h(s,\omega s,\omega)+\omega h'(s,\omega s,\omega)))\,ds+\epsilon_{N_1}.$$

Отсюда в силу неравенства
$$|ab|\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} \tag{62}$$
следует соотношение

$$(\omega^2 a^2(t)+\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(t,\tau)\rangle+\omega h(t,\tau,\omega)-1)p^2(t)$$
$$\leq\int\limits_0^t p^2(s)(2\omega^2 a(s)\dot a(s)+\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(s,\omega s)\rangle+\omega(\dot h(s,\omega s,\omega)+\omega h'(s,\omega s,\omega))+1)\,ds+\epsilon_{N_2}, \tag{63}$$

где $\max\limits_{(t,\tau)\in\Pi}|\epsilon_{N_2}(t,\tau,\omega)|=(\omega^{-N+6})$, $\omega\to\infty$. При достаточно больших ω

$$\alpha_\omega=\omega^2a^2(t)+\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(t,\tau)\rangle+\omega h(t,\tau,\omega)>1. \tag{64}$$

Разделив (63) на α_ω, получим

$$p^2(t)\leq M\int\limits_0^t p^2(s)\,ds+\frac{\epsilon_{N_2}}{\alpha_\omega}.$$

Из леммы Гроноулла теперь следует оценка

$$p^2(t)\leq\frac{\epsilon_{N_2}}{\alpha_\omega}e^{Mt}, \tag{65}$$

так что
$$|p(t)|\leq\sqrt{\frac{\epsilon_{N_2}}{\alpha_\omega}e^{Mt}},$$

а

$$\sup_{t\in[0,T]} |p(t)| = O(\omega^{-\frac{N-4}{2}}), \quad \omega \to \infty.$$

Положив в последней формуле $N = n + 5$, получим неравенство

$$\sup_{t\in[0,T]} |p(t)| \le \widehat{C}_n \omega^{-\frac{n+1}{2}}, \quad \widehat{C}_n = \mathrm{const}\,.$$

Из равенства (60) в силу (64) следует неравенство

$$\dot p^2(t) \le -2\int\limits_0^t \epsilon_N(s,\tau,\omega)\dot p(s)\,ds + 2\int\limits_0^t p^2(s)\Big(\omega^2 a(s)\dot a(s) + \frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(s,\tau)\rangle + \frac{1}{2}\omega(\dot h(s,\tau,\omega) + \omega h'(s,\tau,\omega))\Big)\,ds + \epsilon_{N_1}(t,\tau,\omega).$$

Воспользовавшись снова формулой (62), получим

$$\dot p^2(t) \le \int\limits_0^t \epsilon_N^2(s,\omega s,\omega)(s)\,ds + \int\limits_0^t \dot p^2(s)\,ds + 2\int\limits_0^t p^2(s)\Big(\omega^2 a(s)\dot a(s) + \frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(s,\omega s)\rangle + \frac{1}{2}\omega(\dot h(s,\omega s,\omega) + \omega h'(s,\omega s,\omega))\Big)\,ds + \epsilon_{N_1}(t,\tau,\omega).$$

В силу (65) отсюда следует оценка

$$\dot p^2(t) \le \int\limits_0^t \dot p^2(s)\,ds + \epsilon_{N_3}(t,\tau,\omega),$$

где $\max\limits_{(t,\tau)\in\Pi} |\epsilon_{N_3}| = O(\omega^{-N+6})$, $\omega \to \infty$. Поэтому в силу леммы Гронуолла имеет место неравенство

$$|\dot p(t)| \le \sqrt{\epsilon_{N_3} e^t},$$

так что

$$\sup_{t\in[0,T]} |\dot p(t)| = O(\omega^{-\frac{N-6}{2}}), \quad \omega \to \infty. \tag{66}$$

Из (66) при $N = n + 5$ находим

$$\sup_{t\in[0,T]} |\dot p(t)| \le C_n(\omega^{-\frac{n-1}{2}}).$$

Итак, оценки(56), а с ними и лемма 3 доказаны.

Покажем теперь, что оценки (7) вытекают из леммы 3. Для этого прежде всего отметим, что из предыдущего пункта доказательства теоремы вытекает следующее соотношение между решением x задачи (1), (2) и решением z задачи (48):

$$\begin{pmatrix} x \\ \omega^{-1}\dot x \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{2}\int\limits_0^t g_1(s,\omega s,\omega)\,ds}(E + \omega^{-\frac{1}{2}}C(t,\omega t))(\omega^{-1}e_1(t,\omega t,\omega)\dot z + \omega^{-1}((1/2)g_1(t,\omega t,\omega)e_1(t,\omega t,\omega) + e_2(t,\omega t,\omega))z). \tag{67}$$

Ясно, что, подставив в (67) вместо z его асимптотическое разложение (49), получим формальное асимптотическое разложение решения x задачи (1), (2) и его производной. Так же, как в начале доказательства леммы 3, устанавливается, что оценки (7) будут доказаны, если они будут установлены при замене x^n и $\dot{x}^n$ функциями x^{m_1} и $\dot{x}^{m_2}$ при каких-либо $m_1, m_2 \geq n$.

Возьмем достаточно большое M и заменим в правой части (67) асимптотические разложения функций g_1, e_1, e_2, z их M-ми частичными суммами g_1^M, e_1^M, e_2^M, z^M. Тогда в левой части (67) мы с точностью до слагаемых порядка $O(\omega^{-\frac{n+1}{2}})$ получим $\begin{pmatrix} x^{m_1} \\ \omega^{-1}\dot{x}^{m_2} \end{pmatrix}$, где m_1 и m_2 — достаточно большие натуральные числа. Оценки (7) теперь следуют из сказанного выше, соотношения

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ \omega^{-1}\dot{x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^{m_1} \\ \omega^{-1}\dot{x}^{m_2} \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{2}\int\limits_0^t g_1(s,\omega s,\omega)\,ds} &(E + \omega^{-\frac{1}{2}}C(t,\omega t))(\omega^{-1}e_1(t,\omega t,\omega)\dot{z} \\ + \omega^{-1}((1/2)g_1(t,\omega t,\omega)e_1(t,\omega t,\omega) &+ e_2(t,\omega t))z) \\ - e^{\frac{1}{2}\int\limits_0^t g_1^M(s,\omega s,\omega)\,ds} &(E + \omega^{-\frac{1}{2}}C(t,\omega t))(\omega^{-1}e_i^M(t,\omega t)\dot{z}^M \\ + \omega^{-1}((1/2)g_1^M(t,\omega t,\omega)e_1^M(t,\omega t,\omega) &+ e_2^M(t,\omega t,\omega))z^M) + O(\omega^{-\frac{n+1}{2}}),\end{aligned}$$

леммы 3 и вытекающих из нее оценок

$$|z(t)| \leq C, \quad |\dot{z}(t)| \leq C\omega, t \in [0,T], \quad C = \text{const}\,.$$

5. В этом пункте приведем три дополнения к полученным выше результатам.

Замечание 2. Уравнение вида

$$\ddot{x}(t) + \omega a_0(t)\dot{x}(t) + (\omega^2 a^2(t) + \omega^{\frac{3}{2}}b_3(t,\omega t) + \omega b_2(t,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}}b_1(t,\omega t) + b_0(t,\omega t))x(t) = 0$$

можно свести к уравнению вида (1) с помощью замены

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}\omega\int\limits_0^t a_0(s)\,ds} z(t)$$

при условии, что $a^2(t) - \frac{1}{4}a_0^2(t) > 0$ для любого $t \in [0,T]$.

Замечание 3. Рассмотрим задачу Коши для уравнения вида

$$\ddot{x}(t) + \omega^{2p-1}(\omega a_0^2(t) + a_1(t,\omega t))x(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \omega^p x_1, \tag{68}$$

где $p \neq 1$, $p \in N$, $\omega \gg 1$, $a_0(t)$ и $a_1(t,\tau)$ — заданные на множествах $t \in [0,T]$ и $(t,\tau) \in \Pi$ соответственно вещественные непрерывные функции, обладающие непрерывными производными по t любого порядка, причем a_1 — 2π-периодическая по τ функция, $a_0(t) \neq 0$ для любого $t \in [0,T]$, x_0, x_1 — некоторые заданные вещественные числа.

Действуя в соответствии с алгоритмом, описанным в п. 2, можно построить приближение x^n вида

$$x^n(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t (\omega^p \mu_{0k}(s) + \sum\limits_{j=1}^{p-1}\omega^{p-j}\mu_{jk}(s,\omega s))\,ds} \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{n}\omega^{-j}(u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t))\right)$$

и, следуя п. 4, доказать оценку

$$\sup_{t\in[0,T]}|x(t) - x^n(t)| + \sup_{t\in[0,T]}|\dot{x}(t) - \dot{x}^n(t)| \leq C_n\omega^{-n+p-1},$$

где C_n — не зависящая от ω постоянная.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 2. С. 169–172.
2. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. I // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 6. С. 761–770.
3. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. II // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1084–1091.
4. *Левенштам В. Б., Хатламаджиян Г. Л.* Распространение теории усреднения на дифференциальные уравнения, содержащие быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами // Изв. вузов. Математика. 2006. № 6. С. 35–47.
5. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981.
6. *Далецкий Ю. Л.* Асимптотические методы для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 5. С. 1027–1029.
7. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
8. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
9. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

Статья поступила 17 января 2008 г.

Левенштам Валерий Борисович, Крутенко Елена Владимировна
Южный федеральный университет,
факультет математики, механики и компьютерных наук,
ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону 344090
vleven@math.rsu.ru, vvanele@mail.ru