Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 511.43

СПЕКТР ОДНОМЕРНЫХ КВАЗИРЕШЕТОК

В. В. Красильщиков

Аннотация. Рассмотрены одномерные квазирешетки, которые определяются на основе подхода, использующего иррациональные повороты окружности. Получено описание спектра одномерных квазирешеток.

Ключевые слова: одномерная квазирешетка, иррациональный поворот окружности, спектр.

1. Равномерное распределение последовательности по переменному модулю

Приведем основные определения и теоремы, необходимые в дальнейшем. Пусть $E = [a,b) \subseteq [0,1)$. Положим $E_h = \left[\frac{a}{h}, \frac{b}{h}\right)$, если $h > 0$. Очевидно, что $|E_h| = \frac{|E|}{h}$. Обозначим целую часть по модулю h через $[x]_h = h\left[\frac{x}{h}\right]$. Определим символ $\langle x\rangle_h$ как единственное число y, удовлетворяющее двум условиям: 1) $0 \leq y < h$, 2) $y \equiv x (\operatorname{mod} h)$. Другими словами, $\langle x\rangle_h = x - [x]_h$. Введем функцию

$$N_h(E_h, n, \{x_n\}) = \sharp\{0 \leq i < n : \langle x_i\rangle_h \in E_h\}.$$

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ *равномерно распределена по модулю* h (сокращенно р.р.м. h), если для любой пары действительных чисел a и b, для которых выполняются неравенства $0 \leq a < b \leq h$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_h([a,b), n, \{x_n\})}{n} = \frac{b-a}{h} = \frac{|E|}{h}.$$

Предложение 1. *Последовательность $\{x_n\}$ р.р.м. h тогда и только тогда, когда последовательность $\left\{\frac{x_n}{h}\right\}$ р.р.м. 1.*

Доказательство следует из определений.

Исследование последовательностей, равномерно распределенных по модулю 1, начал Герман Вейль, например, в работе [1]. Им было сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие равномерной распределенности числовой последовательности по модулю 1 — критерий Вейля. Н. М. Коробовым [2], А. А. Карацубой, Г. И. Архиповым и В. Н. Чубариковым [3–5], а также в книгах [6, 7] получены многочисленные общие результаты о распределении последовательностей по модулю 1.

В работе [6] дано описание равномерного распределения числовой последовательности по модулю 1. На основе предложения 1 эти результаты можно применить к р.р.м. h последовательности $\{x_n\}$. Тогда получим следующие утверждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00326).

Теорема 1 (критерий Вейля). *Последовательность действительных чисел* $\{x_n\}$, *где* $n = 0, 1, 2, \dots$, *р.р.м.* h *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \exp\left(2\pi i l \frac{x_j}{h}\right) = 0 \tag{1}$$

для всех целых $l \neq 0$.

Теорема 2. *Пусть* δ — *положительная постоянная, а* $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ — *последовательность действительных чисел таких, что* $|a_m - a_n| \geq \delta$ *при* $m \neq n$. *Тогда последовательность* $\{a_n x\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ *р.р.м.* h *для почти всех действительных* x.

2. Спектр

Существует несколько способов построения квазирешеток [8–10], в том числе разработанные де Брейном [11]. Эти подходы основаны на сечении периодических разбиений n-мерного пространства плоскостями меньшей размерности — метод проекции (cut and project method) [12]. Квазирешетки можно также определить с помощью последовательностей Штурма. Данные конструкции эквивалентны рассмотренной в работе [13]. Определим последовательность $\{x_n\}$ (квазирешетку) по правилу: 1) $x_{-1} = 0$, 2) переход от x_n к x_{n+1} осуществляется по формуле

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + l_1, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [0; 1-\alpha), \\ x_n + l_2, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [1-\alpha; 1), \end{cases}$$

где $\langle \cdot \rangle$ — дробная доля, α — некоторая иррациональность, l_1 и l_2 — произвольные действительные числа.

Рассмотрим квазирешетку $\{x_n\}$ по модулю h следующего вида:

$$h = \frac{l_1(1-\alpha) + l_2\alpha}{(l-k)\alpha + k}, \tag{2}$$

где l и k — произвольные целые числа, удовлетворяющие условию $k^2 + l^2 \neq 0$. Определим последовательность $\{y_n\}$ следующими равенствами:

$$y_{-1} = 0, \quad y_{n+1} = \begin{cases} \langle y_n + l_1 \rangle_h, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [0; 1-\alpha), \\ \langle y_n + l_2 \rangle_h, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [1-\alpha; 1). \end{cases}$$

Отметим, что $y_n = \langle x_n \rangle_h$.

Рассмотрим множество $Y(h)$ такое, что $Y(h) = \overline{\{y_n\}}$, где черта обозначает замыкание множества. Очевидно, что $Y(h) \subseteq [0; h]$.

Определим множество Spec, полагая, что $h \in \mathrm{Spec}$, если выполняется условие $Y(h) \neq [0; h]$.

Предложение 2. *Если* $h \in \mathrm{Spec}$, *то и* $mh \in \mathrm{Spec}$, *где* m — *любое целое число, отличное от нуля.*

Доказательство. Пусть $h \in \mathrm{Spec}$. Рассмотрим число $h_1 = mh$ такое, что НОД$(m, k, l) = 1$. Пусть

$$\widehat{Y}(h_1) = \bigcup_{i=0}^{m-1} (i + Y(h))$$

— объединение m копий множества $Y(h)$. Пусть существует точка x последовательности $\{x_n\}$ такая, что $x \notin Y(h_1)$. Тогда $x(\operatorname{mod} h) \notin Y(h)$, что невозможно, так как $h \in \mathrm{Spec}$. Следовательно, предположение неверно, и точка x последовательности $\{x_n\}$ обязательно попадает в $Y(h_1)$, причем $Y(h_1) \subseteq \widehat{Y}(h_1)$. Так как $Y(h_1) \neq [0; h_1]$, по определению $h_1 \in \mathrm{Spec}$. Предложение 2 доказано.

Определим множество Spec^*, полагая, что $h \in \mathrm{Spec}^*$, если последовательность $\{x_n\}$ не является р.р.м. h.

Очевидно, что $\mathrm{Spec} \subseteq \mathrm{Spec}^*$.

Предложение 3. *Для почти всех действительных h последовательность $\{x_n\}$ р.р.м. h.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 2. Положим $\{a_n\} = \left\{\frac{x_n}{h}\right\}$. По определению последовательности $\{x_n\}$ получим, что $|x_{n+1} - x_n| \geq \min(l_1, l_2)$. Тогда $\left|\frac{x_m - x_n}{h}\right| \geq \frac{\min(l_1,l_2)}{h}$ при $m \neq n$. Из теоремы 2 следует, что последовательность $\left\{\frac{x_n}{h}x\right\}$ р.р.м. h для почти всех действительных x. Если положить $x = h$, то получим требуемое.

Следствие 1. *Почти все действительные h не принадлежат* Spec^*.

В. Г. Журавлевым в работе [14] изучен дифракционный спектр четно-фибоначчиевых чисел. Рассмотрим дифракционный спектр более широкого класса последовательностей.

Дифракционным спектром последовательности $\{x_n\}$ (DiffSpec) будем называть максимальное подмножество X из множества действительных чисел $\mathbb{R}$, для которого выполняется условие

$$f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \exp(2\pi i x_j \lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in X. \tag{3}$$

По критерию Вейля для р.р.м. h последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1) теоремы 1. Тогда если $h \in \mathrm{Spec}^*$, то существует целое число $m \neq 0$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \exp\left(2\pi i m \frac{x_j}{h}\right) \neq 0.$$

При этом существует действительное число $\lambda = \frac{m}{h}$, которое будет удовлетворять условию (3), т. е. $\lambda = \frac{m}{h} \in \mathrm{DiffSpec}$. Таким образом, множество Spec^* будет содержаться в множестве $\left\{\frac{m}{\lambda},\ m \in \mathbb{Z},\ \lambda \in \mathrm{DiffSpec}\right\}$.

Пусть $\lambda \in \mathrm{DiffSpec}$, тогда выполняется неравенство (3). Поэтому для $h = \frac{m}{\lambda}$ не будет выполняться условие критерия Вейля р.р.м. h:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \exp\left(2\pi i m \frac{x_j}{h}\right) \neq 0,$$

а это означает, что $h \in \mathrm{Spec}^*$. Таким образом, множество Spec^* совпадает с множеством вида $\left\{\frac{m}{\lambda}, m \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathrm{DiffSpec}\right\}$. Тем самым мы доказали следующее

Предложение 4. *Действительное число h принадлежит* Spec^* *тогда и только тогда, когда $\lambda = \frac{m}{h} \in$* DiffSpec, *где m — произвольное целое число.*

Используя предложение 4 и методы, примененные В. Г. Журавлевым в работе [14], получим описание всех действительных чисел h из множеств Spec и Spec^*.

Предложение 5. *Если* $h \in \mathrm{Spec}^*$, *то* h *можно представить в виде*
$$h = m\frac{l_1(1-\alpha)+l_2\alpha}{(l-k)\alpha+k}, \tag{4}$$
где m, l, k — *произвольные целые числа, удовлетворяющие условию* $k^2+l^2 \neq 0$.

Теорема 3. *Если* $h \in \mathrm{Spec}$, *то* h *можно представить в виде* (4).

Доказательство получается применением определений множеств Spec и Spec^* к условию предложения 5. Теорема 3 доказана.

3. Приложение функции распределения к описанию спектра

Для описания неравномерности распределения по модулю h вида (2) квазирешетки $\{x_n\}$ вводится функция распределения $\nu(\varepsilon)$, где $\varepsilon \leq h$:
$$\nu(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_h([0;\varepsilon), n, \{x_n\})}{n}.$$
В работе [15] дано следующее описание этой функции. Пусть
$$h_0 = \frac{l_1 l - l_2 k}{(l-k)\alpha+k}. \tag{5}$$

Теорема 4. *Пусть* $h_0 > 0$, *тогда*
$$\nu(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{h_0}([h_0]_h+1), & \text{если } \varepsilon \in [0;\langle h_0\rangle_h), \\ \frac{1}{h_0}(\varepsilon[h_0]_h+\langle h_0\rangle_h), & \text{если } \varepsilon \in [\langle h_0\rangle_h; h). \end{cases}$$

Теорема 5. *Пусть* $h_0 < 0$, *тогда*
$$\nu(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{|h_0|}[|h_0|]_h, & \text{если } \varepsilon \in [0; h-\langle |h_0|\rangle_h), \\ \frac{1}{|h_0|}(\varepsilon([|h_0|]_h+1)-h+\langle |h_0|\rangle_h), & \text{если } \varepsilon \in [h-\langle |h_0|\rangle_h; h). \end{cases}$$

Используя свойства функции распределения $\nu(\varepsilon)$, получим описание множеств Spec и Spec^*.

Теорема 6. *Если выполняется условие*
$$\Delta = |l_1 l - l_2 k| < l_1(1-\alpha)+l_2\alpha,$$
где l, k — *произвольные целые числа такие, что* $k^2+l^2 \neq 0$, *то при любом целом* m, *отличном от нуля, действительное число*
$$h = m\frac{l_1(1-\alpha)+l_2\alpha}{(l-k)\alpha+k}$$
принадлежит множеству Spec.

Доказательство. Пусть $m = 1$. Из описания функции распределения $\nu(\varepsilon)$ последовательности $\{x_n\}$ по модулю
$$h = \frac{l_1(1-\alpha)+l_2\alpha}{(l-k)\alpha+k},$$
данного в теоремах 4 и 5, следует, что при $h > |h_0|$, где h_0 определяется равенством (5), выполняется неравенство $Y(h) \neq [0;h]$. Условие $h > |h_0|$ эквивалентно следующему:
$$|l_1 l - l_2 k| < l_1(1-\alpha)+l_2\alpha.$$
По определению множества Spec получаем, что $h \in \mathrm{Spec}$.

Когда $m \neq 1$, из предложения 2 следует достаточность выполнения условия $h > |h_0|$. Теорема 6 доказана.

Пользуясь определением 1 равномерной распределенности последовательности по модулю h и теоремами 4 и 5, можно доказать следующее утверждение.

Предложение 6. *Если* $h \in \mathrm{Spec}^*$, *то и* $mh \in \mathrm{Spec}^*$, *где* $m \in \mathbb{Z}$.

Теорема 7. *Если выполняется условие*

$$\Delta = |l_1 l - l_2 k| \neq l_1(1-\alpha) + l_2\alpha,$$

где l, k *— произвольные целые числа такие, что* $k^2 + l^2 \neq 0$, *то при любом целом* m, *отличном от нуля, действительное число*

$$h = m\frac{l_1(1-\alpha) + l_2\alpha}{(l-k)\alpha + k}$$

принадлежит множеству Spec^*.

Доказательство. Пусть $m = 1$, тогда из теорем 4 и 5 следует, что при $h \neq |h_0|$ последовательность $\{x_n\}$ не является р.р.м. h. Условие $h \neq |h_0|$ эквивалентно следующему:

$$|l_1 l - l_2 k| \neq l_1(1-\alpha) + l_2\alpha.$$

По определению множества Spec^* получаем, что $h \in \mathrm{Spec}^*$.

Когда $m \neq 1$, из предложения 6 следует достаточность выполнения условия $h \neq |h_0|$. Теорема 7 доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В. Г. Журавлеву и канд. физ.-мат. наук А. В. Шутову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вейль Г.* О равномерном распределении чисел по модулю 1 // Вейль Г. Избранные труды. М.: Наука, 1984. С. 58–93.
2. *Коробов Н. М.* Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.
3. *Карацуба А. А.* Дробные доли специального вида функций // Изв. РАН. Сер. мат. 1995. Т. 59, № 4. С. 61–88.
4. *Карацуба А. А.* О дробных долях быстрорастущих функций // Изв. РАН. Сер. мат. 2001. Т. 65, № 4. С. 89–110.
5. *Карацуба А. А., Архипов Г. И., Чубариков В. Н.* Распределение дробных долей многочленов от нескольких переменных // Мат. заметки. 1979. Т. 25, № 1. С. 3–14.
6. *Кейперс Л., Нидеррейтер Г.* Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.
7. *Drmota M., Tichy R. F.* Sequences, discrepancies and applications. Berlin: Springer-Verl., 1997.
8. *Arnoux P., Berthe V., Ei H., Ito S.* Tilings, quasicrystals, discrete planes, generalized substitutions and multidimensional continued fractions // Discrete models: combinatorics, computation and geometry. Paris, 2001. P. 59–78.
9. *Zhuravlev V. G.* One-dimensional Fibonacci tilings and derivatives of two-colour rotations of a circle // Max-Plank-Institut fur Mathematik. Preprint Ser. 2004. V. 59. P. 1–43.
10. *Арнольд В. И.* Замечания о квазикристаллической симметрии // Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М.: Наука, 1989. С. 291–300.
11. *De Bruijn N. G.* Sequences of zeros and ones generated by special production rules // Kon. Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A. 1982. V. 84. P. 38–52.
12. *Moody R. V.* Model sets: a survey // Quasicrystals to more complex systems. Les Houches, 1998. (F. Alex, J.-P. Gazeau, eds.) Centre de Physique des Houches. Berlin: Springer-Verl., 2000. V. 13. P. 145–166.
13. *Fogg N. P.* Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2002.

14. *Журавлев В. Г.* Четно-фибоначчиевы числа: бинарная аддитивная задача, распределение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 3. С. 18–46.

15. *Красильщиков В. В., Шутов А. В.* О распределении последовательности по переменному модулю // Тр. XXVIII Конф. молодых ученых механико-математического факультета МГУ. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2006. С. 90–93.

Статья поступила 9 августа 2008 г., окончательный вариант — 6 ноября 2009 г.

Красильщиков Василий Вячеславович
Владимирский филиал Российского университета кооперации,
ул. Воровского, 16, Владимир 600000
`krasilshchikovvv@mail.ru`