Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 517.546

ОЦЕНКИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕЙЛОРА В ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

Э. Г. Кирьяцкий

Аннотация. Рассматривается класс $\widetilde{K}_n^R(E)$ аналитических в единичном круге функций $F(z) = z^n + a_{2,n}z^{n+1} + a_{3,n}z^{n+2} + \dots$, для которых n-я разделенная разность $[F(z); z_0, \dots, z_n]$ отлична от нуля при любых $z_0, \dots, z_n \in E$ и $a_{m,n} \in \mathbb{R}$. Установлена справедливость неравенства $|a_{k,n+2}| \leq (k\gamma_{k,n} - 1)/(\gamma_{k,n} + k - 2)$, $\gamma_{k,n} = \max|a_{k,n}|$. Если n — нечетное число, то $\gamma_{k,n} = (n + k - 1)/(n + 1)$.

Ключевые слова: аналитическая функция, однолистная функция, разделенная разность.

Определим разделенную разность $[F(z); z_0, \dots, z_n]$ аналитической в единичном круге E, т. е. в круге $|z| < 1$, функции $F(z)$ рекуррентной формулой

$$[F(z); z_0] = F(z_0), \quad [F(z); z_0, z_1] = \frac{F(z_0) - F(z_1)}{z_0 - z_1},$$

$$[F(z); z_0, z_1, \dots, z_n] = \frac{[F(z); z_0, \dots, z_{n-1}] - [F(z); z_1, \dots, z_n]}{z_0 - z_n},$$

где точки $z_0, \dots, z_n \in E$ попарно различны (см. [1]). Разделенную разность можно доопределить, если среди точек $z_0, \dots, z_n$ из E есть совпадающие между собой. Например, если $z_0 = z_1 = \xi_0$, то полагаем

$$[F(z); \xi_0, \xi_0] = F'(\xi_0).$$

Вообще, если точки $\xi_0, \dots, \xi_s \in E$ попарно различны, то полагаем (см. [2])

$$[F(z); \underbrace{\xi_0, \dots, \xi_0}_{p_0}, \dots, \underbrace{\xi_s, \dots, \xi_s}_{p_s}] = \frac{1}{(p_0 - 1)! \dots (p_s - 1)!} \frac{\partial^{n-s}[F(z); \xi_0, \dots, \xi_s]}{\partial\xi_0^{p_0-1} \dots \partial\xi_s^{p_s-1}},$$

где $p_0 + \dots + p_s = n + 1$. В частности, если $z_0 = z_1 = \dots = z_n = \xi$, то

$$[F(z); \underbrace{\xi, \dots, \xi}_{n+1}] = \frac{1}{n!} F^{(n)}(\xi).$$

Обозначим через $K_n(E)$, $n \geq 1$, класс голоморфных в круге E функций $F(z)$, у которых $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in E$. Этот класс введен автором в работе [3]. Он обладает многими свойствами, аналогичными свойствам однолистных функций. Легко видеть, что при $n = 1$ класс $K_1(E)$ полностью совпадает с классом всех однолистных в E функций. Нетрудно также доказать, что класс $K_n(E)$ является собственным подклассом класса n-листных в E функций. Отметим свойства функций из класса $K_n(E)$, которые нам понадобятся в дальнейшем (см. [3–5]).

Свойство 1. *Если $F(z) \in K_n(E)$, $n \geq 1$, то $F^{(n)}(z) \neq 0$ при любом $z \in E$.*

Свойство 2. *Если $F(z) \in K_n(E)$, $n \geq 1$, и $c \neq 0$, то $\Psi(z) = cF(z) + P(z) \in K_n(E)$ для любого многочлена степени не выше $n-1$.*

Свойство 3. *Если $F(z) \in K_n(E)$, $n \geq 2$, то при любых фиксированных $z_1, \ldots, z_k \in E$ функция $\Psi(z) = [F(z); z, z_1, \ldots, z_k]$ принадлежит классу $K_{n-k}(E)$, где $1 \leq k \leq n-1$.*

Опираясь на свойства 1, 2 и на свойства разделенных разностей, в классе $K_n(E)$ можно выделить множество функций, разложение которых по степеням z имеют вид

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1}. \tag{1}$$

Множество функций указанного вида (1) составляет класс $\widetilde{K}_n(E)$ нормированных в E функций. Коэффициент $a_{k,n}$ назовем *k-м коэффициентом.*

Свойство 4. *Класс $\widetilde{K}_n(E)$, $n \geq 1$, является компактным в себе множеством функций относительно равномерной сходимости внутри E.*

Свойство 5. *Если $F(z) \in K_n(E)$, $n \geq 2$, то $f(z) = z^{1-n}F(z) \in \widetilde{K}_1(E)$, т. е. $f(z)$ является однолистной нормированной в E функцией.*

Заметим, что $\widetilde{K}_n(E) \subset K_n(E)$. Множество функций из $\widetilde{K}_n(E)$, у которых все коэффициенты $a_{k,n}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, — вещественные числа, обозначим через $\widetilde{K}^R_n(E)$. Ясно, что $\widetilde{K}^R_n(E) \subset \widetilde{K}_n(E)$. Если $n = 1$, то имеем класс $\widetilde{K}^R_1(E)$ нормированных и однолистных в E функций с вещественными коэффициентами. Заметим, что свойство 4 справедливо и для класса $\widetilde{K}^R_n(E)$.

Из свойства 4 легко следует, что в классе $\widetilde{K}^R_n(E)$ всегда найдется функция, имеющая максимальный по модулю k-й коэффициент $a^*_{k,n}$, т. е. коэффициент при z^{n+k-1}. Пусть $\gamma_{k,n} = |a^*_{k,n}|$. Аналогичным образом в классе $\widetilde{K}_{n+2}(E)$ найдется функция, имеющая максимальный по модулю k-й коэффициент $a^*_{k,n+2}$, т. е. коэффициент при z^{n+k+1}. Пусть $\gamma_{k,n+2} = |a^*_{k,n+2}|$. Известно (см. [6]), что если $n = 1$, то

$$\gamma_{k,1} = k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2}$$

При этом

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k,1} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k \in \widetilde{K}_1(E).$$

В данной работе мы доказываем теорему, устанавливающую зависимость между $\gamma_{k,n}$ и $\gamma_{k,n+2}$. Как следствие из этой теоремы получаем точные оценки модулей коэффициентов функций из класса $\widetilde{K}^R_n(E)$ при нечетном n.

Теорема. *Между максимальными по модулю коэффициентами $a^*_{k,n}$ и $a^*_{k,n+2}$ в классах $\widetilde{K}^R_n$ и $\widetilde{K}^R_{n+2}(E)$ существует зависимость, выражаемая неравенством*

$$\gamma_{k,n+2} \leq \frac{k\gamma_{k,n} - 1}{\gamma_{k,n} + k - 2}. \tag{3}$$

Следствие. *Если n — нечетное число, то*

$$\gamma_{k,n} = \frac{n+2k-1}{n+1}. \tag{4}$$

При этом

$$\Phi_n(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_{k,n} z^{n+k-1} \in \widetilde{K}_n^R(E).$$

Доказательство теоремы. Пусть

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n+2} z^{n+k+1} \in \widetilde{K}_{n+2}^R(E). \tag{5}$$

Тогда свойство 3 утверждает, что при любых фиксированных $z_0, z_1 \in E$

$$[F(z); z, z_0, z_1] \in K_n(E). \tag{6}$$

Из (5) следует, что

$$[F(z); z, z_0, z_1] = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n+2} [z^{n+k+1}; z, z_0, z_1].$$

Далее, легко убедиться в том, что

$$[z^{n+k+1}; z, z_0, z_1] = \sum_{j=0}^{n+k-1} z^j [z^{n+k-j}; z, z_0, z_1],$$

поэтому

$$[F(z); z, z_0, z_1] = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n+2} \sum_{j=0}^{n+k-1} z^j [z^{n+k-j}; z, z_0, z_1]$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} A_j(z_0, z_1) z^j + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(z_0, z_1) z^{n+m-1},$$

где

$$A_j(z_0, z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} [z^{n+k-j}; z_0, z_1] a_{k,n+2}, \quad B_m(z_0, z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} [z^k; z_0, z_1] a_{k+m-1,n+2}.$$

Из (6) и свойства 1 следует, что

$$B_1(z_0, z_1) = \left. \frac{\partial^n [F(z); z, z_0, z_1]}{\partial z^n} \right|_{z=0} \neq 0. \tag{7}$$

Используя элементарные свойства разделенных разностей, получим

$$H(z, z_0, z_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m(z_0 z_1)}{B_1(z_0 z_1)} z^{n+m-1} \in \widetilde{K}_n(E).$$

Если $z_0 = re^{i\varphi}$, $z_1 = re^{-i\varphi}$, $0 \le r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$, то

$$H(z, re^{i\varphi}, re^{-i\varphi}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m^{\bullet}(r,\varphi)}{B_1^{\bullet}(r,\varphi)} z^{n+m-1} \in \widetilde{K}_n^R(E),$$

где

$$B_m^\bullet(r,\varphi) = B_m(re^{i\varphi}, re^{-i\varphi}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+m-1,n+2} r^{k-1} \frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что $B_1^\bullet(r,\varphi) \neq 0$, причем $B_1^\bullet(0,\varphi) = 1$. Следовательно, $B_1^\bullet(r,\varphi) > 0$. Так как

$$\frac{|B_m^\bullet(r,\varphi)|}{|B_1^\bullet(r,\varphi)|} \leq \gamma_{m,n},$$

то $\gamma_{m,n} B_1^\bullet(r,\varphi) \pm B_m^\bullet(r,\varphi) \geq 0$, или

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_{m,n} a_{k,n+2} \pm a_{k+m-1,n+2}) r^{k-1} \frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi} \geq 0.$$

Если $0 \leq \varphi < \pi$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_{m,n} a_{k,n+2} \pm a_{k+m-1,n+2}) r^{k-1} \sin k\varphi \geq 0. \tag{9}$$

Левая часть (9) является нечетной функцией от φ. Для такой функции ее коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам (см. [7])

$$|\gamma_{m,n} a_{k,n+2} \pm a_{k+m-1,n+2}| r^{k-1} \leq k|\gamma_{m,n} a_{1,n+2} \pm a_{m,n+2}|.$$

Устремляя r к единице, получим неравенства

$$|\gamma_{m,n} a_{k,n+2} \pm a_{k+m-1,n+2}| \leq k|\gamma_{m,n} a_{1,n+2} \pm a_{m,n+2}|, \quad a_{1,n+2} = 1.$$

Отсюда

$$|a_{k,n+2}| \leq \frac{k|\gamma_{m,n} \pm a_{m,n+2}|}{\gamma_{m,n}} + \frac{|a_{k+m-1,n+2}|}{\gamma_{m,n}}. \tag{10}$$

Применим неравенство (10) к оценке модуля $|a_{k+m-1,n+2}|$:

$$|a_{k+m-1,n+2}| \leq \frac{(k+m-1)|\gamma_{m,n} \pm a_{m,n+2}|}{\gamma_{m,n}} + \frac{|a_{k+2(m-1),n+2}|}{\gamma_{m,n}}.$$

Затем оценим модуль $|a_{k+2(m-1),n+2}|$ и т. д. После l шагов придем к неравенству

$$|a_{k,n+2}| \leq \frac{|a_{k+l(m-1),n+2}|}{\gamma_{m,n}^{l+1}} + |\gamma_{m,n} \pm a_{m,n+2}| \sum_{p=0}^{l} \frac{k+p(m-1)}{(\gamma_{m,n})^{p+1}}. \tag{11}$$

Запишем функцию $F(z)$ из класса $\widetilde{K}_{n+2}^R$ в виде $F(z) = z^{n+1} f(z)$, где

$$f(z) = z + a_{2,n+2} z^2 + a_{3,n+2} z^3 + \ldots.$$

Согласно свойству 5 и равенству (2) имеем

$$|a_{k+l(m-1),n+2}| \leq k + l(m-1).$$

Возьмем функцию

$$\Phi_n(z) = \frac{z^n\left(1 + \frac{1-n}{1+n} z\right)}{(1-z)^2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\Phi_n(z) = \frac{z^n\left(1 + \frac{1-n}{1+n} z\right)}{(1-z)^2} = z^n + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{n+2m-1}{n+1} z^{n+m-1}.$$

Пользуясь элементарными свойствами разделенных разностей, легко установить, что

$$\Phi_n(z) = z^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n+2m-1}{n+1} z^{n+m-1} \in \widetilde{K}_n^R(E). \tag{12}$$

Для этого берем n-ю разделенную разность от функции $\Phi_n(z)$ и убеждаемся в том, что

$$[\Phi_n(z); z_0, \dots, z_n] = \left(-1 + \frac{2}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-z_m}\right) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-z_m} \neq 0 \quad \forall z_0, \dots, z_n \in E.$$

Из (12) следует, что

$$\gamma_{m,n} > 1, \quad \text{где } m \geq 2. \tag{13}$$

Заметим также, что (см. [4])

$$\gamma_{m,n} > \gamma_{m,n+1} > \gamma_{m,n+2} > \dots . \tag{14}$$

Учитывая (13), (14) и переходя в неравенстве (11) к пределу при $l \to \infty$, получим неравенство

$$|a_{k,n+2}| \leq \frac{k\gamma_{m,n} - k + m - 1}{(\gamma_{m,n} - 1)^2} |\gamma_{m,n} \pm a_{m,n+2}|,$$

которое при $k = m$ превращается в неравенство

$$|a_{k,n+2}| \leq \frac{m\gamma_{m,n} - 1}{(\gamma_{m,n} - 1)^2} |\gamma_{m,n} \pm a_{m,n+2}|. \tag{15}$$

Неравенство (15) справедливо при любом выборе знака в его правой части. Поэтому, выбирая надлежащим образом знак плюс или минус, мы это неравенство можем заменить более простым

$$|a_{k,n+2}| \leq \frac{m\gamma_{m,n} - 1}{(\gamma_{m,n} - 1)^2} |\gamma_{m,n} - a_{m,n+2}|,$$

из которого легко следует неравенство

$$|a_{m,n+2}| \leq \frac{m\gamma_{m,n} - 1}{\gamma_{m,n} + m - 2}. \tag{16}$$

В силу произвольного выбора в классе $\widetilde{K}_n^R(E)$ функции $F(z)$ неравенство (16) превращается в неравенство (3), указанное в теореме.

Перейдем к доказательству следствия. В неравенстве (3) положим $n = 1$ и воспользуемся (2). Тогда

$$\gamma_{k,3} \leq \frac{k\gamma_{k,1} - 1}{\gamma_{k,1} + k - 2} = \frac{k+1}{2}. \tag{17}$$

Пусть теперь $n = 3$. Из неравенств (3) и (17) вытекает, что

$$\gamma_{k,5} \leq \frac{k\gamma_{k,3} - 1}{\gamma_{k,3} + k - 2} \leq \frac{k+2}{3}.$$

Продолжая указанный процесс, получаем

$$\gamma_{k,n} \leq \frac{n+2k-1}{n+1}, \quad \text{где } n \text{ нечетное.}$$

Вспоминая (12), убеждаемся в справедливости равенства

$$\gamma_{k,n} = \frac{n+2k-1}{n+1}, \quad \text{где } n \text{ нечетное.}$$

Тем самым мы доказали следствие из нашей теоремы.

Замечание 1. Пока не удалось доказать справедливость следствия при четном $n \geq 2$.

Замечание 2. Есть все основания сформулировать следующую гипотезу. Пусть $n \geq 2$ — произвольно фиксированное натуральное число и

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1} \in \widetilde{K}_n(E),$$

где $a_{k,n}$, $k = 2, 3, 4, \ldots,$ — комплексные числа. Тогда

$$|a_{k,n}| \leq \frac{n+2k-1}{n+1}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots.$$

Знак равенства при любом $k \geq 2$ реализуется функцией

$$\Phi_n(z) = z^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n+2k-1}{n+1} z^{n+k-1},$$

принадлежащей классу $\widetilde{K}_n(E)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфонд А. О.* Исчисления конечных разностей. М.: Гостехиздат, 1957.
2. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. Киев: Наук. думка, 1975.
3. *Кирьяцкий Э. Г.* О функциях, n-я разделенная разность которых не равна нулю // Liet. Mat. Rink. 1961. V. 1, N 1–2. P. 109–114.
4. *Кирьяцкий Э. Г.* О функциях с разделенной разностью, отличной от нуля // Liet. Mat. Rink. 1963. V. 3, N 1. P. 55–60.
5. *Кирьяцкий Э. Г.* Многолистные функции и разделенные разности. Вильнюс: Техника, 1995.
6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
7. *Хейман В. К.* Многолистные функции. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

Статья поступила 13 августа 2008 г.

Кирьяцкий Эдуард Григорьевич
Вильнюсский технический университет,
Саулетекио, 11, Вильнюс LT-10223, Литва (Lithuania)
eduard.kiriyatzkii@takas.lt