*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1*

*УДК 514.13*

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОРБИФОЛДЫ СО СВОБОДНЫМ ОТ КРУЧЕНИЯ КОММУТАНТОМ

**Р. А. Идальго, А. Д. Медных**

**Аннотация.** *Геометрическим орбифолдом* размерности $d$ называется фактор-пространство $\mathscr{O} = X/K$, где $(X, G)$ — $d$-мерная геометрия, а $K < G$ — кокомпактная дискретная подгруппа. В этом случае $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O}) = K$ называется *орбифолдной фундаментальной группой* $\mathscr{O}$. В общем случае коммутаторная подгруппа $K'$ группы $K$ может иметь элементы, действующие с неподвижными точками, т. е. может случиться, что гомологическое накрытие $M_{\mathscr{O}} = X/K'$ орбифолда $\mathscr{O}$ не является геометрическим многообразием; оно может иметь сингулярные точки. Основная задача работы — выяснить, в каких случаях $K'$ действует на $X$ без неподвижных точек, т. е. когда гомологическое накрытие $M_{\mathscr{O}}$ является геометрическим многообразием. В случае $d = 2$ полный ответ дан Маклохленом. В настоящей работе рассмотрен случай $d = 3$ и даны необходимые и достаточные условия для свободного действия $K'$ при условии, что носителем орбифолда $\mathscr{O}$ служит трехмерная сфера $S^3$.

**Ключевые слова:** многообразие, орбифолд, геометрия, изометрия.

## 1. Введение

Проблема распознавания групп, свободных от кручения, в классе всех конечно-представимых групп исторически хорошо известная и весьма трудная. В работе Гриндлингера [1] (см. также [2]) приведены некоторые условия на определяющие соотношения, при которых группа $G$ свободна от кручения. Позднее значительный успех в этом направлении достигнут в работах Розенбергера и других авторов [3–5]. История вопроса и современные результаты в этом направлении могут быть найдены в книге А. Ю. Ольшанского [6]. Следует заметить, что если группа допускает геометрическое действие в пространстве неположительной кривизны, то элементы конечного порядка в группе в точности те, которые имеют неподвижные точки. Поэтому они могут быть распознаны чисто геометрическими методами.

*Геометрией* называется пара $(X, G)$, где $X$ — односвязное полное риманово многообразие с группой изометрий $G$, действующей транзитивно и имеющей компактные стабилизаторы на $X$. При этом предполагается, что в $G$ существует по крайней мере одна собственно разрывная подгруппа $K$, действующая на $X$ без неподвижных точек (т. е. *свободно*), такая, что $X/K$ — компактное многообразие. *Размерностью геометрии* $(X, G)$ называется размерность многообразия $X$.

Частично поддержано проектами Fondecyt 1070271, UTFSM 12.08.01 и РФФИ (код проекта 09–01–00255).

*Геометрией постоянной кривизны* называется геометрия $(X, G)$, для которой риманово многообразие $X$ имеет постоянную гауссову кривизну. Все такие геометрии исчерпываются гиперболическим пространством $\mathbb{H}^d$, сферическим пространством $S^d$ и евклидовым пространством $\mathbb{E}^d$ (см., например, [7]). В частности, двумерными геометриями постоянной кривизны являются $\mathbb{H}^2$, $S^2$ и $\mathbb{E}^2$. Тёрстон доказал, что существует ровно 8 трехмерных геометрий: (i) $\mathbb{H}^3$, (ii) $S^3$, (iii) $\mathbb{E}^3$, (iv) $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$, (v) $S^2 \times \mathbb{E}$, (vi) Nil, (vii) Sol, (viii) $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ [8, 9]. В работе [10] содержится полный список из 19 четырехмерных геометрий.

*Геометрическим орбифолдом*, моделируемым в геометрии $(X, G)$, называется фактор-пространство $\mathscr{O} = X/K$, где $K$ — некоторая собственно разрывная подгруппа $G$. В этом случае $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O}) = K$ называется *орбифолдной фундаментальной группой* $\mathscr{O}$. Если $K$ действует свободно на $X$, то $X/K$ называется *геометрическим многообразием.*

Мы будем рассматривать только группы $K$, состоящие из сохраняющих ориентацию изометрий. Пусть $K'$ обозначает коммутаторную подгруппу $K$, тогда орбифолд $M_{\mathscr{O}} = X/K'$ называется *гомологическим накрытием* орбифолда $\mathscr{O}$. Это — наибольшее абелево регулярное накрытие $\mathscr{O}$. Гомологическое накрытие $M_{\mathscr{O}}$ является геометрическим многообразием тогда и только тогда, когда $K'$ действует свободно на $X$.

Заметим, что в несферических геометриях каждая изометрия конечного порядка действует с неподвижными точками. В этом случае $K'$ действует свободно тогда и только тогда, когда $K'$ является группой без кручения.

В двумерном случае полное решение проблемы о том, когда коммутаторная подгруппа не имеет элементов конечного порядка, известно (см., например, [11, 12], а также разд. 2).

В этой работе мы рассмотрим трехмерные орбифолды $\mathscr{O}$, носителем которых является трехмерная сфера $S^3$, и получим необходимые и достаточные условия, при которых коммутаторная подгруппа орбифолда $\mathscr{O}$ свободна от кручения.

Под *графом* мы понимаем конечный набор попарно не пересекающихся связных графов, имеющих кратные ребра и петли. Граф называется *тривалентным*, если каждая вершина имеет валентность три (при этом ребро, начинающееся и кончающееся в вершине, считается дважды).

Граф (возможно, несвязный) называется 1-*связным*, если он имеет ребро $L$, после удаления которого (без удаления его вершин) число связных компонент графа возрастает. Заметим, что если граф тривалентный, данное определение 1-связности совпадает с обычным определением из [13].

Рассмотрим трехмерную геометрию $(X, G)$. Пусть $K < G$ — кокомпактная дискретная подгруппа такая, что $X/K = \mathscr{O}$ гомеоморфно сфере $S^3$, тогда $K = \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$. Коническое сингулярное множество орбифолда $\mathscr{O}$ — это тривалентный граф $\mathscr{G} \subset S^3$, над точками которого каноническое отображение $X \to X/K$ перестает быть неразветвленным накрытием. Каждому ребру предпишем целое положительное число — *индекс ребра*, равное порядку стабилизатора группы $K$ в любой точке прообраза этого ребра (отличного от его вершины).

Основным результатом настоящей работы является следующая

**Теорема 1.** *Пусть $\mathscr{O}$ — трехмерный орбифолд, носителем которого является $S^3$, а сингулярное множество образовано тривалентным графом $\mathscr{G}$ (ребра которого имеют предписанные индексы). Тогда коммутаторная подгруппа $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ действует свободно на универсальном накрытии орбифолда $\mathscr{O}$ тогда и* *только тогда, когда* (i) *все локальные группы в вершинах* $\mathscr{G}$ *равны* $\mathbb{Z}_2^2$ *и* (ii) *граф* $\mathscr{G}$ *не является* 1*-связным.*

**Следствие 2.** *Пусть* $\mathscr{O}$ *— несферический геометрический* 3*-орбифолд, носителем которого является* $S^3$*, а сингулярное множество образовано тривалентным графом* $\mathscr{G}$*. Тогда* $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ *свободен от кручения тогда и только тогда, когда*

(i) *все локальные группы в вершинах* $\mathscr{G}$ *равны* $\mathbb{Z}_2^2$,

(ii) *граф* $\mathscr{G}$ *не является* 1*-связным.*

**Следствие 3.** *Пусть* $(X, G)$ *— трехмерная геометрия. Пусть* $K < G$ *— кокомпактная дискретная подгруппа такая, что* $X/K = \mathscr{O}$ *гомеоморфно* $S^3$*, и каждая компонента конического сингулярного множества* $\mathscr{G}$ *имеет индекс* 2*. Тогда* $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_2^k$ *для некоторого* $k \geq 1$ *тогда и только тогда, когда граф* $\mathscr{G}$ *не является* 1*-связным.*

В частности, теорема 1 дает простой способ распознать свободное действие коммутаторной подгруппы в группах Кокстера в несферической геометрии. Ранее это сделано в [14] с помощью сложной комбинаторной теоретико-групповой техники. Эта проблема важна в теории фуксовых и клейновых групп, поскольку позволяет описать наибольшие абелевы накрытия геометрических орбифолдов.

Мы будем использовать следующие обозначения и понятия. Геометрический орбифолд $\mathscr{O} = X/K$ назовем *общим орбифолдом Гумберта*, если $K'$ действует свободно на $X$. *Орбифолдом Гумберта* называется общий орбифолд Гумберта, носителем которого является сфера. Орбифолд Гумберта $X/K$, для которого $K/K' \cong \mathbb{Z}_n^k$, будет называться *орбифолдом Гумберта типа* $(n, k)$. Причиной для таких названий является тот факт, что гомологическое накрытие двумерных орбифолдов, носителями которых является сфера с коническими точками порядка 2, впервые было изучено Гумбертом [15].

Статья организована следующим образом. В разд. 2 из соображений полноты изложения мы опишем все возможные типы $(n, k)$ двумерных орбифолдов Гумберта и укажем, для каких $n$ и $k$ соответствующие орбифолды являются арифметическими. В разд. 3 приведем доказательство теоремы 1. В разд. 4 дадим конкретные примеры трехмерных геометрических орбифолдов Гумберта.

## 2. Двумерные орбифолды Гумберта

Описание двумерных орбифолдов Гумберта является простым следствием из результатов Маклохлина [12]. Приведем его из соображений полноты изложения. Пусть $X = \mathscr{H}^2$ — гиперболическая плоскость и $G = PSL(2, \mathbb{C})$ — группа сохраняющих ориентацию изометрий $X$. Рассмотрим замкнутый геометрический орбифолд $\mathscr{O} = X/K$, где группа $K < G < \mathbb{R}$ действует собственно разрывно на $X$. В этом случае $\mathscr{O}$ гомеоморфен замкнутой ориентируемой поверхности рода $\gamma$. Обозначим через $P : X \to \mathscr{O}$ каноническую проекцию. Тогда существует конечное число точек $p_1, \dots, p_r$, над окрестностями которых $P$ не является (неразветвленным) накрытием (может случиться, что $r = 0$).

Если $q_i \in X$ такое, что $P(q_i) = p_i$, то стабилизатор $K(q_i)$ группы $K$ в точке $q_i$ является конечной циклической группой порядка $k_i$ для некоторого $k_i \geq 2$. Орбифолд $\mathscr{O}$ (и группа $K$) называется *орбифолдом* (соответственно *группой*) сигнатуры $(\gamma, r; k_1, \dots, k_r)$. По теореме об униформизации $K$ имеет следующее представление:

$$K = \left\langle a_1, \dots, a_\gamma, b_1, \dots, b_\gamma, x_1, \dots, x_r : x_1^{k_1} = \dots = x_r^{k_r} = \prod_{j=1}^{\gamma} [a_j, b_j] \prod_{l=1}^{r} x_l = 1 \right\rangle, \tag{1}$$

где $[a_j, b_j] = a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1}$. Фактор-группа $K/K'$ конечна тогда и только тогда, когда $\gamma = 0$.

Следующий результат, принадлежащий Маклохлину [12], дает необходимые и достаточные условия, при которых коммутаторная подгруппа $K'$ свободна от кручения.

**Теорема 4** [12]. *Коммутаторная подгруппа $K'$ группы $K$ с представлением* (1) *свободна от кручения тогда и только тогда, когда существует $m_0$ такое, что*

$$\operatorname{lcm}(k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_r) = m_0 \quad \text{для всех } j = 1, \dots, r, \tag{2}$$

*где* lcm *обозначает наименьшее общее кратное.*

**Следствие 5.** *Двумерный геометрический орбифолд $\mathscr{O} = X/K$ является орбифолдом Гумберта тогда и только тогда, когда группа $K$ имеет следующее представление:*

$$K = \langle x_1, \dots, x_r : x_1^{k_1} = \dots = x_r^{k_r} = x_1 x_2 \cdots x_r = 1 \rangle, \tag{3}$$

*и удовлетворяет условию* (2).

Пример 6. Если $k_r = \operatorname{lcm}(k_1, \dots, k_{r-1})$, то условие (2) выполнено и

$$K/K' \cong \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \mathbb{Z}_{k_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_{r-1}}.$$

По следствию 5 получим, что $X/K$ является орбифолдом Гумберта.

Если $r = 3$ и $(k_1, k_2, k_3) = (2, 10, 10)$, то $K/K' \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{10}$, откуда $X/K$ не является орбифолдом типа $(k, n)$.

Если $r = 4$ и $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (2, 3, 6, 6)$, то $K/K' \cong \mathbb{Z}_6^2$, т. е. орбифолд Гумберта $X/K$ имеет тип $(6, 2)$.

**2.1. Двумерные орбифолды Гумберта заданного типа.** Как видно из примера 6, существуют двумерные орбифолды Гумберта, не являющиеся орбифолдами типа $(k, n)$. Для того чтобы описать двумерные орбифолды Гумберта указанного типа, нам потребуется следующий хорошо известный факт (см., например, [16, с. 344]).

**Лемма 7.** *Пусть группа $K$ имеет представление* (3) *и удовлетворяет условию* (2). *Рассмотрим $(r+1) \times r$-матрицу*

$$A_K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_r \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*и обозначим через $D_j$, где $j = 1, \dots, r$, наибольший общий делитель всех $j \times j$-миноров матрицы $A$. Тогда*

$$K/K' \cong \mathbb{Z}_{D_2} \oplus \mathbb{Z}_{D_3/D_2} \oplus \mathbb{Z}_{D_4/D_3} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{D_r/D_{r-1}}.$$

В качестве следствия из леммы 7 получим необходимые и достаточные условия, при которых $X/K$ является орбифолдом Гумберта типа $(n, k)$.

**Следствие 8.** *Пусть группа $K$ имеет представление (3) и удовлетворяет условию (2). Пусть $D_j$ те же, что и выше, для всех $j = 1, \dots, r$. Для каждого $j = 2, \dots, r$, при котором $D_j/D_{j-1} > 1$, запишем*

$$D_j/D_{j-1} = m_{j1}m_{j2}\cdots m_{js_j},$$

*где каждое $m_{ji}$ есть степень простого числа и при $i_1 \neq i_2$ простые, соответствующие числам $m_{ji_1}$ и $m_{ji_2}$ различны. Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы $X/K$ был орбифолдом Гумберта типа $(n, k)$, является возможность представления множества*

$$\{\underbrace{m_{21}, \dots, m_{2s_2}}, \dots, \underbrace{m_{r1}, \dots, m_{rs_r}}\}$$

*в виде*

$$\{\underbrace{u_{11}, \dots, u_{1t_1}}, \underbrace{u_{21}, \dots, u_{2t_2}}, \dots, \underbrace{u_{k1}, \dots, u_{kt_k}}\}$$

*таком, что $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{u_{j1}} \oplus \mathbb{Z}_{u_{j2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{u_{jt_j}}$ для всех $j = 1, \dots, k$.*

Полученный критерий позволяет использовать компьютерные программы такие, как, например, GAP [17], для описания двумерных орбифолдов Гумберта заданного типа.

**2.2. Сферические и евклидовы орбифолды Гумберта.** Единственной дискретной группой без кручения, действующей на двумерной сфере, является тривиальная группа. Как следствие, для того, чтобы коммутант $K'$ группы $K$, действующей на сфере, был без кручения, необходимо, чтобы группа $K$ была абелевой. В частности, возможны следующие случаи: (i) $K \cong \mathbb{Z}_k$ или (ii) $K \cong \mathbb{Z}_2^2$. В случае (i) орбифолд $S^2/K$ имеет тип $(k, 1)$, а в случае (ii) — тип $(2, 2)$.

В евклидовом случае если орбифолд $O = \mathbb{E}^2/K$ компактен, а $K'$ свободна от кручения, то многообразие $M = \mathbb{E}^2/K'$ является тором. В этом случае для группы $H = K/K'$ имеются лишь следующие возможности:

(i) $H \cong \mathbb{Z}_6$ для группы $K$ с сигнатурой $(0, 3; 2, 3, 6)$,

(ii) $H \cong \mathbb{Z}_3^2$ для группы $K$ с сигнатурой $(0, 3; 3, 3, 3)$,

(iii) $H \cong \mathbb{Z}_2^3$ для группы $K$ с сигнатурой $(0, 4; 2, 2, 2, 2)$.

В случае (i) орбифолд Гумберта $\mathbb{E}^2/K$ имеет тип $(6, 1)$, а в случаях (ii) и (iii) — типы $(3, 2)$ и $(2, 3)$ соответственно.

**2.3. Некоторые примеры гиперболических орбифолдов Гумберта.** Пусть гиперболическая группа $K$ имеет представление (3) и удовлетворяет условию (2). В этом случае $r \geq 3$, $k_j \geq 2$ и $\sum\limits_{j=1}^{r} k_j^{-1} < r - 2$.

Для того чтобы построить несколько примеров, положим $p = \gcd(k_1, \dots, k_r)$, $\hat{k}_j = k_j/p$ и $q_j = \gcd(\hat{k}_1, \hat{k}_2, \dots, \hat{k}_{j-1}, \hat{k}_{j+1}, \dots, \hat{k}_r)$ для $j = 1, \dots, r$ и предположим, что выполнены равенства

$$k_j = pq_1q_2\cdots q_{j-1}q_{j+1}\cdots q_r, \quad j = 1, \dots, r. \tag{4}$$

Заметим, что условия (4) тривиальны при $r = 3$ и не тривиальны при $r \geq 4$.

В рассматриваемом случае $D_1 = 1$, $D_2 = p$, $D_k = p^{k-1}q_1^{k-2}q_2^{k-2}\cdots q_r^{k-2}$ для $k = 3, \dots, r$. В качестве следствия из леммы 7 получим

$$K/K' \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{pq_1q_2\cdots q_r} \oplus \mathbb{Z}_{pq_1q_2\cdots q_r} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{pq_1q_2\cdots q_r}.$$

Следовательно, двумерный орбифолд $\mathscr{O} = \mathbb{H}^2/K$ будет орбифолдом Гумберта только при выполнении следующих условий:

(i) $p \geq 2$, $q_1 = \dots = q_r = 1$ и $K/K' \cong \mathbb{Z}_p^{r-1}$

или

(ii) $p = 1$ и $K/K' \cong \mathbb{Z}_{q_1 \cdots q_r}^{r-2}$.

**Таблица 1.**

Арифметические орбифолды Гумберта.

| Signature of $K$ | field | $K/K'$ | $g$ |
|---|---|---|---|
| $(0,3:4,4,4)$ | $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ | $\mathbb{Z}_4^2$ | 3 |
| $(0,3:5,5,5)$ | $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ | $\mathbb{Z}_5^2$ | 6 |
| $(0,3:6,6,6)$ | $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ | $\mathbb{Z}_6^2$ | 10 |
| $(0,3:7,7,7)$ | $\mathbb{Q}(\cos\pi/7)$ | $\mathbb{Z}_7^2$ | 15 |
| $(0,3:8,8,8)$ | $\mathbb{Q}(\cos\pi/8)$ | $\mathbb{Z}_8^2$ | 21 |
| $(0,3:9,9,9)$ | $\mathbb{Q}(\cos\pi/9)$ | $\mathbb{Z}_9^2$ | 28 |
| $(0,3:12,12,12)$ | $\mathbb{Q}(\cos\pi/12)$ | $\mathbb{Z}_{12}^2$ | 55 |
| $(0,3:15,15,15)$ | $\mathbb{Q}(\cos\pi/15)$ | $\mathbb{Z}_{15}^2$ | 91 |
| $(0,3:3,4,12)$ | $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ | $\mathbb{Z}_{12}$ | 3 |
| $(0,3:2,5,10)$ | $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ | $\mathbb{Z}_{10}$ | 2 |
| $(0,3:2,7,14)$ | $\mathbb{Q}(\cos\pi/7)$ | $\mathbb{Z}_{14}$ | 3 |
| $(0,3:2,9,18)$ | $\mathbb{Q}(\cos\pi/9)$ | $\mathbb{Z}_{18}$ | 4 |
| $(0,3:3,8,24)$ | $\mathbb{Q}(\cos\pi/12)$ | $\mathbb{Z}_{24}$ | 7 |
| $(0,3:2,15,30)$ | $\mathbb{Q}(\cos\pi/15)$ | $\mathbb{Z}_{30}$ | 7 |
| $(0,3:3,10,30)$ | $\mathbb{Q}(\cos\pi/15)$ | $\mathbb{Z}_{30}$ | 9 |

2.3.1. Арифметические орбифолды Гумберта. Условие (4) на группу $K$ при $r = 3$ тривиально следует из условия (2). Список всех арифметических треугольных групп приведен в [18]. Он позволяет описать все треугольные арифметические орбифолды Гумберта $\mathscr{O} = \mathbb{H}^2/K$ типа $(n,k)$, т. е. такие, для которых $K/K' \cong \mathbb{Z}_n^k$. Результаты приведены в табл. 1, где $K$ униформизирует орбифолд, $g$ обозначает род гомологического накрытия, а field означает соответствующее поле следов.

2.3.2. Обобщенные кривые Ферма [19, 20]. Пусть $\mathscr{O}_{n,k}$ — орбифолд сигнатуры $(0, k+1; n, \dots, n)$, где $n \geq 2$ и $k \geq 1$. Из предыдущих результатов следует, что $\mathscr{O}_{n,k}$ является двумерным орбифолдом Гумберта типа $(n,k)$.

Обозначим через $S_{n,k}$ гомологическое накрытие орбифолда $\mathscr{O}_{n,k}$, т. е. замкнутую риманову поверхность рода $g_{n,k}$, допускающую группу конформных автоморфизмов $H \cong \mathbb{Z}_n^k$ такую, что $\mathscr{O}_{n,k} = S_{n,k}/H$. Равенство $g_{n,k} = 0$ достигается лишь в случае, когда $(n,k) \in \{(n,1),(2,2)\}$ для $n \geq 2$, а $g_{n,k} = 1$ ровно тогда, когда $(n,k) \in \{(2,3),(3,2)\}$ (заметим, что существуют другие двумерные орбифолды Гумберта типов $(3,1)$, $(6,1)$ и $(4,1)$, которые не получаются указанным способом).

Условие $g_{n,k} \geq 2$ эквивалентно неравенству $n^{k-1}(n(k-1)-(k+1)) \geq 2$. В этом случае возможны три следующие ситуации: (i) $(n,k)$ с $n \geq 2$, $k \geq 4$, (ii) $(n,3)$ с $n \geq 3$ и (iii) $(n,2)$ с $n \geq 4$.

Пусть $(n,k)$ — любая пара, удовлетворяющая (i), (ii) или (iii). Рассмотрим набор из $k-2$ попарно различных точек $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2} \in \mathbb{C} - \{0,1\}$ и подмножество $C(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2})$ в проективном пространстве, образованное общими нулями однородных полиномов:

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0 \\ \lambda_1 x_1^n + x_2^n + x_4^n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{k-2} x_1^n + x_2^n + x_{k+1}^n &= 0. \end{aligned}$$

Из теоремы о неявной функции следует, что $C(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2})$ является замкнутой римановой поверхностью рода $g_{n,k} \geq 2$. Более того, если мы обозначим через $a_j$ линейные проективные автоморфизмы $\mathbb{P}^k$, меняющие координату

$x_j$ на $\rho x_j$, где $\rho = e^{2\pi i/n}$, то группа $H_0 = \langle a_1, \dots , a_k\rangle \cong \mathbb{Z}_n^k$ сохраняет риманову поверхность $C(\lambda_1, \dots , \lambda_{k-2})$ инвариантной и действует на ней как группа конформных автоморфизмов.

Фактор-пространство $\mathscr{O}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{k-2})} = C(\lambda_1, \dots , \lambda_{k-2})/H_0$ является орбифолдом сигнатуры $(0, k+1; n, \dots , n)$. Соответствующее фактор-отображение имеет вид $\pi(x_1 : \dots : x_{k+1}) = -(x_1/x_2)^n$ и разветвлено над точками $\infty$, 0, 1, $\lambda_1, \dots , \lambda_{k-2}$. В частности, $\mathscr{O}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{k-2})}$ является гиперболическим орбифолдом Гумберта вида $\mathscr{O}_{n,k}$.

Обратно, всякий гиперболический орбифолд Гумберта $\mathscr{O}_{n,k}$ может быть представлен в виде $\mathscr{O}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{k-2})}$ для подходящего набора попарно различных значений $\lambda_1, \dots , \lambda_{k-2} \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

Действительно, если мы предположим (с точностью до преобразования Мёбиуса), что коническими точками орбифолда $\mathscr{O}_{n,k}$ являются точки $\infty$, 0, 1, $\lambda_1, \dots , \lambda_{k-2}$, то гомологическое накрытие $S_{n,k}$ биголоморфно эквивалентно $C(\lambda_1, \dots , \lambda_{k-2})$ и соответствующий биголоморфный автоморфизм сопрягает группы $H$ и $H_0$.

## 3. Доказательство теоремы 1

В этом разделе зафиксируем трехмерную геометрию $(X, G)$ и кокомпактную дискретную группу $K < G$ такую, что $X/K = \mathscr{O}$ гомеоморфно $S^3$. Отождествим группу $K$ с фундаментальной орбифолдной группой $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$. Пусть $\mathscr{G}$ — граф, образованный сингулярным множеством орбифолда $\mathscr{O}$.

Рассмотрим проекцию графа $\mathscr{G}$ на плоскость и обозначим ее через $\widetilde{\mathscr{G}}$. Пусть $A_1, \dots , A_r$ — ребра графа $\widetilde{\mathscr{G}}$ с удаленными вершинами. Пусть $d_j$ — конический индекс орбифолда $\mathscr{O}$, предписанный ребру $A_j$.

Приведем несколько простых фактов, которые потребуются нам в дальнейшем.

**Лемма 9.** *Коммутаторная подгруппа $K'$ действует на $X$ без неподвижных точек тогда и только тогда, когда каждая замкнутая петля вокруг ребра графа $\mathscr{G}$ представляет класс петель, не принадлежащий $K'$.*

Доказательство. Действительно, элемент $k \in K' - \{I\}$ действует на пространстве $X$ с неподвижными точками тогда и только тогда, когда он оставляет неподвижной геодезическую в $X$. Проекция этой геодезической на орбифолд является ребром графа $\widehat{\mathscr{G}}$, и все ребра графа могут быть получены таким способом.

**3.1. Представление Хефлигера — Квача — Виртингера.** Представление Хефлигера — Квача — Виртингера для группы $K = \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$ дано в [21] в терминах порождающих и определяющих соотношений фундаментальной группы многообразия $\mathscr{O} - \mathscr{G}$ и информации, полученной из локальных индексов сингулярного множества орбифолда $\mathscr{O}$. Более точно, для каждого $j \in \{1, \dots , r\}$ обозначим через $x_j$ петлю вокруг ребра $A_j$. Тогда порождающие $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$ задаются петлями (точнее, классами петель) $x_1, \dots , x_r$, а определяющие соотношения имеют вид

$$x_1^{d_1} = \dots = x_r^{d_r} = 1 \quad \text{и} \quad R_1 = \dots = R_s = 1,$$

где соотношения $R_j = 1$ записываются в виде $x_a x_b x_a^{-1} = x_c$, соответствующем двойным точкам проекции $\widetilde{\mathscr{G}}$, или в виде $x_a x_b^{\pm 1} = x_c$, соответствующем вершинам $\widehat{\mathscr{G}}$.

Представление Хефлигера — Квача — Виртингера показывает, что группа $K = \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$ конечно порождается элементами конечного порядка. В частности, отсюда следует, что $K/K'$ — конечная группа. При этом имеет место канонический сюръективный гомоморфизм $\Psi : \pi_1(S^3 - \mathscr{G}) \to K = \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$.

### 3.2. Случай узлов и зацеплений.

**Лемма 10.** *Пусть $\mathscr{O}$ — трехмерный орбифолд, носитель которого гомеоморфен $S^3$, а сингулярное множество $\mathscr{G}$ представляет собой узел или зацепление с $r$ компонентами. Обозначим их через $L_1, \dots, L_r$ и будем считать, что сингулярный индекс $L_j$ равен $d_j \geq 2$. Тогда $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$.*

Доказательство. В нашем случае сингулярное множество орбифолда $\mathscr{O}$ является узлом или зацеплением, т. е. оно не содержит вершин. Отсюда представление Хефлигера — Квача — Виртингера $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$ задается порождающими $x_1, \dots, x_r$ и соотношениями вида $x_1^{d_1} = \dots = x_r^{d_r} = 1$ и $x_k = x_i x_j x_i^{-1}$. В последнем случае $x_k$ и $x_i$ сопряжены и имеют одинаковые порядки. Заметим, что в абелевой группе соотношения последнего типа всегда выполнены. Поэтому абелизатор орбифолдной фундаментальной группы $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$ имеет требуемый вид. $\square$

**Теорема 11.** *Пусть $\mathscr{O}$ — трехмерный орбифолд, носитель которого гомеоморфен $S^3$, а сингулярное множество $\mathscr{G}$ представляет собой узел или зацепление. Тогда $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ действует свободно. Кроме того, если зацепление $\mathscr{G}$ имеет $r$ компонент $L_1, \dots, L_r$ с сингулярными индексами $d_j \geq 2$, $j = 1, \dots, r$, то $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_n^k$ тогда и только тогда, когда имеет место разложение*

$$\{\underbrace{d_{1,1}, \dots, d_{1,s_1}}, \underbrace{d_{2,1}, \dots, d_{2,s_2}}, \dots, \underbrace{d_{k,1}, \dots, d_{k,s_k}}\} = \{d_1, \dots, d_r\} \tag{5}$$

*такое, что $s_1 + s_2 + \dots + s_k = r$, и*

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{d_{j,1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_{j,s_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Доказательство. Пусть зацепление $\mathscr{G}$ имеет $r$ компонент $L_1, \dots, L_r$ с сингулярными индексами $d_j \geq 2$, $j = 1, \dots, r$. Рассмотрим петлю $x_j$ вокруг компоненты $L_j$. По лемме 10 имеем $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$, где каждая группа $\mathbb{Z}_{d_j}$ порождена петлей $x_j$. Далее, если $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ не действует свободно, то по лемме 9 некоторая нетривиальная степень $x_j$ принадлежит группе $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$; противоречие. Последнее утверждение теоремы представляет собой элементарный факт из классификации конечно порожденных абелевых групп. $\square$

**Следствие 12.** *Пусть $(X, G)$ — трехмерная геометрия. Пусть $K < G$ — кокомпактная дискретная группа такая, что $\mathscr{O} = X/K$ гомеоморфно $S^3$, а сингулярное множество $\mathscr{G}$ орбифолда $\mathscr{O}$ представляет собой узел или зацепление с $k$ компонентами с одним и тем же сингулярным индексом $n \geq 2$. Тогда коммутаторная подгруппа $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ действует свободно на $X$ и $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_n^k$.*

Доказательство. В рассматриваемом случае все компоненты и зацепления $\mathscr{G}$ имеют один и тот же индекс $d_j = n$. Тогда теорема 11 утверждает, что $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_k} = \mathbb{Z}_n^k$. $\square$

**Следствие 13.** *Пусть $\mathscr{O}$ — трехмерный несферический геометрический орбифолд, носитель которого гомеоморфен $S^3$. Тогда если сингулярное множество орбифолда $\mathscr{O}$ — узел или зацепление, то коммутаторная подгруппа $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ свободна от кручения.*

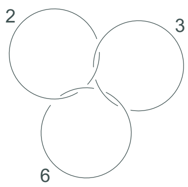


Рис. 1.

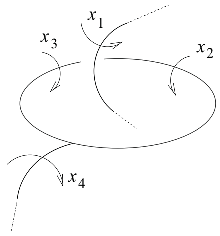


Рис. 2. Каждое ребро индекса 2.

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 12 и того факта, что в несферической геометрии каждая изометрия конечного порядка действует с неподвижными точками. $\square$

Пример 14. Рассмотрим трехмерный орбифолд $\mathscr{O}$, носитель которого гомеоморфен $S^3$, а его сингулярное множество, изображенное на рис. 1, состоит из трех компонент. Первая компонента имеет индекс 2, вторая — индекс 3, а третья — индекс 6.

В этом случае орбифолд имеет гиперболическую структуру (SnapPea [22]) и $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_6^2$. По следствию 13 фундаментальная группа $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ свободна от кручения.

Это легко вывести из того факта, что группа $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$ порождена $x, y, z$, которые связаны соотношениями $x^2 = y^3 = z^6 = 1$ и тремя другими соотношениями вида $w_1^{-1}xw_1x = 1$, $w_2^{-1}y^{-1}w_2y = 1$ и $w_3^{-1}z^{-1}w_3z = 1$, где $w_1 = zxy$, $w_2 = xy^{-1}z$ и $w_3 = yz^{-1}x$.

Записывая $\mathbb{Z}_6^2 = \langle a, b : a^6 = b^6 = aba^{-1}b^{-1} = 1\rangle$, легко видеть, что орбифолдная фундаментальная группа $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ является ядром сюръективного гомоморфизма $\phi : \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O}) \to \mathbb{Z}_6^2$, удовлетворяющего условиям $\phi(x) = a^3$, $\phi(y) = a^2$ и $\phi(z) = b$.

**3.3. Случай графа $\mathscr{G}$ с вершинами.** Так как мы рассматриваем только геометрические орбифолды, граф $\mathscr{G}$ всегда трехвалентен [8]. Следующий пример показывает, что в этом случае мы не обязательно получаем орбифолды Гумберта.

Пример 15 ($K'$ имеет неподвижные точки). Рассмотрим трехмерный гиперболический орбифолд $\mathscr{O}$, носитель которого гомеоморфен $S^3$, а часть его сингулярного множества (индекса 2) содержит подграф, как показано на рис. 2. Если группа $K < \mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^3)$ такая, что $\mathscr{O} = \mathbb{H}^3/K$, то порождающие $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ группы $K$ (каждая из которых индекса 2) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = x_4^2 = \dots = 1, \quad x_1x_2x_1 = x_3, \quad x_2x_3 = x_4.$$

Отсюда следует, что $x_4 = x_2x_1x_2x_1 \in K'$, т. е. $K'$ имеет кручение и, в частности, действует с неподвижными точками на $\mathbb{H}^3$.

Чтобы применить лемму 9, необходимо проверить принадлежность петли вокруг ребра графа $\mathscr{G}$ группе $K'$, что мы и сделаем. Рассмотрим связную компоненту графа и обозначим ее через $\mathscr{G}_1$ (все эти компоненты графа зацеплены).

Рассмотрим цилиндрическую окрестность $V$ графа $\mathscr{G}_1$, гомеоморфную телу с ручками некоторого рода $g$. Граница $S$ указанной окрестности является замкнутой ориентируемой поверхностью рода $g$. Каждое ребро графа $\mathscr{G}_1$ определяет гомотопически нетривиальную простую петлю на $S$. При этом каждая гомотопически нетривиальная простая петля на $S$ либо разбивающая, либо нет. Пусть $\gamma \subset S$ — одна из таких петель.

3.3.1. Первый случай. Если $\gamma$ разбивает $S$, то она определяет нетривиальный элемент группы $K'$ с неподвижными точками. Действительно, такая петля определяет элемент коммутаторной подгруппы $\pi_1(S^3 - \mathscr{G})$ так, что его $\Psi$-образ определяет элемент в коммутаторной подгруппе группы $K = \Psi(\pi_1(S^3 - \mathscr{G}))$ под действием $\Psi$. Отсюда следует, что в этом случае $K'$ имеет элемент, который действует с неподвижными точками.

3.3.2. Второй случай. Предположим, $\gamma$ не разбивает $S$. Обозначим вершину начала соответствующего ребра через $v_1$ и вершину конца — через $v_2$ (не обязательно различны).

Если вершины совпадают $v_1 = v_2 = v$, то с учетом того, что наш граф тривалентен, необходимо, чтобы $\mathscr{G}$ был односвязным. Поэтому, как и в предыдущем случае, $K'$ имеет элемент, который действует с неподвижными точками.

Если $v_1 \neq v_2$, то с учетом того, что $\mathscr{O}$ замкнут, возможные локальные группы из $K$ в вершинах $v_j$ являются конечными группами преобразований Мёбиуса, т. е. (i) $\mathbb{Z}_2^2$, (ii) $\mathscr{D}_r$, где $r \geq 3$, (iii) $\mathscr{A}_4$, (iv) $\mathscr{S}_4$ и (v) $\mathscr{A}_5$ [8]. В любом из случаев (ii)–(v) мы имеем нетривиальную коммутаторную подгруппу, действующую с неподвижными точками (представленную петлями вокруг ребер в соответствующих вершинах).

**3.4.** Теперь, подводя итог сказанному, мы готовы закончить доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что сингулярное множество $\mathscr{G}$ состоит из $r$ компонент, скажем $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_r$. Тогда если мы обозначим через $K_j$ орбифолдную фундаментальную группу орбифолда с носителем $S^3$ и сингулярным множеством $\mathscr{G}_j$, то по теореме 10 имеем

$$K/K' \cong K_1/K_1' \oplus K_2/K_2' \oplus \cdots \oplus K_r/K_r'.$$

Лемма 9 дает, что $K'$ действует без неподвижных точек тогда и только тогда, когда граф $\mathscr{G}$ не является 1-связным, и локальные группы в его вершинах равны $\mathbb{Z}_2^2$.

## 4. Примеры

**4.1. Гиперэллиптические многообразия.** *Гиперэллиптическим многообразием* $M$ называется геометрическое 3-многообразие, допускающее изометрию второго порядка $\tau : M \to M$ такую, что $M/\langle\tau\rangle$ гомеоморфно $S^3$. При этом $\tau$ называется *гиперэллиптической инволюцией* многообразия $M$. Гиперэллиптические многообразия изучались многими авторами (см., например, [23, 24]). В частности, в [23] показано, что гиперэллиптические многообразия существуют в каждой из восьми трехмерных геометрий Тёрстона.

Пусть $M$ — гиперэллиптическое многообразие с геометрией $(X, G)$ и $H \cong \mathbb{Z}_2$ — группа, порожденная гиперэллиптической инволюцией $\tau$. Тогда $M/H = \mathscr{O}$ является геометрическим орбифолдом с геометрией $(X, G)$, носитель которого гомеоморфен $S^3$, а сингулярное множество представляет собой узел или зацепление, каждая компонента которого имеет индекс 2.

Гомологическое накрытие трехмерного орбифолда Гумберта типа $(2, 1)$ является гиперэллиптическим многообразием. Однако не все гиперэллиптические многообразия могут быть представлены таким образом. Действительно, пусть $K < G$ таково, что $\mathscr{O} = X/K$. Мы знаем, что $\mathscr{O}$ является орбифолдом Гумберта

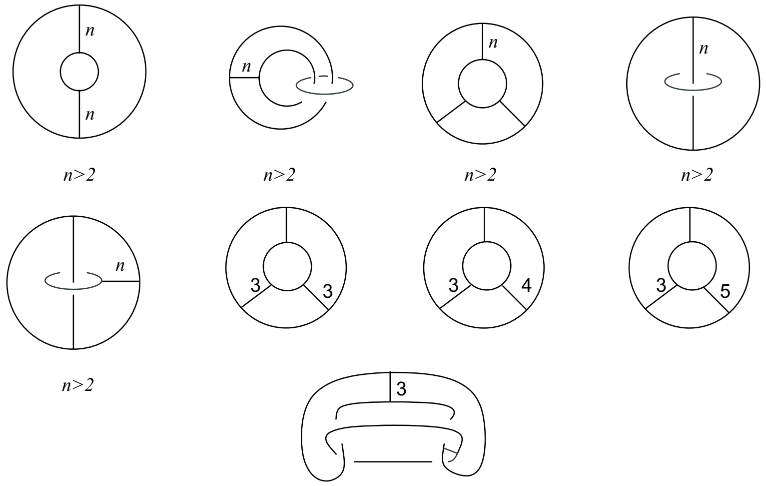


Рис. 3.

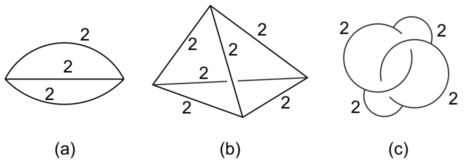


Рис. 4.

типа $(2,1)$ тогда и только тогда, когда $K'$ действует свободно, $M = X/K'$ и $[K : K'] = 2$. Как вытекает из следствия 3, сингулярное множество $M/H$ не может иметь подграфов, изображенных на рис. 2. Это позволяет установить

**Следствие 16.** *Пусть $(X, G)$ — трехмерная геометрия. Пусть $K < G$ такова, что орбифолд $X/K = \mathscr{O}$ является трехмерной сферой $S^3$ с сингулярным множеством $\mathscr{G}$, каждая компонента которого имеет индекс 2. Для того чтобы $\mathscr{O}$ был орбифолдом Гумберта типа $(2,1)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{G}$ был узлом или зацеплением с индексом 2.*

**4.2. Негиперболические орбифолды.** В статье [25] Данбар приводит список геометрических, но негиперболических орбифолдов, носитель которых гомеоморфен $S^3$. Теорема 1 может быть использована для того, чтобы определить, какие из них имеют в качестве гомологического накрытия геометрическое многообразие. Если сингулярным множеством орбифолда является узел или зацепление, то теорема 11 утверждает, что его гомологическим накрытием будет многообразие. В случае, когда сингулярное множество имеет вершины, гомологическое накрытие будет многообразием лишь при условии, что все ребра при каждой вершине имеют индекс 2 (в статье [25] это описывается отсутствием меток на ребре), а сингулярное множество не будет 1-связным. Все ссылки в этом пункте относятся к [25].

1. Из табл. 2 следует, что каждый нильорбифолд вида 2a гомотопически накрывается геометрическим многообразием.

2. Из табл. 3 заключаем, что орбифолд из [25, с. 84] — единственный нильорбифолд типа 2b, гомологическое накрытие которого не является геометри-

ческим многообразием. Он расслаивается над двумерным орбифолдом $D^2(3;3)$ с особыми слоями индекса 3 и эйлеровым числом $k \neq 0$.

3. Все евклидовы орбифолды типа 2b, гомологическое накрытие которых не является геометрическим, даны в следующем списке: $[P321]$, $[P422]$, $[I422]$, $[P312]$, $[R32]$, $[P622]$ и $[P6_322]$.

4. В табл. 4 содержится ровно три евклидовых орбифолда типа 4 с геометрическим гомологическим накрытием: $[P2,3]$, $[I2,3]$ и $[P4_132]$.

5. В табл. 6 приведены все сферические орбифолды типа 2a с геометрическим гомологическим накрытием.

6. Табл. 7 содержит аналогичный список сферических орбифолдов типа 2b. Полный набор орбифолдов, обладающих геометрией $S^2 \times \mathbb{E}^1$, которые не имеют геометрического гомологического накрытия, приведен на рис. 3.

7. Ни один из сферических орбифолдов типа 4 из табл. 8 не имеет геометрического гомологического накрытия.

8. Все солворбифолды из табл. 9 обладают гомологическими накрытиями с геометрической структурой.

Замечание 17. Приведем несколько сферических трехмерных орбифолдов Гумберта, которые не содержатся в списке Дамбара:
(i) $\left(S^3, \mathbb{Z}_2^2\right)$ с сингулярным множеством, приведенным на рис. 4(a);
(ii) $\left(S^3, \mathbb{Z}_2^3\right)$ с сингулярным множеством, приведенным на рис. 4(b);
(iii) $\left(\mathbb{RP}_3, \mathbb{Z}_2^3\right)$ с сингулярным множеством, приведенным на рис. 4(c).

**4.3. Гиперболические орбифолды.** Наконец, приведем примеры трехмерных гиперболических орбифолдов Гуммберта типа $(n,k)$ для всех возможных пар $n,k \geq 2$. Все примеры могут быть проверены с помощью компьютерных программ SnapPea [22] и Orb [26]. Ниже мы приведем все необходимые ссылки на работы, в которых эти примеры были рассмотрены.

4.3.1. Случай $n,k \geq 3$. Рассмотрим набор, состоящий из $k \geq 3$ простых петель, показанных на рис. 5. Пусть $\mathscr{O}$ — орбифолд с носителем $S^3$ и сингулярным множеством, образованным указанными петлями с индексами $n$. Указанный орбифолд обладает гиперболической структурой [27, 28]. Выберем дискретную подгруппу $K < \mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^3)$ такую, что $\mathscr{O} = \mathbb{H}^3/K$. Тогда $K$ имеет следующие порождающие $x_1, \dots, x_k$ (рис. 6) и соотношения

$$x_1^n = \dots = x_k^n = 1, \quad x_j x_{j+1}^{-1} x_{j+2} x_{j+1} = x_{j+1} x_j x_{j+1}^{-1} x_{j+2} \ (j \bmod k).$$

В этом случае $K/K' \cong \mathbb{Z}_n^k$ и $K'$ не имеет кручения.

4.3.2. Случай $n = 2, k = 1$. Нам необходимо рассмотреть узел $S^3$ с индексом 2 такой, что соответствующий ему орбифолд будет гиперболическим. В качестве примера возьмем узел $9_{49}$ с индексом два. В [29, 30] показано, что указанный орбифолд имеет в качестве двулистного накрытия замкнутое гиперболическое многообразие Фоменко — Матвеева — Викса. Оно, как известно, является наименьшим по объему в классе всех арифметических многообразий [31]. Другой пример представляет собой наипростейший $\pi$-узел $8_{18}$ (см., например, [29]).

4.3.3. Случай $n = 2$, $k = 2$. Рассмотрим зацепление $10^2_{138}$ с индексом 2 на каждой компоненте и носителем $S^3$, описанное в работе [30]. В результате получим орбифолд Гумберта типа $(2,2)$.

4.3.4. Случай $n = 2, k = 3$. Соответствующие примеры могут быть найдены в [24].

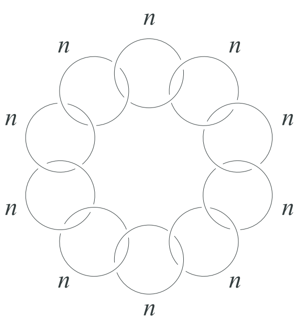

Рис. 5.

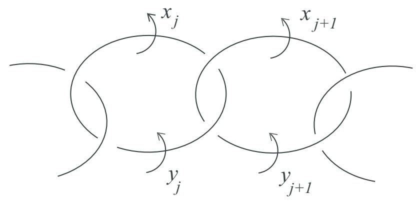

Рис. 6.

4.3.5. Случай $n = 2, k \geq 4$. Примеры даны в работе А. Ю. Веснина [32].

4.3.6. Случай $n = 3, k = 1$. Рассмотрим узел $5_2$ с индексом 3 в сфере $S^3$. В результате получим орбифолд Гумберта типа $(3, 1)$. Этот орбифолд получается факторизацией гиперболического многообразия Фоменко — Матвеева — Викса по действию циклической группы автоморфизмов порядка три [30].

4.3.7. Случай $n = 3, k = 2$. Рассмотрим зацепление Уайтхеда с индексом 3 на каждой компоненте и сферой $S^3$ в качестве носителя. В результате получим орбифолд Гумберта типа $(3, 2)$. Следует отметить, что гиперболичность этого орбифолда впервые установлена в работе [28].

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Greendlinger M.* On Dehn's algorithms for the conjugacy and word problems, with applications // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 641–677.

**2.** *Schupp P. E.* On Greendlinger's lemma // Comm. Pure Appl. Math. 1970. V. 23. P. 233–240.

**3.** *Fine B., Röhl F, Rosenberger G.* Two-generator subgroups of certain HNN groups // Combinatorial group theory (College Park, MD, 1988). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990. P. 19–23. (Contemp. Math.; 109).

**4.** *Fine B., Röhl F, Rosenberger G.* On HNN-groups whose three-generator subgroups are free // Infinite groups and group rings (Tuscaloosa, AL, 1992). Ser. Algebra, 1. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1993. P. 13–36.

**5.** *Rosenberger G.* On free subgroups of generalized triangle groups // Алгебра и логика. 1989. V. 28, N 2. P. 152–161.

**6.** *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.

**7.** *Geometry* II. Encyclopaedia of mathematical sciences / E. B. Vinberg (Ed.). Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1993. V. 29.

**8.** *Thurston W. P.* Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6. P. 357–381.

**9.** *Scott G. P.* The geometry of 3-manifolds // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15. P. 401–487.

**10.** *Filipkiewicz R. P.* Four-dimensional geometries: Ph. D. Thesis. University of Warwick, 1984.

**11.** *Jones G., Singerman D.* Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.

**12.** *Maclachlan C.* Abelian groups of automorphisms of compact Riemann surfaces // Proc. London Math. Soc. 1965. V. 15, N 3. P. 699–712.

**13.** *Berge C.* Graphs and Hypergraphs. New York: Amer. Elsevier Publ. Comp., INC, 1976. (North-Holland Math. Library; V. 6).

**14.** *Hidalgo R. A., Rosenberger G.* Torsion free commutator subgroups of generalized Coxeter groups // Results Math. 2005. V. 48, N 1/2. P. 50–64.

**15.** *Humbert G.* Sur un complexe remarquable de coniques // J. Ecole Polyth. 1894. V. 64. P. 123–149.

**16.** *Hungerford T. W.* Algebra. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974.

**17.** *The GAP Group.* GAP-Groups. Algorithms and programming. Version 4.4; 2006. (www.gap-system.org)
**18.** *Maclachlan C., Reid A. W.* The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 2002. (Graduate Texts in Math.; V. 219).
**19.** *Carocca A., González V., Hidalgo R. A., Rodríguez R.* On generalized Humbert curves // Israel J. Math. 2008. V. 64, N 2. P. 165–192.
**20.** *González-Diez G., Hidalgo R. A., Leyton M.* Generalized Fermat curves // J. Algebra. 2009. V. 321, N 6. P. 1643–1660.
**21.** *Haefliger A., Quach N. D.* Une presentation de groupe fundamental d'une orbifold // Asterisque. 1984. V. 116. P. 98–107.
**22.** *Weeks J.* SnapPea: a computer program for creating and studying hyperbolic 3-manifolds. Freely available from http://geometrygames.org/SnapPea/
**23.** *Mednykh A.* Three-dimensional hyperelliptic manifolds // Ann. Global Anal. Geom. 1990. V. 8, N 1. P. 13–19.
**24.** *Веснин А. Ю., Медных А. Д.* Трехмерные гиперэллиптические многообразия и гамильтоновы графы // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 745–763.
**25.** *Dunbar W.* Geometric orbifolds // Revista Matemática Complutense. 1988. V. 1, N 1–3. P. 67–99.
**26.** *Hodgson C.* Orb. A computer program for finding hyperbolic structures on 3-orbifolds and 3-manifolds. Freely available from http://www.ms.unimelb.edu.au/ cdh/comp.html
**27.** *Boileau M., Maillot S., Porti J.* Three-dimensional orbifolds and their geometric structures. Panoramas et Synthèses 15. Paris: Société Mathématique de France, 2003.
**28.** *Helling H., Kim A. C., Mennicke J. L.* Some honey-combs in hyperbolic 3-space // Comm. Algebra. 1995. V. 23, N 14?. P. 5169–5206.
**29.** *Mednykh A., Vesnin A. Yu.* Covering properties of small volume hyperbolic 3-manifolds // J. Knot Theory Ramifications. 1998. V. 7, N 3. P. 381–392.
**30.** *Mednykh A., Vesnin A. Yu.* Visualization of the isometry group action on the Fomenko–Matveev–Weeks manifold // J. Lie Theory. 1998. V. 8, N 1. P. 51–66.
**31.** *Chinburg T., Friedman E., Jones K., Reid A. W.* The arithmetic hyperbolic 3-manifold of smallest volume // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 2001. V. 30, N 1. P. 1–40.
**32.** *Vesnin A. Yu.* On hyperbolic $\pi$-orbifolds with arbitrary many singular components // Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universit'a di Trieste. 2007. V. 39. P. 375–386.

*Статья поступила 5 июня 2008 г.*

Идальго Рубен Антонио (Ruben Antonio Hydalgo)
Departamento de Matemáticas,
Universidad Técnica Federico Santa Maria, Valparaiso, Chile
`ruben.hidalgo@usm.cl`

Медных Александр Дмитриевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`mednykh@math.nsc.ru`