Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 517.977

РЕЛЕЙНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫМ ПРОЦЕССОМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ В ОКРЕСТНОСТИ НЕУСТОЙЧИВОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА

М. Б. Ивирсин

Аннотация. Исследован управляемый эволюционный процесс, состояния которого характеризуются точками вещественного банахова пространства и который описывается семейством полугрупп, в окрестности неустойчивого стационарного режима. Цель работы состоит в нахождении управления, при котором состояние процесса находится сколь угодно долго в указанной окрестности. Найдены условия, при которых такое управление возможно, и доказана теорема о его существовании. Кроме того, рассмотрено применение полученной теоремы на процессах, описываемых системами дифференциальных уравнений параболического типа.

Ключевые слова: теория управления, параметрическое управление, неустойчивый стационарный режим.

Введение

Рассмотрим эволюционный процесс, состояния которого характеризуются точками вещественного банахова пространства E с нормой $\|\cdot\|$. Допустим, что в каждый момент времени t состояние процесса однозначно определено его значением x при $t = 0$, а также конечным набором $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k$ некоторых свободных (управляющих) параметров. Тем самым в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times E$ определено отображение $F(t, u, x)$ со значениями в E. Предполагается, что при каждом фиксированном u это отображение является полугруппой по переменной t. Иными словами, $F(t_2, u, F(t_1, u, x)) = F(t_1 + t_2, u, x)$ и $F(0, u, x) = x$.

Пусть при некотором $u = u^0$ полугруппа $F(t, u^0, x)$ обладает стационарной точкой $x = x^0$, т. е. $F(t, u^0, x^0) \equiv x^0$. Эта точка называется *устойчивой по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\|x - x_0\| < \delta$ для всех $t > 0$ имеем $\|F(t, u^0, x) - F(t, u^0, x^0)\| < \varepsilon$.

Многие задачи приводят к полугруппам с неустойчивыми стационарными точками, которые тем не менее привлекательны из тех или иных практических соображений. Возникает вопрос: нельзя ли организовать такое управление $u(t)$ свободным параметром, чтобы вся траектория $F(t, u(t), x)$ целиком лежала в наперед заданной окрестности неустойчивой (при $u(t) \equiv u^0$) точки x^0? Искать управление будем в классе кусочно постоянных функций вида

$$u(t) \equiv u^j \quad \text{при } t_j < t < t_{j+1},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00221), АВЦП Рособразования (код проекта 2.1.1.4918), а также гранта Президиума РАН (программа фундаментальных исследований № 2).

где u^j и t_j — подлежащие дальнейшему определению постоянные.

Решение этой задачи зависит от свойств порождающего оператора A полугруппы линейных операторов $D_xF(t,u^0,x^0)$. Пусть оператор A имеет ровно m собственных значений в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>0$. Естественно предположить, что для организации искомого управления потребуется не менее m независимых управляющих параметров u_i. При $k=m=1$ и некоторых дополнительных условиях существование кусочно постоянного управления доказано в работах Е. И. Мусиенко [1, 2]. В случае $k=m=2$ аналогичный результат установлен нами [3] для конечномерного пространства E. В данной работе приведены дальнейшие обобщения на случай произвольного E, а также показана возможность применения полученных результатов к эволюционным процессам, порожденным нелинейными дифференциальными уравнениями параболического типа.

1. Основной результат

Всюду в дальнейшем предполагаем, что E — произвольное вещественное банахово пространство и $k=2$.

Пусть для некоторой окрестности $U\subset\mathbb{R}^2\times E$ точки (u^0,x^0) и произвольной константы $T>0$ отображение F удовлетворяет следующим условиям.

1. При $u=u^0$ отображение F имеет стационарную точку x^0.

2. При $t=1$ отображение F непрерывно дифференцируемо в U.

3. F является дифференцируемым по x и $F'_x(t,u,x)$ — равномерно непрерывное отображение в $[0,T]\times U$.

4. В точке $(1,u^0,x^0)$ оператор $\left(\frac{\partial F}{\partial x}-I\right)$ имеет ограниченный обратный.

При сделанных выше предположениях стационарное состояние существует не только для $u=u^0$, но и для всех u из некоторой окрестности точки u^0. Сформулируем это в виде леммы.

Лемма 1. *Существует функция $y(u)$, являющаяся непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки u^0 и такая, что $F(t,u,y(u))\equiv y(u)$.*

Доказательство. По теореме о неявной функции существует непрерывно дифференцируемая функция $y(u)$, удовлетворяющая тождеству $F(1,u,y(u))\equiv y(u)$. Обратно, существуют $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ такие, что если $\|u-u^0\|<\delta$, $\|x-x^0\|<\varepsilon$ и $F(1,u,x)=x$, то $x=y(u)$.

Покажем, что функция $y(u)$ искомая, т. е. удовлетворяет тождеству $F(t,u,y(u))\equiv y(u)$.

Пусть $t\in[0,1]$. В силу полугруппового свойства имеем

$$F(t,u,F(1-t,u,x))=F(1,u,x).$$

Обозначим $g(u,t)=F(t,u,y(u))$. Тогда

$$\begin{aligned}F(1,u,g(u,t))=F(t,u,F(1-t,u,g(u,t)))&=F(t,u,F(1-t,u,F(t,u,y(u))))\\&=F(t,u,F(1,u,y(u)))=F(t,u,y(u))=g(u,t).\end{aligned}$$

Кроме того, функция $g(u,t)$ непрерывна в u^0 для любого фиксированного $t\in[0,1]$ и как функция от t также является непрерывной.

Поскольку $y(u)$ непрерывна в u^0, существует такое $\bar\delta$, что если $\|u-u^0\|<\bar\delta$, то $|y(u)-x^0|_E<\varepsilon/2$. Пусть $\|u-u^0\|<\bar\delta$, тогда если $|g(u,t)-x^0|_E<\varepsilon$, то $g(u,t)=y(u)$, а следовательно, $|g(u,t)-x^0|_E<\varepsilon/2$. В силу непрерывности $g(u,t)$ по t либо $g(u,t)=y(u)$ для всех t, либо $|g(u,t)-x^0|_E\ge\varepsilon$ для всех t. Но $g(u,1)=y(u)$ при $t=1$, следовательно, второй вариант невозможен. Таким образом, мы доказали нужное тождество для $t \in [0,1]$. Для $t > 1$ оно сразу же получается из полугруппового свойства. Лемма доказана.

Далее введем обозначения $Y(t,u) = F'_x(t,u,y(u))$, $Y(t,u^0) = Y(t)$.

Пусть $\widetilde{E}$ — комплексная оболочка пространства E, $x \in \widetilde{E}$, $x = x_1 + ix_2$, $x_k \in E$ $(k = 1,2)$. Определим оператор $Y(t,u)$ на $\widetilde{E}$ следующим образом:

$$Y(t,u)x = Y(t,u)x_1 + iY(t,u)x_2.$$

Предположим, что выполняется условие

5. Спектр оператора $Y(1)$ состоит из двух простых вещественных собственных чисел $\sigma_1 > \sigma_2 > 1$ и точек, лежащих внутри единичного круга комплексной плоскости.

Обозначим через z_i нормированный собственный элемент оператора $Y(1)$, соответствующий σ_i $(i = 1,2)$, и докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Операторы $Y(t)$ образуют сильно непрерывную полугруппу. При этом $e^{\lambda_i t}$ является собственным числом оператора $Y(t)$, $t > 0$, где $\lambda_i = \ln \sigma_i$ $(i = 1,2)$, а соответствующим $e^{\lambda_i t}$ собственным элементом оператора $Y(t)$ будет z_i.*

Доказательство. Покажем сначала, что операторы $Y(t)$ образуют сильно непрерывную полугруппу. Полугрупповое свойство $Y(s+t) = Y(s)Y(t)$ следует из формулы дифференцирования сложной функции. Из условия $F(0,u,x) = x$ получаем, что при $t = 0$ оператор $Y(0)$ равен тождественному. Из условия 3 вытекает непрерывность $Y(t)$ по t. Таким образом, $Y(t)$ является сильно непрерывной полугруппой.

Покажем, что $Y(t)$ имеет собственные значения $e^{\lambda_i t}$ и соответствующие собственные векторы z_i. Из условия 5 имеем $Y(1)z = e^{\lambda}z$, где $z = z_1$, $\lambda = \lambda_1$ или $z = z_2$, $\lambda = \lambda_2$. Пусть $0 \le t \le 1$. Тогда в силу полугруппового свойства

$$Y(1) = Y(t)Y(1-t).$$

Положим $Y(t)z = y(t)$. Тогда

$$Y(1)y = Y(1)Y(t)z = Y(t)Y(1-t)Y(t)z = Y(t)Y(1)z = Y(t)e^{\lambda}z = e^{\lambda}y.$$

Таким образом, y является собственным вектором оператора $Y(1)$, отвечающим собственному значению e^{λ}. Следовательно, $y(t) = \mu(t)z$. Возьмем $t = \frac{m}{n}$. Имеем $Y\left(\frac{m}{n}\right)z = \mu\left(\frac{m}{n}\right)z$. В силу полугруппового свойства

$$Y(m)z = Y^m(1)z = e^{\lambda m}z.$$

С другой стороны,

$$Y(m)z = \left[Y\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n z = \mu^n z.$$

Следовательно,

$$\mu\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\lambda\frac{m}{n}}.$$

В силу непрерывности $\mu(t)$ по t имеем $\mu(t) = e^{\lambda t}$. Лемма доказана.

Рассмотрим в $\widetilde{E}$ спектральные проекторы

$$Q(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=1}(Y(t)-\lambda I)^{-1}\,d\lambda, \quad P(t) = I - Q(t).$$

Обозначим через $E^1(t)$, $E^2(t)$ области значений операторов $P(t)$, $Q(t)$ соответственно. Покажем, что $E^1(t)$, $E^2(t)$ от t не зависят, а следовательно, проекторы от t также не будут зависеть.

Множество $E^1(t)$ является линейной оболочкой векторов z_1 и z_2, а потому от t не зависит. Покажем, что $E^2(t)$ также не зависит от t.

Пусть $x \in E^2(t_1)$, $x^1 = P(t_2)x$, $x^2 = Q(t_2)x$, т. е. $x = x^1 + x^2$. Зафиксируем некоторое n и подберем m_n, ξ_n так, чтобы $nt_2 = m_n t_1 + \xi_n$, $0 \le \xi_n < t_1$. Имеем

$$Y(nt_2)x = Y(nt_2)x^1 + Y(nt_2)x^2 = Y(\xi_n)Y^{m_n}(t_1)x.$$

В силу полугруппового свойства

$$Y(nt_2)x^i = Y^n(t_2)x^i = Y_i^n(t_2)x^i = Y_i(nt_2)x^i,$$

где $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ — сужения $Y(t)$ на подпространства $E^1(t)$, $E^2(t)$. Далее,

$$Y(m_n t_1)x = Y^{m_n}(t_1)x = Y_2^{m_n}(t_1)x, \quad \text{так как } x \in E^2(t_1).$$

Тогда

$$x^1 = Y_1^{-n}(t_2)\big[Y(\xi_n)Y_2^{m_n}(t_1)x - Y_2^n(t_2)x^2\big].$$

В силу того, что $\|Y(\xi_n)\| \le C(t_1)$ и $\big\|Y_2^k(t_2)\big\| \le C_0$, имеем

$$\big|Y(\xi_n)Y_2^{m_n}(t_1)x\big|_E \le C(t_1)\big\|Y_2^{m_n}(t_1)\big\| \cdot |x|_E \le C(t_1)C_0|x|_E,$$

$$\big|Y_2^n(t_2)x^2\big|_E \le C_0|x^2|_E.$$

Следовательно,

$$|x^1|_E \le C_0\big\|Y_1^{-n}(t_2)\big\|\big(C(t_1)|x|_E + |x^2|_E\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow x^1 = 0 \Rightarrow x \in E^2(t_2).$$

Тем самым $E^2(t)$ не зависит от t.

Так как $E^1(t)$, $E^2(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ от t не зависят, то будем их обозначать через E^1, E^2, P, Q соответственно. Покажем, что пространство E инвариантно относительно каждого из этих проекторов. Достаточно доказать, что $PE \subset E$.

Для начала установим, что $P\bar{x} = \overline{Px}$. Пусть

$$R(\lambda)x = (Y - \lambda I)^{-1}x = y \Rightarrow (Y - \lambda I)y = x.$$

Обозначим $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $y = y_1 + iy_2$. Тогда

$$\begin{aligned}(Y - \bar{\lambda}I)\bar{y} = Y\bar{y} - \bar{\lambda}\bar{y} &= Yy_1 - iYy_2 - \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + i\lambda_1 y_2 + i\lambda_2 y_1 \\ &= (Yy_1 - \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + i(-Yy_2 + \lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1),\end{aligned}$$

$$(Y - \lambda I)y = (Yy_1 - \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + i(Yy_2 - \lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1).$$

Отсюда получаем, что

$$(Y - \bar{\lambda}I)\bar{y} = \bar{x} \Rightarrow R(\bar{\lambda})\bar{x} = \bar{y}.$$

Если в качестве Γ взять окружность с центром на действительной оси, то

$$\int\limits_\Gamma R(\lambda)\,d\lambda = -\int\limits_\Gamma R(\bar{\lambda})\,d\bar{\lambda},$$

$$P\bar{x} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R(\lambda)\bar{x}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R(\bar{\lambda})\bar{x}\,d\bar{\lambda}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \overline{R(\lambda)x}\,d\bar{\lambda} = \overline{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R(\lambda)x\,d\lambda} = \overline{Px}.$$

Таким образом,

$$x \in E \Rightarrow \bar{x} = x \Rightarrow Px = \overline{Px} \Rightarrow Px \in E.$$

Потребуем, наконец, чтобы выполнялось еще условие

6. Векторы $P\frac{\partial y(u)}{\partial u_1}\big|_{u=u^0}$, $P\frac{\partial y(u)}{\partial u_2}\big|_{u=u^0}$ линейно независимы, где $u = (u^1, u^2)$ в некотором базисе $\mathbb{R}^2$.

При выполнении условий 1–6 искомое управление будет существовать, а именно справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть отображение $F(t,u,x)$ удовлетворяет условиям 1–6. Тогда для любой окрестности V точки x^0 можно найти две области D_0, $D_1 \subset V$, $\rho(D_0, D_1) > 0$, а также еще одно значение параметра u^1 так, что траектория, начинающаяся в D_0 при параметре, равном u^0, через некоторое время попадет в D_1, не выйдя из V. Наоборот, траектория, начинающаяся в D_1 при параметре, равном u^1, через некоторое время попадет в D_0, не выйдя из V.*

Под $\rho(D_0, D_1)$ в приведенной теореме понимается расстояние между множествами, а именно $\rho(D_0, D_1) = \inf\limits_{x_0 \in D_0,\ x_1 \in D_1} \|x_0 - x_1\|$.

Для доказательства этой теоремы потребуются некоторые утверждения технического характера.

Через μ обозначим отрицательное число такое, что e^{μ} равно спектральному радиусу сужения $Y(1)$ на E^2. Тогда для любого ε_0 существует константа $C_1(\varepsilon_0)$ такая, что

$$|QY(t)x|_E \le C_1(\varepsilon_0)e^{(\mu+\varepsilon_0)t}|Qx|_E. \tag{1}$$

Введем замену $v = P[y(u)]$. В силу условия 6 $P \circ y$ — диффеоморфизм, а следовательно, существует дифференцируемая функция ψ такая, что $u = \psi(v)$. Положим $G(t,v,x) = F(t,\psi(v),x)$, $\tilde{y}(v) = y(\psi(v))$, тогда $G(t,v,\tilde{y}(v)) \equiv \tilde{y}(v)$. Обозначим образ параметра u^0 через v^0, т. е. $v^0 = P(y(u^0)) = Px^0$. В силу произведенной замены имеем $P\tilde{y}(v) = v$.

По формуле конечных приращений

$$|\tilde{y}(v) - \tilde{y}(v^0)|_E \le \sup_{0\le\theta\le 1}\|\tilde{y}'(v + \theta(v^0 - v))\| \cdot |v - v^0|_E$$
$$\le \sup_{\bar{v}\in V}\|\tilde{y}'(\bar{v})\| \cdot |v - v^0|_E \le C|v - v^0|_E. \tag{2}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ существуют окрестность $V \subset E^1$ точки v^0 и $\delta_0 > 0$ такие, что если $x \in E$, $v \in V$, $|x - \tilde{y}(v)| \le \delta_0$, то для любого $t \in [0,T]$ выполнено неравенство*

$$|G(t,v,x) - \tilde{y}(v) - Y(t)(x - \tilde{y}(v))|_E \le \varepsilon|x - \tilde{y}(v)|_E.$$

Доказательство. Воспользуемся следующим неравенством:

$$\|F(t,u,x) - F(t,u,y(u)) - F'_x(t,u,y(u))(x - y(u))\|$$
$$\le \sup_{0\le\theta\le 1}\|F'_x(t,u,y(u) + \theta(x - y(u))) - F'_x(t,u,y(u))\| \cdot \|x - y(u)\|. \tag{3}$$

Из условия 3 подберем δ так, что как только $\|(t',u',x')-(t,u,x)\|<\delta$, так сразу $\|F'_x(t',u',x')-F'_x(t,u,x)\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Выберем теперь x так, чтобы $\|x-y(u)\|<\delta$. Тогда из неравенства (3) имеем

$$\|F(t,u,x)-F(t,u,y(u))-F'_x(t,u,y(u))(x-y(u))\|\le\frac{\varepsilon}{2}\|x-y(u)\|. \qquad (4)$$

Будем считать, что u лежит в такой окрестности точки u^0, что $\|(t,u,y(u))-(t,u^0,y(u^0))\|<\delta$. При этом условии получаем

$$\begin{aligned}\|F'_x(t,u,y(u))(x-y(u))&-F'_x(t,u^0,y(u^0))(x-y(u))\|\\ &\le\|F'_x(t,u,y(u))-F'_x(t,u^0,y(u^0))\|\cdot\|x-y(u)\|\le\frac{\varepsilon}{2}\|x-y(u)\|. \qquad (5)\end{aligned}$$

Из (4) и (5) в силу неравенства треугольника, а также с учетом того, что $G(t,v,x)=F(t,\psi(v),x)$ и $\tilde y(v)=y(\psi(v))$, приходим к утверждению леммы.

Выберем пока второй параметр v^1, отличный от v^0, произвольным образом. Пусть начальные данные удовлетворяют условиям:

$$\frac{\sigma}{2}|v^1-v^0|_E\le|P(x-\tilde y(v^0))|_E\le\sigma|v^1-v^0|_E, \qquad (6)$$

$$|Q(x-\tilde y(v^0))|_E\le L|v^1-v^0|_E, \qquad (7)$$

где σ и L — константы, которые определим далее. Тогда

$$|x-\tilde y(v^0)|_E\le|P(x-\tilde y(v^0))|_E+|Q(x-\tilde y(v^0))|_E\le(\sigma+L)|v^1-v^0|_E.$$

Покажем, как выбирались константы σ и L. Обратимся к оценке (1), из которой можно найти T_0 такое, что

$$C_1\left(-\frac{\mu}{2}\right)e^{\frac{\mu T_0}{2}}\le\frac{1}{2}. \qquad (8)$$

Далее константа σ выбирается настолько малой, чтобы при всех $|Px|<\sigma$ выполнялось неравенство $|PY(T_0)x|<1/2$. Теперь по σ подберем T_1 такое, что

$$|Px|>\frac{\sigma}{2}\Rightarrow|PY(T_1)x|>2,$$

и применительно к лемме 3 возьмем $T=T_1$. Чтобы определить константу L, докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Существует константа $L>0$ такая, что если $|Q(x-\tilde y(v^0))|_E\le L|v^0-v^1|_E$, то для любого $\tau\in[T_0,T_1]$ выполнено неравенство*

$$|Q(G(\tau,v^0,x)-\tilde y(v^1))|_E\le L|v^0-v^1|_E.$$

Обратно, если $|Q(x-\tilde y(v^1))|_E\le L|v^0-v^1|_E$, то для любого $\tau\in[T_0,T_1]$ выполнено неравенство

$$|Q(G(\tau,v^1,x)-\tilde y(v^0))|_E\le L|v^0-v^1|_E.$$

Доказательство. Воспользовавшись леммой 3, оценками (1), (8) и условием леммы, имеем

$$\begin{aligned}|Q(G(\tau,v^0,x)-\tilde y(v^1))|_E&\le|Q(G(\tau,v^0,x)-\tilde y(v^0)-Y(\tau)(x-\tilde y(v^0)))|_E\\ &\quad+|QY(\tau)(x-\tilde y(v^0))|_E+|Q(y^0-\tilde y(v^1))|_E\\ &\le C_1\varepsilon|x-\tilde y(v^0)|_E+\frac{1}{2}|Q(x-\tilde y(v^0))|_E+C_1|\tilde y(v^0)-\tilde y(v^1)|_E\\ &\le(C_1\cdot\varepsilon(\sigma+L)+\frac{1}{2}L+C_1\cdot C)|v^0-v^1|_E\le L|v^0-v^1|_E,\end{aligned}$$

$$C_1 \cdot \varepsilon\sigma + C_1 \cdot C \leq L\left(\frac{1}{2} - C_1 \cdot \varepsilon\right) \Rightarrow L \geq \frac{C_1 \cdot (\varepsilon\sigma + C)}{\frac{1}{2} - C_1 \cdot \varepsilon}.$$

В приведенной цепочке неравенств константа C_1 бралась из условия $\|Q\| \leq C_1$. Как видно, $L \geq 2C_1 \cdot C$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, можно считать, что для ε, меньшего некоторого ε_0, в качестве L можно взять $4C_1 \cdot C$. В обратную сторону доказывается аналогично. Лемма доказана.

Далее установим оценку

$$|P(G(t, v^i, x) - \tilde{y}(v^i) - Y(t)(x - \tilde{y}(v^i)))|_E \leq \alpha|v^1 - v^0|_E, \tag{9}$$

где α может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора ε. Из леммы 3 имеем

$$\begin{aligned}|P(G(t, v^i, x) &- \tilde{y}(v^i) - Y(t)(x - \tilde{y}(v^i)))|_E \\ &\leq \|P\|\varepsilon|x - \tilde{y}(v^i)|_E \leq \|P\|\varepsilon(\sigma + L)|\tilde{y}(v^1) - \tilde{y}(v^0)|_E \\ &\qquad\leq \|P\| \cdot \varepsilon \cdot (\sigma + L) \cdot C \cdot |v^1 - v^0|_E = \alpha|v^1 - v^0|_E.\end{aligned}$$

В вышеописанных рассуждениях требовалась лишь малость ε, что влечет за собой малость окрестности V точки v^0. Заметим, что если изначально выбрать другое v^1, лежащее в V, то все константы и оценки останутся прежними, а получившаяся константа α будет зависеть только от окрестности V.

Приступим к построению процесса управления. Напомним, что наша цель состоит в отыскании такого управления $v(t)$, чтобы траектория $x(t) = G(t, v(t), x(0))$ оставалась в малой окрестности стационарного состояния $x^0 = \tilde{y}(v^0)$, иными словами, для всех $t > 0$ должно выполняться неравенство $|x(t) - x^0| < \tilde{\varepsilon}$. Положим $v(t) \equiv v^0$, тогда разность $x(t) - x^0$ в силу леммы 3 можно приблизить величиной $Y(t)(x(0) - \tilde{y}(v^0))$. По лемме 2 проекция $Y(t)$ на E^1 выглядит следующим образом:

$$PY(t)(x(0) - \tilde{y}(v^0)) = (\xi(0) - \xi_0)e^{\lambda_1 t}z_1 + (\eta(0) - \eta_0)e^{\lambda_2 t}z_2,$$

где $Px(0) = (\xi(0), \eta(0))$, $P\tilde{y}(v^0) = v^0 = (\xi_0, \eta_0)$ — координаты в базисе (z_1, z_2). Выразим коэффициент, стоящий перед z_2, через коэффициент перед z_1:

$$(\eta(0) - \eta_0)e^{\lambda_2 t} = (\eta(0) - \eta_0)(e^{\lambda_1 t})^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = C((\xi(0) - \xi_0)e^{\lambda_1 t})^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Следовательно, вся траектория $PY(t)(x(0) - \tilde{y}(v^0)) + v^0$ лежит на кривой

$$|\eta - \eta_0| = C|\xi - \xi_0|^\lambda, \quad \text{где } \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1. \tag{10}$$

Выберем две кривые, описываемые уравнением (10), для разных значений константы C, которые ограничивают некоторую область L_0 в квадранте $\xi > \xi_0$, $\eta > \eta_0$ (рис. 1). Эта область обладает тем свойством, что если проекция $x(0)$ лежит в L_0, то и вся траектория $PY(t)(x(0) - \tilde{y}(v^0)) + v^0$, $t \geq 0$, будет находиться там же. Теперь выберем еще один параметр v^1, который находится правее L_0, и по аналогии построим область L_1, состоящую из траекторий отображения $PY(t)(x(0) - \tilde{y}(v^1)) + v^1$, расположенных в квадранте $\xi < \xi_1$, $\eta < \eta_1$ (см. рис. 1). Далее построим окрестности областей L_0, L_1 радиуса $\alpha|v^0 - v^1|$, которые обозначим через N_0, N_1 соответственно. Через D_0 и D_1 обозначим пересечения $N_1 \cap L_0$ и $N_0 \cap L_1$ соответственно. В результате получим качественную картину, изображенную на рис. 1.

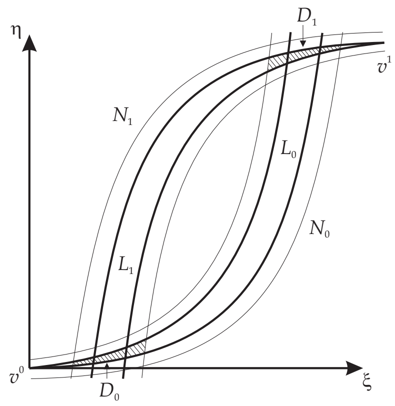

Рис. 1.

Основание к тому, что можно подобрать все необходимые константы (α, C_1, C_2 из уравнения (10)), а также выбрать второй параметр так, чтобы картина имела вид, как показано на рис. 1, описано в работе [3].

Если второй параметр v^1 выбран в такой окрестности V, что для выбранного α справедлива оценка (9), то $Px(0) \in L_i \Rightarrow PY(t)(x(0) - \tilde{y}(v^i)) + v^i \in L_i \Rightarrow PG(t, v^i, x(0)) \in N_i$. Если это не так, то произведем сжатие рисунка относительно v^0 так, что v^1 перейдет в $\tilde{v}^1$, лежащее в необходимой окрестности V. Осталось заметить, что при таком сжатии области L_i перейдут в $\widetilde{L}_i$, которые будут ограничены также кривыми вида (10), но с другими константами. Области N_i перейдут в $\widetilde{N}_i$, которые также будут являться окрестностями $\widetilde{L}_i$ радиуса $\alpha|v^0 - \tilde{v}^1|$. Тем самым получим ту же качественную картину, где имеет место оценка (9).

Далее становится понятно, как организовать кусочно постоянное управление проекцией на E^1. Пусть $v = v^0$ и проекция траектории $G(t, v^0, x)$ на E^1 в начальный момент времени находится в области D_0. Тогда в последующие моменты времени она будет лежать в области N_0 и обязательно пересечет D_1. Следовательно, некоторое время проекция будет находиться в D_1, где мы «переключим» параметр, положив $v = v^1$. Далее, продолжение этой траектории будет находиться в области N_1 и пересечет D_0. В один из моментов времени, когда проекция окажется в области D_0, мы снова вернемся к значению параметра $v = v^0$, и т. д. Процесс будет повторяться циклическим образом сколь угодно долго.

В заключение осталось заметить, что при таком процессе управления проекция на подпространство E^2 будет все время оставаться достаточно малой. Это вытекает из леммы 4. Таким образом, процесс управления построен.

2. Практическое применение результата

Проиллюстрируем возможность применения приведенной выше теоремы на примере одной параболической задачи.

Введем следующие обозначения: Ω — замкнутая область в $\mathbb{R}^n$, т. е. совершенное связное множество, совпадающее с замыканием своей внутренности; $\partial\Omega$ — граница Ω, $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t \in [0,T]\}$ — цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $Q'_T = \Omega \times (0,T]$, $S_T = \partial\Omega \times [0,T]$ — боковая поверхность Q_T.

Напомним определения некоторых функциональных пространств (см. [4–6]). Пусть $l \geq 0$, $q \leq l$, $u(x,t)$ — функция, определенная в прямоугольнике Q'_T и имеющая непрерывные производные $D_t^\mu D_x^\nu u(x,t)$ порядка $2\mu + |\nu| \leq l$. Рассмотрим следующие полунормы:

$$[u]_{q,l,x}^{Q_T} = \sum_{2\mu+|\nu|=[l]} \sup_{\substack{(x,t)\in Q'_T;\\ (x',t)\in Q'_T}} t^{\frac{l-q}{2}} \frac{\left|D_t^\mu D_x^\nu u(x,t) - D_t^\mu D_x^\nu u(x',t)\right|}{|x-x'|^{l-[l]}},$$

$$[u]^{Q_T}_{q,l,t} = \sum_{0<l-2\mu-|\nu|<2} \sup_{\substack{0<t_2<t_1\le T;\\ x\in\Omega}} t_2^{\frac{l-q}{2}} \frac{\left|D^\mu_t D^\nu_x u(x,t_1) - D^\mu_t D^\nu_x u(x,t_2)\right|}{|t_1-t_2|^{\frac{l-2\mu-|\nu|}{2}}}.$$

Для целого $k \ge 0$ положим

$$|u|^{Q_T}_{q,k} = \sum_{2\mu+|\nu|=k} \sup_{Q'_T} t^{\frac{k-q}{2}} \left|D^\mu_t D^\nu_x u\right|.$$

Наконец, пусть

$$[u]^{Q_T}_{q,l} = |u|^{Q_T}_{q,l} + [u]^{Q_T}_{q,l,t}$$

для целого l и

$$[u]^{Q_T}_{q,l} = [u]^{Q_T}_{q,l,x} + [u]^{Q_T}_{q,l,t}$$

для нецелого l.

Символами $[u]^{Q_T}_l$ и $|u|^{Q_T}_k$ обозначим полунормы, получающиеся из $[u]^{Q_T}_{q,l}$ и $|u|^{Q_T}_{q,k}$ при $l = q$ и $k = q$ соответственно. Если функция u не зависит от t, то $[u]^{Q_T}_l$ и $|u|^{Q_T}_k$ преобразуются в обыкновенные гёльдеровские полунормы, которые будем обозначать через $[u]^{\Omega}_l$ и $|u|^{\Omega}_k$ соответственно.

Пространством $C^{l,\ l/2}_{x\ \ t}(Q_T)$ называется множество функций, заданных в Q_T и имеющих конечную норму

$$\|u\|^{Q_T}_l = [u]^{Q_T}_l + \sum_{0\le k<l} |u|^{Q_T}_k.$$

Заметим, что если u не зависит от t, то $\|u\|^{Q_T}_l$ преобразуется в норму $\|u\|^{\Omega}_l$ в стандартном гёльдеровском пространстве $C^l(\Omega)$.

Когда q нецелое, *пространством* $C^l_q(Q_T)$ называется множество функций $u(x,t)$, имеющих непрерывные производные $D^\mu_t D^\nu_x u(x,t)$ порядка $2\mu + |\nu| \le l$ в Q'_T и конечную норму:

$$\|u\|^{Q_T}_{q,l} = [u]^{Q_T}_{q,l} + \sum_{p<k<l} |u|^{Q_T}_{q,k} + \begin{cases} \|u\|^{Q_T}_q, & q \ge 0,\\ |u|^{Q_T}_{q,0}, & q<0, \end{cases} \tag{11}$$

где $p = \max\{q, 0\}$. Когда q целое, пространство $C^l_q(Q_T)$ определяется как пополнение $C^{l,\ l/2}_{x\ \ t}(Q_T)$ по норме (11).

Напомним следующий результат из работы [5], который нам понадобится в дальнейшем. Пусть имеется в Q_τ линейная задача параболического типа

$$u_t = \sum_{i,j} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_i b_i(x)u_{x_i} + g(x,t), \quad u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{12}$$

где $g(x,t) \in C^\alpha_{q-2}(Q_\tau)$ с любым $q>0$, $a_{ij}(x) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $b_j(x) \in C^\alpha(\Omega)$, $0<\alpha<1$, $u_0(x) \in C(\Omega)$ и выполнено условие согласования

$$u_0(x)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{13}$$

Тогда эта задача имеет единственное решение в классе $C^{2+\alpha}_0(Q_\tau)$ и для него справедливы оценки

$$\|u\|^{Q_\tau}_{0,2+\alpha} \le C\big(|u_0|^{\Omega}_0 + \|g(x,t)\|^{Q_\tau}_{q-2,\alpha}\big), \tag{14}$$

$$|u|^{Q_\tau}_0 \le C\big(|u_0|^{\Omega}_0 + |g(x,t)|^{Q_\tau}_0\big). \tag{15}$$

Оценка (15) явно в работе [5] не представлена, но легко может быть получена из соответствующих теорем.

Далее будем рассматривать в Q_τ нелинейную задачу параболического типа

$$u_t = \sum_{i,j}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_i b_i(x)u_{x_i} + f(x,u,s), \quad u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{16}$$

где $a_{ij}(x) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $b_j(x) \in C^{\alpha}(\Omega)$, $u_0(x) \in C(\Omega)$, выполнено условие согласования (13), $s \in \mathbb{R}^2$ — параметр и функция $f(x,u,s)$ является дважды непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных. Докажем теорему о классической разрешимости задачи (16).

Обозначим через $H(\rho)$ замкнутое множество в пространстве $C_0^{2+\alpha}(Q_\tau)$, состоящее из функций $v(x,t)$, равных $u_0(x)$ при $t=0$ и удовлетворяющих неравенству

$$\|v\|^{Q_\tau}_{0,2+\alpha} \le \rho.$$

Определим на множестве H оператор W, положив $W(v) = w$, где $w(x,t)$ — решение линейной задачи

$$w_t = \sum_{i,j}(a_{ij}(x)w_{x_i})_{x_j} + \sum_i b_i(x)w_{x_i} + f(x,v,s), \quad w|_{S_T} = 0, \quad w|_{t=0} = u_0(x). \tag{17}$$

Из результата, упомянутого выше, следует, что эта задача имеет единственное решение, принадлежащее классу $C_0^{2+\alpha}(Q_\tau)$, для которого справедлива оценка

$$\|w\|^{Q_\tau}_{0,2+\alpha} \le C\bigl(|u_0|^{\Omega}_0 + \|f(x,v(x,t),s)\|^{Q_\tau}_{q-2,\alpha}\bigr). \tag{18}$$

Покажем, что при надлежащем выборе ρ образ множества H при отображении W содержится в H. Пусть $|u_0|^{\Omega}_0 \le r$. Из оценки (18) получаем

$$\|w\|^{Q_\tau}_{0,2+\alpha} \le C\bigl(r + \|f(x,v(x,t),s)\|^{Q_\tau}_{q-2,\alpha}\bigr).$$

Нетрудно показать, что для любого $u \in C_0^{\alpha}(Q_\tau)$ справедливо неравенство

$$\|u\|^{Q_\tau}_{q-2,\alpha} \le g(\tau)\|u\|^{Q_\tau}_{0,\alpha}, \tag{19}$$

где $g(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$. Кроме того, из леммы 3 работы [5] при $\|u\|^{Q_\tau}_{0,\alpha} < \rho$ функция $f(x,u(x,t),s)$ принадлежит $C_0^{\alpha}(Q_\tau)$ и имеет место оценка

$$\|f(x,u(x,t),s)\|^{Q_\tau}_{0,\alpha} < K_\rho. \tag{20}$$

Следовательно,

$$C\bigl(r + \|f(x,v(x,t),s)\|^{Q_\tau}_{q-2,\alpha}\bigr) \le C\bigl(r + g(\tau)\|f(x,v(x,t),s)\|^{Q_\tau}_{0,\alpha}\bigr) \le C(r + g(\tau)K_\rho).$$

Выберем теперь ρ так, чтобы $Cr < \frac{\rho}{2}$. Затем выберем τ_0 такое, чтобы для любого $\tau \le \tau_0$ имели $Cg(\tau)K_\rho < \frac{\rho}{2}$, что всегда можно сделать, так как $g(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$. При таком выборе ρ и τ получаем

$$\|w\|^{Q_\tau}_{0,2+\alpha} \le \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho.$$

Таким образом, оператор W отображает множество H в себя.

Покажем, что оператор W является сжимающим на множестве H. Пусть u и v принадлежат H. Из (18) имеем

$$\|W(u) - W(v)\|^{Q_\tau}_{0,2+\alpha} \le C\|f(x,u,s) - f(x,v,s)\|^{Q_\tau}_{q-2,\alpha}.$$

Воспользуемся формулой Тейлора. Имеем

$$f(x,u,s)-f(x,v,s)=\int\limits_0^1 f'_u(x,v+\theta(u-v),s)\,d\theta\cdot(u-v).$$

Из определения нормы $\|\cdot\|_{q,l}^{Q_\tau}$ нетрудно получить, что если $u\in C_0^\alpha(Q_\tau)$, $v\in C_{q-2}^\alpha(Q_\tau)$, то имеет место неравенство

$$\|uv\|_{q-2,\alpha}^{Q_\tau}\le C(\tau)\|u\|_{0,\alpha}^{Q_\tau}\|v\|_{q-2,\alpha}^{Q_\tau}, \tag{21}$$

где константа $C(\tau)$ ограничена при $\tau\to 0$.

Таким образом,

$$C\|f(x,u,s)-f(x,v,s)\|_{q-2,\alpha}^{Q_\tau}=C\left\|\int\limits_0^1 f'_u(x,v+\theta(u-v),s)d\theta\cdot(u-v)\right\|_{q-2,\alpha}^{Q_\tau}$$
$$\le C\cdot C(\tau)\left\|\int\limits_0^1 f'_u(x,v+\theta(u-v),s)d\theta\right\|_{0,\alpha}^{Q_\tau}\|u-v\|_{q-2,\alpha}^{Q_\tau}$$
$$\le C\cdot C(\tau)K_\rho g(\tau)\|u-v\|_{0,2+\alpha}^{Q_\tau}\le\frac{1}{2}\|u-v\|_{0,2+\alpha}^{Q_\tau},$$

что всегда можно сделать, выбрав τ достаточно малым.

Итак, в силу принципа сжатых отображений оператор W имеет в множестве H единственную неподвижную точку $u(x,t)$, которая и будет искомым решением задачи (16). Сформулируем получившийся результат в виде теоремы.

Теорема 2. *Для любого $r>0$ найдется такое $\tau>0$, что если в задаче (16) начальные данные принадлежат классу $C(\Omega)$, удовлетворяют условию согласования (13) и оценке $|u_0|_0^\Omega\le r$, коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$ принадлежат классам $C^{1+\alpha}(\Omega)$, $C^\alpha(\Omega)$ соответственно и функция $f(x,u,s)$ является дважды непрерывно дифференцируемой по u и по x, то эта задача имеет единственное решение в классе $C_0^{2+\alpha}(Q_\tau)$.*

Если в задаче (16) функцию $f(x,u,s)$ заменить на $g(x,u,s)=f(x,u,s)\chi(u)$, где $\chi(u)$ — бесконечно дифференцируемая функция такая, что

$$\chi(u)=\begin{cases}1 & \text{при } |u|\le R,\\ 0 & \text{при } |u|>2R,\end{cases}$$

то, используя известные теоремы [6], решение новой задачи можно продолжить на любой промежуток времени $[\tau,T]$. Тем самым можно корректно определить оператор $F(t,u_0(x),s)=u(x,t,s)$, действующий из пространства $\mathbb{R}\times C(\Omega)\times\mathbb{R}^2$ в пространство $C_0^{2+\alpha}(Q_T)$, где $u(x,t,s)$ — решение модифицированной задачи. Данный оператор является полугруппой по переменной t и при $t=0$ является тождественным. Далее установим необходимые свойства оператора F, позволяющие в силу теоремы 1 осуществить управление решением модифицированной задачи. При этом оно все время будет оставаться в некотором шаре радиуса R, а следовательно, будет совпадать с решением исходной задачи (16). Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что функция $f(x,u,s)$ изначально равна нулю вне шара радиуса $2R$.

Далее докажем небольшую техническую лемму, которая нам понадобится в дальнейшем.

Лемма 5. *Пусть заданы неотрицательная непрерывная функция $f(t)$, а также такая функция $g(u)$, что $g(u) \to 0$ при $u \to 0$. Тогда существуют константы δ_0 и M такие, что для любого $\delta \le \delta_0$ если функция f для любого $t \le T_0$ удовлетворяет оценкам*

$$f(t) \le C(\delta + g(f(t))f(t)), \quad f(0) \le \delta,$$

то

$$f(t) \le M\delta. \tag{22}$$

Доказательство. В качестве константы M возьмем $M = 2C + \varepsilon$, где ε — некоторая произвольная положительная константа, а δ_0 выберем настолько малым, что $|g(u)| \le \frac{1}{2C}$ при $|u| \le M\delta_0$.

Пусть для некоторого t имеем $f(t) \le M\delta$. Тогда

$$g(f(t)) \le \frac{1}{2C} \Rightarrow f(t) \le C\delta + \frac{1}{2}f(t) \Rightarrow f(t) \le 2C\delta = (M - \varepsilon)\delta.$$

Таким образом, не существует такого t_0, что $(M - \varepsilon)\delta < f(t_0) \le M\delta$. В силу непрерывности f и $f(0) \le \delta$ получаем заключение леммы.

Лемма доказана.

Предположим, что $u_0(x)$ при $s = s^0$ является стационарным состоянием задачи (16), т. е. имеет место тождество

$$\sum_{i,j}(a_{ij}(x)(u_0)_{x_i})_{x_j} + \sum_i b_i(x)(u_0)_{x_i} + f(x, u_0(x), s^0) \equiv 0.$$

Лемма 6. *Существуют окрестность U точки $(u_0(x), s^0)$ в пространстве $C(\Omega) \times \mathbb{R}^2$ и константа M такие, что для любого δ как только $|(u_1(x), s^1) - (u_2(x), s^2)|_0 \le \delta$, то $|v|_0^{Q_T} \le M\delta$, где $v(x,t) = F(t, u_2(x), s^2) - F(t, u_1(x), s^1)$.*

Доказательство. Для начала покажем непрерывность оператора F в точке $(u_0(x), s^0)$. Обозначим $v_1(x,t,s) = F(t, u_1(x), s^1) - F(t, u_0(x), s^0)$. Тогда $v_1(x,t,s)$ является решением следующей задачи:

$$(v_1)_t = \sum_{i,j}(a_{ij}(x)(v_1)_{x_i})_{x_j} + \sum_i b_i(x)(v_1)_{x_i} + f(x, u_1(x), s^1) - f(x, u_0(x), s^0),$$

$$(v_1)|_{S_T} = 0, \quad (v_1)|_{t=0} = u_1(x) - u_0(x) = h(x), \tag{23}$$

где u_1, u_0 — решения задачи (16) с начальными данными $u_1(x)$, $u_0(x)$ соответственно. По формуле Тейлора имеем

$$\begin{aligned} f(x, u_1, s^1) - f(x, u_0, s^0) = f'_u(x, u_0, s^0)v + (f'_u(b) - f'_u(x, u_0, s^0))v + f'_s(b)h_s \\ = f'_u(x, u_0, s^0)v + g(x,t), \end{aligned}$$

где $h_s = s^1 - s^0$, $b = (x, u^1, s^1) + \theta((x, u^0, s^0) - (x, u^1, s^1))$, $0 < \theta < 1$. Тогда для задачи (23), используя (15), получаем оценку

$$|v_1|_0^{Q_T} \le C\big(|h(x)|_0^{\Omega} + |g(x,t)|_0^{Q_T}\big). \tag{24}$$

Предполагая ограниченность всех частных производных первого порядка для функции $f(x,u,s)$ при $|(u,s)|_0 \le r$, а также оценку $|(u_0(x), s^0) - (u_1(x), s^1)|_0 \le \delta$, имеем

$$|g(x,t)|_0^{Q_T} = \big|(f'_u(b) - f'_u(x, u_0, s^0))v + f'_s(b)h_s\big|_0^{Q_T} \le C\big(g\big(|v|_0^{Q_T}\big)|v|_0^{Q_T} + \delta\big),$$

где $g(u) \to 0$ при $u \to 0$. Подставляя полученную оценку в (24), получаем

$$|v_1|_0^{Q_T} \le C\big(g\big(|v_1|_0^{Q_T}\big)|v_1|_0^{Q_T} + \delta\big),$$

откуда в силу леммы 5 следует, что $|v_1|_0^{Q_T} \le M\delta = \varepsilon$. Тем самым мы доказали непрерывность оператора F в точке (u_0, s^0).

Теперь определим константу K из следующих соображений. Пусть имеется следующая задача:

$$\begin{gathered} w_t = \Big[\sum_{i,j}(a_{ij}(x)w_{x_i})_{x_j} + \sum_i b_i(x)w_{x_i} + f'_u(x,u_0,s^0)w\Big] + g_1(x,t), \\ w|_{S_T} = 0, \quad w|_{t=0} = w_0(x). \end{gathered} \tag{25}$$

Тогда для ее решения, используя (15), получаем оценку

$$|w|_0^{Q_T} \le K\big(|w_0(x)|_0^{\Omega} + |g_1(x,t)|_0^{Q_T}\big). \tag{26}$$

Так как оператор F непрерывен в точке $(u_0(x), s^0)$, существует окрестность U этой точки такая, что для любого $(\bar{u_0}(x), \bar{s}) \in U$ справедлива оценка

$$|f'_u(x,\bar{u},\bar{s}) - f'_u(x,u_0,s^0)|_0^{Q_T} \le \frac{1}{2K},$$

где $\bar{u} = F(t, \bar{u_0}, \bar{s})$.

Функция $v(x,t)$, определенная в условии леммы, удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{gathered} v_t = \Big[\sum_{i,j}(a_{ij}(x)v_{x_i})_{x_j} + \sum_i b_i(x)v_{x_i} \\ \qquad + f'_u(x,u_0,s^0)v\Big] + (f'(b) - f'_u(x,u_0,s^0))v + f'_s(b)h_s, \\ v|_{S_T} = 0, \quad v|_{t=0} = u_2(x) - u_1(x) = h(x), \end{gathered} \tag{27}$$

где $b = (x,u^2,s^2) + \theta((x,u^1,s^1) - (x,u^2,s^2))$, $0 < \theta < 1$. Тогда из оценки (26) получаем

$$\begin{aligned} |v|_0^{Q_T} &\le K\big(|h(x)|_0^{\Omega} + |(f'(b) - f'_u(x,u_0,s^0))v + f'_s(b)h_s|_0^{Q_T}\big) \\ &\le K\bigg(C_1\delta + \frac{1}{2K}|v|_0^{Q_T}\bigg) \Rightarrow |v|_0^{Q_T} \le 2KC_1\delta = M\delta. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из этой леммы сразу получаем, что оператор F является равномерно непрерывным в окрестности U.

Покажем, что оператор $F(t,u,s)$ является дифференцируемым по переменной u. Считаем, что параметр s зафиксирован. Обозначим

$$u_1(x,t) = F(t, u_0 + h, s), \quad u_2(x,t) = F(t,u_0,s), \quad v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Тогда v удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{gathered} v_t = \sum_{i,j}(a_{ij}(x)v_{x_i})_{x_j} + \sum_i b_i(x)v_{x_i} + f'_u(x,u_2,s)v - \int_0^1 f''_{uu}(x,u_2+\theta v,s)v^2 d\theta, \\ v|_{S_T} = 0, \quad v|_{t=0} = h(x). \end{gathered} \tag{28}$$

В силу леммы 6 справедлива оценка

$$|v|_0^{Q_T} \le M|h(x)|_0^{\Omega}. \tag{29}$$

Линеаризуем задачу (28) и обозначим через $w(x,t)$ ее решение:

$$\begin{gathered} w_t = \sum_{i,j} (a_{ij}(x) w_{x_i})_{x_j} + \sum_i b_i(x) w_{x_i} + f'_u(x, u_2, s) w, \\ w|_{S_T} = 0, \quad w|_{t=0} = h(x). \end{gathered} \tag{30}$$

Положим $z(x,t) = v(x,t) - w(x,t)$. Тогда $z(x,t)$ удовлетворит следующей системе:

$$z_t = \sum_{i,j} (a_{ij}(x) z_{x_i})_{x_j} + \sum_i b_i(x) z_{x_i} + f'_u(x, u_2, s) z - \int\limits_0^1 f''_{uu}(x, u_2 + \theta v, s) v^2 d\theta,$$

$$z|_{S_T} = 0, \quad z|_{t=0} = 0. \tag{31}$$

Используя (15), для $z(x,t)$ получаем оценку

$$|z|_0^{Q_T} \le C \left| \int\limits_0^1 f''_{uu}(x, u_2 + \theta v, s) v^2 d\theta \right|_0^{Q_T} \le C \sup_u |f''_{uu}(x,u,s)| \big(|v|_0^{Q_T}\big)^2$$

$$\le C_1 \big(|v|_0^{Q_T}\big)^2 \le M' \big(|h(x)|_0^{\Omega}\big)^2.$$

Таким образом,

$$\frac{|F(t, u_2(x), s^2) - F(t, u_1(x), s^1) - w(x,t)|_0^{Q_T}}{|h(x)|_0^{\Omega}} \to 0$$

при $|h(x)|_0^{\Omega} \to 0$, а следовательно, решение задачи (30) является частной производной отображения F по u в точке u_0 на элементе h, т. е.

$$\left.\frac{\partial F(t,u,s)}{\partial u}\right|_{u=u_0} h(x) = w(x,t). \tag{32}$$

Покажем, что оператор $\frac{\partial F(t,u,s)}{\partial u}$ является равномерно непрерывным в U. Из оценки (26) сразу вытекает, что для решения задачи (30) справедливо

$$|w|_0^{Q_T} \le 2K |h|_0^{\Omega}.$$

Обозначим

$$u_1(x,t) = F(t, u_1(x), s^1), \quad u_2(x,t) = F(t, u_2(x), s^2),$$

$$w_1(x,t) = \left.\frac{\partial F(t,u,s^1)}{\partial u}\right|_{u=u_1(x)} h(x), \quad w_2(x,t) = \left.\frac{\partial F(t,u,s^2)}{\partial u}\right|_{u=u_2(x)} h(x),$$

$$v = w_1 - w_2.$$

Тогда v — решение задачи

$$\begin{gathered} v_t = \sum_{i,j} (a_{ij}(x) v_{x_i})_{x_j} + \sum_i b_i(x) v_{x_i} + f'_u(x, u_1, s) w_1 - f'_u(x, u_2, s) w_2, \\ v|_{S_T} = 0, \quad v|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{33}$$

Имеем

$$f'_u(x,u_1,s)w_1 - f'_u(x,u_2,s)w_2 = (f'_u(x,u_1,s) - f'_u(x,u_2,s))w_1 \\ + f'_u(x,u_2,s)(w_1 - w_2) = (f'_u(x,u_1,s) - f'_u(x,u_2,s))w_1 \\ + (f'_u(x,u_2,s) - f'_u(x,u_0,s))v + f'_u(x,u_0,s)v.$$

Применяя оценку (26) и используя равномерную непрерывность оператора F, находим

$$|v|_0^{Q_T} \le K|(f'_u(x,u_1,s) - f'_u(x,u_2,s))w_1 + (f'_u(x,u_2,s) - f'_u(x,u_0,s))v|_0^{Q_T} \\ \le K|f'_u(x,u_1,s) - f'_u(x,u_2,s)|_0^{Q_T}|w_1|_0^{Q_T} + K|f'_u(x,u_2,s) - f'_u(x,u_0,s)|_0^{Q_T}|v|_0^{Q_T} \\ \le \varepsilon \cdot 2K^2|h|_0^{\Omega} + \frac{1}{2}|v|_0^{Q_T}.$$

Отсюда получаем

$$|v|_0^{Q_T} \le C\varepsilon|h|_0^{\Omega}.$$

Тем самым получаем равномерную непрерывность.

Аналогично показывается, что решение задачи

$$w_t = \sum_{i,j}(a_{ij}(x)w_{x_i})_{x_j} + \sum_i b_i(x)w_{x_i} + f'_u(x,u_1,s^1)w + f'_s(x,u_1,s^1)h_s, \\ w|_{S_T} = 0, \quad w|_{t=0} = 0 \tag{34}$$

является частной производной отображения F по s в точке s^1 на элементе h_s, т. е.

$$\left.\frac{\partial F(t,u_0,s)}{\partial s}\right|_{s=s_1} h_s = w(x,t), \tag{35}$$

а также то, что оператор $\frac{\partial F(t,u,s)}{\partial s}$ является равномерно непрерывным в U.

Потребуем, чтобы спектр оператора $\frac{\partial F(1,u_0,s^0)}{\partial u}$ состоял из двух простых положительных собственных чисел $\sigma_1 > \sigma_2 > 1$ и точек, лежащих внутри единичного круга. Так как оператор компактный, что следует из теоремы Арцела и оценки (14), спектр его является точечным, а следовательно, $\lambda = 1$ — регулярное значение. Таким образом, оператор $\frac{\partial F(1,u_0,s^0)}{\partial u} - I$ имеет ограниченный обратный.

Наконец, потребуем, чтобы для оператора F выполнялось условие 6 из разд. 1. Теперь все условия теоремы 1 будут выполнены и мы сможем организовать управление решением задачи (16) в окрестности неустойчивого состояния $u_0(x)$ при $s = s^0$.

Замечание. В ходе рассуждений нигде не использовалось, что система имеет второй порядок. Тем самым полученный результат несложно распространяется на системы параболического типа произвольного порядка с произвольными граничными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусиенко Е. И.* Управление решением одной параболической задачи в окрестности неустойчивого стационарного решения // Динамика сплошной среды. 1981. № 51. С. 68–83.
2. *Мусиенко Е. И.* Управление решением некоторых параболических задач в окрестности неустойчивого стационарного решения // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 12. С. 2120–2130.

3. *Ивирсин М. Б.* Параметрическое управление решениями эволюционной задачи в окрестности неустойчивого стационарного режима // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 760–771.
4. *Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.* Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1975.
5. *Белоносов В. С.* Оценки решений параболических систем в весовых классах Гёльдера и некоторые их приложения // Мат. сб. 1979. Т. 110, № 2. С. 163–188.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Статья поступила 23 сентября 2008 г.

Ивирсин Максим Борисович
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090
imb@gorodok.net