Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 517.95

ПОДОБИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Р. К. Газизов, В. О. Лукащук

Аннотация. Предлагаются условия подобия изоморфных приближенных групп преобразований и их алгебр Ли. Построение преобразований подобия сводится к решению систем полулинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с малым параметром. Исследуются вопросы разрешимости переопределенных систем такого типа, а также структура их общего решения.

Ключевые слова: приближенные группы преобразований, алгебра Ли, изоморфизм алгебр Ли.

Введение

Хорошо известно, что реализации изоморфных алгебр Ли в пространстве дифференциальных операторов первого порядка могут приводить к неподобным алгебрам Ли операторов. Классическим примером этого служит представление двумерных алгебр Ли операторами дифференцирования с двумя переменными (см., например, [1]). В соответствии с теорией Ли каждой алгебре соответствует группа Ли, и аналогичные проблемы появляются в теории непрерывных групп преобразований.

Вопросы подобия групп Ли преобразований (и алгебр Ли) существенны, например, в задачах классификации дифференциальных уравнений с точки зрения их свойств симметрии. Также знание преобразования подобия алгебр Ли, допускаемых двумя дифференциальными уравнениями, может быть использовано для построения замены переменных, связывающей эти уравнения.

Исследования вопросов подобия точных групп было выполнено Л. П. Эйзенхартом [2] (см. также [3]), который рассматривал две r-параметрические произвольные группы преобразований в $\mathbb{R}^n$:

$$T_a : \bar{x}^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^n; a^1, \dots, a^r), \quad {T'}_{a'} : \bar{x}'^\alpha = h^\alpha({x'}^1, \dots, {x'}^n; {a'}^1, \dots, {a'}^r),$$

$\alpha = 1, \dots, n$, и сформулировал необходимые и достаточные условия их подобия. Эти условия и их доказательства проведены в терминах соответствующих алгебр Ли операторов. А именно, исследование подобия групп преобразований сводится к исследованию разрешимости системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, коэффициентами которой являются коэффициенты базисных операторов рассматриваемых алгебр. Такие системы замкнуты в силу замкнутости операции коммутирования базисных операторов и изоморфизма рассматриваемых алгебр Ли. Их совместность равносильна разрешимости некоторой системы алгебраических уравнений, связывающей переменные x^α и ${x'}^\alpha$ рассматриваемых алгебр Ли.

В данной работе аналогичная задача решается для приближенных групп преобразований. Рассмотрение подобия приближенных групп эквивалентно рассмотрению подобия приближенных алгебр Ли [4] и сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с малым параметром, вывод которых приведен в разд. 1. Ранее в [5] исследовались частные случаи разрешимости таких систем. А именно, в [5] рассматривались системы линейно несвязных в главном порядке по ε уравнений в случаях, когда они либо замкнуты (т. е. при вычислении скобки Якоби не получаются новые линейно несвязные с исходными уравнения), либо условием замкнутости системы является система алгебраических уравнений на переменные $x^\alpha, {x'}^\alpha$, решение которой не приводит к уравнениям только на переменные x^α или только на ${x'}^\alpha$. Случай систем линейно связных уравнений, часто возникающий в вопросах подобия приближенных групп преобразований и приводящий к дополнительным дифференциальным уравнениям даже при выполнении условия замкнутости системы (см. п. 3.2), в [5] не рассматривался.

В отличие от случая точных алгебр Ли замкнутость приближенных алгебр Ли относительно операции коммутирования (даже в случае их изоморфности) не влечет замкнутости соответствующей системы дифференциальных уравнений (см. разд. 2), что приводит к увеличению объема вычислений при решении задачи. Поэтому важным является построение необходимых условий подобия приближенных алгебр Ли, которые приведены в разд. 1 и 3. В разд. 4 приведены примеры построения преобразования подобия для некоторых приближенных алгебр Ли.

В работе используются следующие обозначения. Равенство $f(x,\varepsilon) = o(\varepsilon)$ означает, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$. Под приближенным равенством $f \approx g$ понимается $f(x,\varepsilon) = g(x,\varepsilon) + o(\varepsilon)$. В выражениях вида $\xi_a^\alpha(x,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ предполагается суммирование по повторяющемуся индексу.

1. Система дифференциальных уравнений для преобразования подобия

В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматриваются две r-параметрические приближенные (с точностью $o(\varepsilon)$) группы преобразований: группа $\widetilde{G}_r$ преобразований [4, 6]

$$T_a : \bar{x}^\alpha \approx f^\alpha(x,a,\varepsilon) \equiv f_0^\alpha(x;a) + \varepsilon f_1^\alpha(x;a) + o(\varepsilon), \quad \alpha = 1,\ldots,n, \tag{1}$$

где приближенные функции f^α рассматриваются в точках $x = (x^1,\ldots,x^n)$ и зависят от параметров $a^1,\ldots,a^r$, и группа $\widetilde{H}_r$ преобразований

$$T'_{a'} : {\bar{x}'}^\alpha \approx h^\alpha(x',a',\varepsilon) \equiv h_0^\alpha(x';a') + \varepsilon h_1^\alpha(x';a') + o(\varepsilon), \quad \alpha = 1,\ldots,n, \tag{2}$$

где функции h^α рассматриваются в точках $x' = ({x'}^1,\ldots,{x'}^n)$ и зависят от параметров ${a'}^1,\ldots,{a'}^r$. Подобие этих групп рассматривается в смысле следующего определения.

Определение 1. Приближенные группы преобразований $\widetilde{G}_r$ и $\widetilde{H}_r$ называются *подобными*, если существует система r независимых функций $\theta^\alpha(a)$ таких, что можно найти невырожденное (при $\varepsilon = 0$) преобразование координат

$${x'}^\alpha = \psi^\alpha(x,\varepsilon) = \psi_0^\alpha(x) + \varepsilon\psi_1^\alpha(x) + o(\varepsilon), \quad \alpha = 1,\ldots,n, \tag{3}$$

такое, что замена $a' = \theta(a)$, $x' = \psi(x,\varepsilon)$, $\bar{x}' = \psi(\bar{x},\varepsilon)$ переводит преобразования $T'_{a'}$ в преобразования T_a.

Вопрос подобия приближенных групп преобразований эквивалентен вопросу подобия соответствующих им приближенных алгебр Ли [4]. Поэтому вместо групп $\widetilde{G}_r$ и $\widetilde{H}_r$ будем рассматривать соответствующие им приближенные алгебры Ли L и L' с базисными операторами

$$L: \quad \begin{gathered} X_{a_0} = \xi^\alpha_{a_0}(x,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \approx \left(\xi^\alpha_{a_0(0)}(x) + \varepsilon\xi^\alpha_{a_0(1)}(x)\right)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \\ \varepsilon X_{a_1} = \varepsilon\xi^\alpha_{a_1}(x,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \approx \left(\varepsilon\xi^\alpha_{a_1(0)}(x)\right)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \\ \alpha = 1,\dots,n, \quad a_0 = 1,\dots,r_0, \quad a_1 = r_0+1,\dots,r, \end{gathered} \tag{4}$$

и

$$L': \quad \begin{gathered} X'_{a_0} = {\xi'}^\alpha_{a_0}(x',\varepsilon)\frac{\partial}{\partial X'^\alpha} \approx \left({\xi'}^\alpha_{a_0(0)}(x') + \varepsilon{\xi'}^\alpha_{a_0(1)}(x')\right)\frac{\partial}{\partial X'^\alpha}, \\ \varepsilon X'_{a_1} = \varepsilon{\xi'}^\alpha_{a_1}(x',\varepsilon)\frac{\partial}{\partial X'^\alpha} \approx \left(\varepsilon{\xi'}^\alpha_{a_1(0)}(x')\right)\frac{\partial}{\partial X'^\alpha} \end{gathered} \tag{5}$$

соответственно.

Определение 2. Приближенная алгебра Ли L' операторов $\langle X'_{a_0}, \varepsilon X'_{a_1}\rangle$ изоморфна алгебре Ли L с операторами $\langle X_{a_0}, \varepsilon X_{a_1}\rangle$, $a_0 = 1,\dots,r_0$, $a_1 = r_0 + 1,\dots,r$, если существует взаимно однозначное линейное отображение $\phi: L \to L'$ такое, что выполняется равенство

$$\phi([\varepsilon^i X_{a_i}, \varepsilon^j X_{b_j}]) \approx [\phi(\varepsilon^i X_{a_i}), \phi(\varepsilon^j X_{b_j})],$$

где $i,j = 0,1$.

Очевидно, что если приближенные алгебры подобны, то они изоморфны. По аналогии с точными алгебрами Ли [7] можно показать, что в изоморфных приближенных алгебрах Ли можно выбором базиса добиться равенства их структурных констант. В силу определения 1 подобие двух приближенных алгебр с операторами (4) и (5) равносильно существованию преобразования вида (3), переводящего операторы одной алгебры в операторы другой. Тогда формула замены переменных в операторах $X' = X(x')\frac{\partial}{\partial x'}$ с учетом вида операторов (4) и (5) дает

$${\xi'}^\alpha_{a_0(0)}(x') + \varepsilon{\xi'}^\alpha_{a_0(1)}(x') \approx \left(\xi^\beta_{a_0(0)}(x) + \varepsilon\xi^\beta_{a_0(1)}(x)\right)\frac{\partial X'^\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{6}$$

$$\varepsilon{\xi'}^\alpha_{a_1(0)}(x') \approx \varepsilon\xi^\beta_{a_1(0)}(x)\frac{\partial X'^\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{7}$$

$$\alpha,\beta = 1,\dots,n, \quad a_0 = 1,\dots,r_0, \quad a_1 = r_0+1,\dots,r.$$

Следовательно, построение преобразования подобия сводится к решению системы $n\cdot r$ полулинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с малым параметром вида (6), (7) на неизвестные X'^α, $\alpha = 1,\dots,n$. Систему (6), (7) удобно рассматривать как совокупность n систем (получаемых при фиксированном α), каждая из которых определяется одинаковыми r дифференциальными операторами X_{a_0}, εX_{a_1} и которые связаны между собой через свободные члены (левые части уравнений (6) и (7)).

Условия полноты и совместности рассматриваемой системы (6), (7) изучаются в следующих разделах. Здесь отметим, что условие невырожденности преобразования подобия (3), записанное в виде

$$\mathrm{rg}\left\|\frac{\partial\psi^\alpha_0}{\partial x^\beta}\right\| = n,$$

дает равенство рангов следующих матриц:

$$\mathrm{rg}\left\|{\xi'}^\alpha_{a_0(0)}\right\| = \mathrm{rg}\left\|\xi^\alpha_{a_0(0)}\right\|, \quad \mathrm{rg}\left\|{\xi'}^\alpha_{a(0)}\right\| = \mathrm{rg}\left\|\xi^\alpha_{a(0)}\right\|, \tag{8}$$

где $\left\|\xi^\alpha_{a(0)}\right\| = \left\|\begin{matrix}\xi^\alpha_{a_0(0)} \\ \xi^\alpha_{a_1(0)}\end{matrix}\right\|$, $\alpha = 1,\dots,n$, $a_0 = 1,\dots,r_0$, $a_1 = r_0+1,\dots,r$.

Лемма 1. *Если алгебры L и L' с базисными операторами* (4) *и* (5) *подобны, то выполняются условия* (8).

Также из подобия приближенных алгебр L и L' следует подобие точных алгебр $L_{0(0)}$ и ${L'}_{0(0)}$ с базисными операторами $X_{a_0(0)}$ и ${X'}_{a_0(0)}$ соответственно и подобие алгебр $L_{(0)}$ и ${L'}_{(0)}$, порождаемых операторами $X_{a_0(0)}, X_{a_1(0)}$ и ${X'}_{a_0(0)}, {X'}_{a_1(0)}$ соответственно. Здесь

$$X_{a_i(0)} = \xi^{\alpha}_{a_i(0)}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \quad {X'}_{a_i(0)} = {\xi'}^{\alpha}_{a_i(0)}(x')\frac{\partial}{\partial {X'}^{\alpha}}, \quad i = 0, 1.$$

2. Условие замкнутости системы

Перепишем систему (6), (7) для фиксированного α в виде

$$X_{a_0}({X'}^{\alpha}) \approx {\xi'}^{\alpha}_{a_0}(x', \varepsilon), \quad \varepsilon X_{a_1}({X'}^{\alpha}) \approx \varepsilon {\xi'}^{\alpha}_{a_1}(x')$$

и проверим ее замкнутость. Для вычисления скобок Якоби (см. [8]) введем дифференциальные операторы $\overline{X}_{a_0} = \big(\xi^i_{a_0(0)}(x) + \varepsilon\xi^i_{a_0(1)}(x)\big)D_i$, соответствующие уравнениям (6), и $\overline{X}_{a_1} = \xi^i_{a_1(0)}(x)D_i$, соответствующие уравнениям (7), где $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial {X'}^{\alpha}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial {X'}^{\alpha}} + \ldots$ — оператор полной производной ($i = 1, \ldots, n$). Тогда скобки Якоби $\{\ ,\ \}$ для уравнений системы (6), (7) определим в виде

$$\begin{aligned}
&\big\{\varepsilon^t X_{a_t}({X'}^{\beta}) - \varepsilon^t {\xi'}^{\beta}_{a_t}(x', \varepsilon), \varepsilon^s X_{b_s}({X'}^{\beta}) - \varepsilon^s {\xi'}^{\beta}_{b_s}(x', \varepsilon)\big\}\\
&\qquad \approx \varepsilon^m \big(\overline{X}_{a_t}\big(X_{b_s}{X'}^{\beta} - {\xi'}^{\beta}_{b_s}(x', \varepsilon)\big) - \overline{X}_{b_s}\big(X_{a_t}{X'}^{\beta} - {\xi'}^{\beta}_{a_t}(x', \varepsilon)\big)\big)\\
&\qquad\qquad \approx \varepsilon^m \left([X_{a_t}, X_{b_s}]{X'}^{\beta} + \left({\xi'}^{\mu}_{b_s}\frac{\partial {\xi'}^{\beta}_{a_t}}{\partial {X'}^{\mu}} - {\xi'}^{\mu}_{a_t}\frac{\partial {\xi'}^{\beta}_{b_s}}{\partial {X'}^{\mu}}\right)\right),
\end{aligned} \tag{9}$$

где $s, t = 0, 1$, $m = \max\{s, t\}$, $[X_{a_t}, X_{b_s}] \approx X_{a_t}(X_{b_s}) - X_{b_s}(X_{a_t})$ — коммутатор операторов X_{a_t} и X_{b_s}.

Так как операторы X_{a_0}, εX_{a_1} и ${X'}_{a_0}$, $\varepsilon {X'}_{a_1}$ образуют базисы приближенных алгебр Ли L и L', то (9) при $t = 0$, $s = 0, 1$ дают

$$\big\{X_{a_0}({X'}^{\beta}) - {\xi'}^{\beta}_{a_0}(x', \varepsilon), X_{b_0}({X'}^{\beta}) - {\xi'}^{\beta}_{b_0}(x', \varepsilon)\big\} \approx c^j_{a_0 b_0}\xi^{\mu}_j(x', \varepsilon)\frac{\partial {X'}^{\beta}}{\partial x^{\mu}} - {c'}^j_{a_0 b_0}{\xi'}^{\beta}_j(x', \varepsilon),$$

$$\varepsilon\big\{X_{a_0(0)}({X'}^{\beta}) - {\xi'}^{\beta}_{a_0(0)}(x'), X_{b_1}({X'}^{\beta}) - {\xi'}^{\beta}_{b_1}(x')\big\} \approx \varepsilon c^j_{a_0 b_1}\xi^{\mu}_j(x')\frac{\partial {X'}^{\beta}}{\partial x^{\mu}} - \varepsilon {c'}^j_{a_0 b_1}{\xi'}^{\beta}_j(x'),$$

где $c^j_{a_0 b_s}$ и ${c'}^j_{a_0 b_s}$, $j = 1, \ldots, r$, — структурные константы алгебр L и L' соответственно. В силу изоморфизма исходных алгебр (${c'}^j_{a_0 b_s} = c^j_{a_0 b_s}$, $s = 0, 1$) эти скобки представляют собой линейную комбинацию уравнений системы (6), (7) и не приводят к новым уравнениям. Отметим, что если исходные алгебры не изоморфны, то получаются алгебраические уравнения на переменные ${X'}^{\beta}$, что означает несовместность рассматриваемой системы.

Скобка Якоби двух уравнений первого порядка по ε (равенство (9) при $t = s = 1$) в общем случае может приводить к новому уравнению такого же вида, в то время как коммутатор соответствующих приближенных операторов всегда равен нулю как оператор второго порядка по ε. Это обусловлено тем, что вычисление скобок Якоби связано с вычислением коммутаторов в множествах $X_{a_0(0)}$, $X_{a_1(0)}$ и ${X'}_{a_0(0)}$, ${X'}_{a_1(0)}$, которые в общем случае не образуют алгебры Ли. Если некоторые коммутаторы операторов вида $X_{a_1(0)}$ не представимы как линейные комбинации $X_{a_0(0)}$, $X_{a_1(0)}$, то добавим их к этим операторам. Аналогичные операции выполним для соответствующих операторов из множества $X'_{a_0(0)}$, $X'_{a_1(0)}$. В итоге получим точные алгебры Ли $L_{(0)}$ и $L'_{(0)}$ с операторами $X_{a_0(0)}$, $X_{a_1(0)}$, $\widetilde{X}_{d_1(0)}$ и $X'_{a_0(0)}$, $X'_{a_1(0)}$, $\widetilde{X}'_{d_1(0)}$. Операторы $\widetilde{X}_{d_1(0)}$ и $\widetilde{X}'_{d_1(0)}$ порождают новые уравнения в системе (7). Если алгебры $L_{(0)}$ и $L'_{(0)}$ имеют различные структурные константы, то из уравнений (9) следует, что система

$$X_{a_0}(X'^{\alpha}) \approx \xi'^{\alpha}_{a_0}(x',\varepsilon), \quad \varepsilon X_{a_1}(X'^{\alpha}) \approx \varepsilon \xi'^{\alpha}_{a_1}(x'), \quad \varepsilon \widetilde{X}_{d_1}(X'^{\alpha}) \approx \varepsilon \tilde{\xi}'^{\alpha}_{d_1}(x'), \tag{10}$$

$\alpha = 1,\ldots,n$, $a_0 = 1,\ldots,r_0$, $a_1 = r_0+1,\ldots,r$, $d_1 = r+1,\ldots,\tilde{r}$, $r \le \tilde{r} \le n$, несовместна.

Следовательно, необходимыми условиями подобия приближенных алгебр Ли являются не только условия их изоморфности, но и условие изоморфности точных алгебр Ли $L_{(0)}$ и $L'_{(0)}$, а также *согласованность структур* алгебр L с $L_{(0)}$, L' с $L'_{(0)}$. Это означает, что возможно выбрать базисные операторы в L и $L_{(0)}$ так, что структурные константы в коммутаторах операторов из L типа X_{a_0} между собой и типа X_{a_0} с εX_{a_1} в главном порядке по ε совпадают со структурными константами в коммутаторах соответствующих операторов в $L_{(0)}$. Далее будем считать структуры точных и приближенных алгебр Ли согласованными.

Из изложенного следует, что построение преобразования подобия в алгебрах Ли с операторами X_{a_0}, εX_{a_1} и X'_{a_0}, $\varepsilon X'_{a_1}$ равносильно решению этой же задачи для приближенных алгебр с операторами X_{a_0}, εX_{a_1}, $\varepsilon \widetilde{X}_{d_1}$ и X'_{a_0}, $\varepsilon X'_{a_1}$, $\varepsilon \widetilde{X}'_{d_1}$. В этих алгебрах операторы $X_{a_0(0)}$, $X_{a_1(0)}$, $\widetilde{X}_{d_1(0)}$ и $X'_{a_0(0)}$, $X'_{a_1(0)}$, $\widetilde{X}'_{d_1(0)}$ образуют базисы точных алгебр Ли. Именно такие алгебры обычно возникают в приложениях при рассмотрении приближенных алгебр, получаемых как возмущения некоторых точных. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только такие алгебры и считать, что система (6), (7) является замкнутой.

3. Условие совместности системы

Будем рассматривать систему (6), (7), которая замкнута и все уравнения которой линейно независимы. Однако уравнения системы могут оказаться линейно связными, т. е. некоторые из них получаются как линейная комбинация других с коэффициентами, являющимися функциями от x^{α} или X'^{α}.

3.1. Случай линейно несвязных операторов. Пусть все операторы приближенной алгебры L (а значит, в силу (8) также и L') не являются линейно связными, т. е. $\mathrm{rg}\|\xi^{\alpha}_{a(0)}\| = r$. Тогда система (6), (7) интегрируема (см. [5]) и ее общее решение в нулевом порядке по ε зависит от n произвольных функций $n-r$ переменных, а в первом порядке по ε — от n произвольных функций $n-r_0$ переменных. При этом аргументами в произвольных функциях являются инварианты приближенных групп преобразований.

Тем самым справедлива

Теорема 1. *Если две r-мерные приближенные алгебры Ли L и L' изоморфны и выполняются условия:*

1) *структуры алгебр Ли с операторами $\langle X_{a_0(0)}, X_{a_1(0)}\rangle$ и $\langle X'_{a_0(0)}, X'_{a_1(0)}\rangle$ согласованы со структурами соответствующих приближенных алгебр Ли с операторами (4) и (5) соответственно,*

2) $\mathrm{rg}\|\xi^{\alpha}_{a_0(0)}\| = \mathrm{rg}\|\xi'^{\alpha}_{a_0(0)}\|$, $\mathrm{rg}\|\xi^{\alpha}_{a(0)}\| = \mathrm{rg}\|\xi'^{\alpha}_{a(0)}\|$,

3) $\mathrm{rg}\|\xi^{\alpha}_{a(0)}\| = r$,

то L и L' подобны. Также подобны соответствующие приближенные группы $\widetilde{G}_r$ и $\widetilde{H}_r$.

Замечание 1. Если приближенные алгебры Ли не являются возмущением точных алгебр, то по аналогии с разд. 2 скобки Якоби могут дать новые дифференциальные уравнения. Тогда теорема 1 остается справедливой, если условия 1 и 2 выполняются для системы (10), т. е.

$$\mathrm{rg}\left\| \begin{matrix} \xi^\alpha_{a(0)} \\ \xi^\alpha_{d_1(0)} \end{matrix} \right\| = \mathrm{rg}\left\| \begin{matrix} {\xi'}^\alpha_{a(0)} \\ {\xi'}^\alpha_{d_1(0)} \end{matrix} \right\| = \tilde{r}.$$

3.2. Случай линейно связных операторов. Пусть существенные операторы алгебры линейно связны, т. е. часть операторов $X_{a_0(0)}, X_{a_1(0)}$ является линейной комбинацией с некоторыми функциями $\varphi(x)$ оставшихся операторов (в силу (8) это справедливо и для операторов алгебры L'). Если обозначить $\mathrm{rg}\|\xi^\alpha_{a(0)}\| = q$, $\mathrm{rg}\|\xi^\alpha_{a_0(0)}\| = q_0$, то линейная связность означает, что $q < r$ и $q_0 \le r_0$ и, следовательно, возможны случаи $r_0 \le q$ или $q < r_0$. Рассмотрим случай $q_0 < r_0 < q$, остальные случаи рассматриваются аналогично.

Для определения вида произвольных функций в преобразовании подобия построим приближенные инварианты алгебры L как решения системы

$$\begin{gathered} \big(\xi^\alpha_{a_0(0)}(x) + \varepsilon\xi^\alpha_{a_0(1)}(x)\big)\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,\dots,n,\ a_0 = 1,\dots,r_0, \\ \varepsilon\xi^\alpha_{a_1(0)}(x)\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = 0, \quad a_1 = r_0+1,\dots,r. \end{gathered} \tag{11}$$

Предполагая, что решение имеет вид $f(x,\varepsilon) \approx f_{(0)}(x) + \varepsilon f_{(1)}(x) + o(\varepsilon)$, на неизвестные функции $f_{(0)}(x)$ и $f_{(1)}(x)$ из (11) получаем системы Ω_0 и Ω_1 вида

$$\Omega_0: \quad \xi^\alpha_{a_0(0)}(x)\frac{\partial f_{(0)}}{\partial x^\alpha} = 0, \quad \xi^\alpha_{a_1(0)}(x)\frac{\partial f_{(0)}}{\partial x^\alpha} = 0,$$

$$\Omega_1: \quad \xi^\alpha_{a_0(0)}(x)\frac{\partial f_{(1)}}{\partial x^\alpha} + \xi^\alpha_{a_0(1)}(x)\frac{\partial f_{(0)}}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Система Ω_0 однородных уравнений замкнута и имеет $n-q$ независимых решений. Система уравнений Ω_1 может рассматриваться как система неоднородных уравнений для определения $f_{(1)}(x)$ при условии, что $f_{(0)}(x)$ известны и удовлетворяют системе Ω_0. Замкнутость системы Ω_1 следует из замкнутости системы (6), (7), а ее совместность порождает дополнительные уравнения на $f_{(0)}(x)$. Действительно, в силу $q_0 < r_0$ имеем, что $r_0 - q_0$ операторов $X_{a_0(0)}$ представляются как линейные комбинации оставшихся q_0 несвязанных операторов, т. е.

$$\xi^\alpha_{p(0)} = \varphi^h_p(x)\xi^\alpha_{h(0)},$$

с некоторыми функциями $\varphi^h_p(x)$, $p = q_0+1,\dots,r_0$, $h = 1,\dots,q_0$. Подставляя эти соотношения в систему Ω_1, получаем $r_0 - q_0$ дифференциальных уравнений

$$\big(\xi^\alpha_{p(1)}(x) - \varphi^h_p(x)\xi^\alpha_{h(1)}(x)\big)\frac{\partial f_{(0)}}{\partial x^\alpha} = 0$$

на $f_{(0)}$.

Пусть система Ω_0^*, получаемая добавлением этих уравнений в Ω_0 и замыканием расширенной системы, содержит q^* $(\ge q)$ линейно несвязных уравнений.

Тогда она имеет $s_0 = n - q^*$ независимых решений, а исходная система (11) — $s_1 = n - q_0$ независимых решений вида (см. например, [9])

$$f^{\vartheta}(x,\varepsilon) = f^{\vartheta}_{(0)}(x) + \varepsilon f^{\vartheta}_{(1)}(x), \quad \vartheta = 1,\dots,s_0,$$

$$f^{\rho}(x,\varepsilon) = \varepsilon f^{\rho}_{(0)}(x), \quad \rho = s_0+1,\dots,s_1,$$

определяющих инварианты алгебры L.

Используя найденные решения, построим замену переменных

$$\begin{gathered} \bar{x}^{\lambda} = x^{\lambda}, \quad \lambda = 1,\dots,q_0, \\ \bar{x}^{\mu} = f^{\mu}_{(0)}(x), \quad \mu = q_0+1,\dots,q^*, \\ \bar{x}^{\sigma} = f^{\sigma}_{(0)}(x) + \varepsilon f^{\sigma}_{(1)}(x), \quad \sigma = q^*+1,\dots,n. \end{gathered} \tag{12}$$

Тогда согласно (6), (7) базисные операторы примут вид

$$\overline{X}_{a_0} = \bigl(\bar{\xi}^{\lambda}_{a_0(0)} + \varepsilon\bar{\xi}^{\lambda}_{a_0(1)}\bigr)\frac{\partial}{\partial\bar{x}^{\lambda}} + \varepsilon\bar{\xi}^{\mu}_{a_0(1)}\frac{\partial}{\partial\bar{x}^{\mu}}, \quad \varepsilon\overline{X}_{a_1} = \varepsilon\bar{\xi}^{\lambda}_{a_1(0)}\frac{\partial}{\partial\bar{x}^{\lambda}} + \varepsilon\bar{\xi}^{\mu}_{a_1(0)}\frac{\partial}{\partial\bar{x}^{\mu}}, \tag{13}$$

$$\lambda = 1,\dots,q_0, \quad \mu = q_0+1,\dots,q^*, \quad a_0 = 1,\dots,r_0, \quad a_1 = r_0+1,\dots,r.$$

Аналогично строятся инварианты алгебры L' и проводится соответствующая замена переменных, после которой операторы L' приводятся к виду (13). При этом для подобия L и L' необходимо, чтобы число инвариантов этих алгебр было одинаково. Это возможно, если выполняется равенство $\mathrm{rg}\,\|\xi\| = \mathrm{rg}\,\|\xi'\|$, где [10]

$$\|\xi\| = \begin{Vmatrix} \xi^{\alpha}_{a_0(0)} & \xi^{\alpha}_{a_0(1)} \\ 0 & \xi^{\alpha}_{a_0(0)} \\ 0 & \xi^{\alpha}_{a_1(0)} \end{Vmatrix}, \quad \|\xi'\| = \begin{Vmatrix} {\xi'}^{\alpha}_{a_0(0)} & {\xi'}^{\alpha}_{a_0(1)} \\ 0 & {\xi'}^{\alpha}_{a_0(0)} \\ 0 & {\xi'}^{\alpha}_{a_1(0)} \end{Vmatrix},$$

причем базисные миноры этих матриц должны строиться на соответствующих изоморфных операторах. Тогда, опуская черту, в новых переменных систему уравнений (6), (7) запишем в виде

$$\bigl(\xi^{\lambda}_{a_0(0)}(x) + \varepsilon\xi^{\lambda}_{a_0(1)}(x)\bigr)\frac{\partial X'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}} + \varepsilon\xi^{\mu}_{a_0(1)}(x)\frac{\partial X'^{\kappa}}{\partial x^{\mu}} \approx {\xi'}^{\kappa}_{a_0(0)}(x') + \varepsilon{\xi'}^{\kappa}_{a_0(1)}(x'), \tag{14}$$

$$\varepsilon\xi^{\lambda}_{a_1(0)}(x)\frac{\partial X'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}} + \varepsilon\xi^{\mu}_{a_1(0)}(x)\frac{\partial X'^{\kappa}}{\partial x^{\mu}} \approx \varepsilon{\xi'}^{\kappa}_{a_1(0)}(x'), \tag{15}$$

$$\bigl(\xi^{\lambda}_{a_0(0)}(x) + \varepsilon\xi^{\lambda}_{a_0(1)}(x)\bigr)\frac{\partial X'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \varepsilon\xi^{\mu}_{a_0(1)}(x)\frac{\partial X'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \approx \varepsilon{\xi'}^{\nu}_{a_0(1)}(x'), \tag{16}$$

$$\varepsilon\xi^{\lambda}_{a_1(0)}(x)\frac{\partial X'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \varepsilon\xi^{\mu}_{a_1(0)}(x)\frac{\partial X'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \approx \varepsilon{\xi'}^{\nu}_{a_1(0)}(x'), \tag{17}$$

$$\lambda,\kappa = 1,\dots,q_0, \quad \mu,\nu = q_0+1,\dots,q^*, \quad a_0 = 1,\dots,r_0, \quad a_1 = r_0+1,\dots,r.$$

Полученные системы дифференциальных уравнений в частных производных на X'^{κ} и X'^{ν} связаны между собой через коэффициенты и свободные члены. Для их решения необходимо проверить условия замкнутости и совместности. В разд. 2 было установлено, что система замкнута. Однако, поскольку среди уравнений системы есть линейно связные, можно выбрать минор порядка q_0 в матрице $\bigl\|{\xi'}^{\alpha}_{a_0(0)}\bigr\|$ и перенумеровать индексы так, что будут верны соотношения

$${\xi'}^{\alpha}_{p_0(0)} = {\varphi'}^{h_0}_{p_0}(x'){\xi'}^{\alpha}_{h_0(0)}, \quad p_0 = q_0+1,\dots,r_0, \; h_0 = 1,\dots,q_0. \tag{18}$$

Аналогичным образом можно выбрать минор порядка q в матрице $\left\|{\xi'}^{\alpha}_{a(0)}\right\|$, причем в силу построения этой матрицы выбранный минор будет включать в себя уже имеющийся порядка q_0 и для строк этой матрицы будут верны соотношения

$$ {\xi'}^{\alpha}_{p_1(0)} = {\varphi'}^{h_0}_{p_1}(x'){\xi'}^{\alpha}_{h_0(0)} + {\varphi'}^{h_1}_{p_1}(x'){\xi'}^{\alpha}_{h_1(0)}, \tag{19} $$

$$ h_0 = 1,\dots,q_0, \quad h_1 = r_0+1,\dots,m, \quad m = r_0+q-q_0, $$

$$ p_1 = m+1,\dots,r, \quad \alpha = 1,\dots,q^*. $$

Выбирая соответствующие базисные строки в матрицах $\left\|\xi^{\alpha}_{a_0(0)}\right\|$ и $\left\|\xi^{\alpha}_{a(0)}\right\|$, на которых располагаются миноры ранга q_0 и q соответственно, можно выписать аналогичные соотношения и для нештрихованных переменных. Подставляя выражения (18) в систему (14) при $a_0 = q_0+1,\dots,r_0$, получаем уравнения вида

$$ \varepsilon\left[\bigl(\xi^{\lambda}_{p_0(1)} - \varphi^{h_0}_{p_0}\xi^{\lambda}_{h_0(1)}\bigr)\frac{\partial {X'}^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}} + \bigl(\xi^{\mu}_{p_0(1)} - \varphi^{h_0}_{p_0}\xi^{\mu}_{h_0(1)}\bigr)\frac{\partial {X'}^{\kappa}}{\partial x^{\mu}}\right] \\ = \bigl({\varphi'}^{h_0}_{p_0} - \varphi^{h_0}_{p_0}\bigr){\xi'}^{\kappa}_{h_0(0)} + \varepsilon\bigl[\bigl(\varphi^{h_0}_{p_0}{\xi'}^{\kappa}_{h_0(1)} - {\xi'}^{\kappa}_{p_0(1)}\bigr)\bigr], \tag{20} $$

которые при $\varepsilon = 0$ представляют собой алгебраические уравнения на переменные x' и x, а при ε в первой степени образуют дифференциальные уравнения. Подставляя выражения (18) в систему (16) при $a_0 = q_0+1,\dots,r_0$, получим дифференциальные уравнения

$$ \varepsilon\bigl(\xi^{\lambda}_{p_0(1)} - \varphi^{h_0}_{p_0}\xi^{\lambda}_{h_0(1)}\bigr)\frac{\partial {X'}^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \varepsilon\bigl(\xi^{\mu}_{p_0(1)} - \varphi^{h_0}_{p_0}\xi^{\mu}_{h_0(1)}\bigr)\frac{\partial {X'}^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \varepsilon\bigl({\xi'}^{\nu}_{p_0(1)} - \varphi^{h_0}_{p_0}{\xi'}^{\nu}_{h_0(1)}\bigr). \tag{21} $$

Наконец, подстановкой выражений (19) в системы (15) и (17) при $a_1 = r_0+q-q_0+1,\dots,r$ получим систему алгебраических уравнений

$$ \varepsilon\bigl({\varphi'}^{h_0}_{p_1} - \varphi^{h_0}_{p_1}\bigr) \approx 0, \quad \varepsilon\bigl({\varphi'}^{h_1}_{p_1} - \varphi^{h_1}_{p_1}\bigr) \approx 0, \tag{22} $$

$$ h_0 = 1,\dots,q_0, \quad h_1 = r_0+1,\dots,m, \quad p_1 = m+1,\dots,r. $$

Добавим алгебраические и дифференциальные уравнения (20), (21) к оставшимся линейно независимым уравнениям системы (14)–(17). Полученная система дифференциальных уравнений может оказаться незамкнутой, так как скобка Якоби, например, уравнений (17) и (21) содержит коммутатор операторов (13) и

$$ \widetilde{X}_{p_0} = \bigl(\xi^{\lambda}_{p_0(1)} - \varphi^{h_0}_{p_0}\xi^{\lambda}_{h_0(1)}\bigr)\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} + \bigl(\xi^{\mu}_{p_0(1)} - \varphi^{h_0}_{p_0}\xi^{\mu}_{h_0(1)}\bigr)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, $$

который в общем случае приводит к появлению новых уравнений. Такие же коммутаторы вычислялись при построении инвариантов, и, значит, получаемая замкнутая система будет иметь ровно q^* линейно несвязных дифференциальных уравнений на неизвестные ${X'}^{1},\dots,{X'}^{q^*}$. Однако при этом из условия совместности могут получиться дополнительные алгебраические уравнения вида (22).

Будем искать решение новой замкнутой системы в виде (3). Тогда неизвестные функции $\psi^{\alpha}_0(x)$ и $\psi^{\alpha}_1(x)$ ($\alpha = 1,\dots,q^*$) удовлетворяют уравнениям систем

$\overline{\Omega}_0$ и $\overline{\Omega}_1$ следующего вида: системе $\overline{\Omega}_0$

$$\begin{cases} \xi^\lambda_{h_0(0)}(x)\frac{\partial\psi_0^\kappa}{\partial x^\lambda} = {\xi'}^\kappa_{h_0(0)}(\psi_0), \\ \xi^\lambda_{h_1(0)}(x)\frac{\partial\psi_0^\kappa}{\partial x^\lambda} + \xi^\mu_{h_1(0)}(x)\frac{\partial\psi_0^\kappa}{\partial x^\mu} = {\xi'}^\kappa_{h_1(0)}(\psi_0), \\ \dots \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} \xi^\lambda_{h_0(0)}(x)\frac{\partial\psi_0^\nu}{\partial x^\lambda} = 0, \\ \xi^\lambda_{h_1(0)}(x)\frac{\partial\psi_0^\nu}{\partial x^\lambda} + \xi^\mu_{h_1(0)}(x)\frac{\partial\psi_0^\nu}{\partial x^\mu} = {\xi'}^\nu_{h_1(0)}(\psi_0), \\ \big(\xi^\lambda_{p_0(1)} - \varphi^{h_0}_{p_0}\xi^\lambda_{h_0(1)}\big)\frac{\partial\psi_0^\nu}{\partial x^\lambda} + \big(\xi^\mu_{p_0(1)} - \varphi^{h_0}_{p_0}\xi^\mu_{h_0(1)}\big)\frac{\partial\psi_0^\nu}{\partial x^\mu} \\ \qquad\qquad = \big({\xi'}^\nu_{p_0(1)} - \varphi^{h_0}_{p_0}{\xi'}^\nu_{h_0(1)}\big), \\ \dots, \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} {\varphi'}^{h_0}_{p_0}(\psi_0) - \varphi^{h_0}_{p_0}(x) = 0, \\ {\varphi'}^{h_0}_{p_1}(\psi_0) - \varphi^{h_0}_{p_1}(x) = 0, \\ {\varphi'}^{h_1}_{p_1}(\psi_0) - \varphi^{h_1}_{p_1}(x) = 0, \\ \dots \end{cases} \tag{25}$$

и системе $\overline{\Omega}_1$

$$\begin{cases} \xi^\lambda_{h_0(0)}(x)\frac{\partial\psi_1^\kappa}{\partial x^\lambda} + \xi^\lambda_{h_0(1)}(x)\frac{\partial\psi_0^\kappa}{\partial x^\lambda} + \xi^\mu_{h_0(1)}(x)\frac{\partial\psi_0^\kappa}{\partial x^\mu} = \frac{\partial{\xi'}^\kappa_{h_0(0)}}{\partial\psi_0^\alpha}\psi_1^\alpha + {\xi'}^\kappa_{h_0(1)}(\psi_0), \\ \big(\xi^\lambda_{p_0(1)} - \varphi^{h_0}_{p_0}\xi^\lambda_{h_0(1)}\big)\frac{\partial\psi_0^\kappa}{\partial x^\lambda} + \big(\xi^\mu_{p_0(1)} - \varphi^{h_0}_{p_0}\xi^\mu_{h_0(1)}\big)\frac{\partial\psi_0^\kappa}{\partial x^\mu} \\ \qquad\qquad = \frac{\partial{\varphi'}^{h_0}_{p_0}}{\partial\psi_0^\alpha}\psi_1^\alpha + \big(\varphi^{h_0}_{p_0}{\xi'}^\kappa_{h_0(1)} - {\xi'}^\kappa_{p_0(1)}\big), \end{cases} \tag{26}$$

$$\xi^\lambda_{h_0(0)}(x)\frac{\partial\psi_1^\nu}{\partial x^\lambda} + \xi^\lambda_{h_0(1)}(x)\frac{\partial\psi_0^\nu}{\partial x^\lambda} + \xi^\mu_{h_0(1)}(x)\frac{\partial\psi_0^\nu}{\partial x^\mu} = {\xi'}^\nu_{h_0(1)}(\psi_0), \tag{27}$$

$$\lambda,\kappa = 1,\dots,q_0, \quad \mu,\nu = q_0+1,\dots,q^*, \quad h_0 = 1,\dots,q_0, \quad p_0 = q_0+1,\dots,r_0,$$
$$h_1 = r_0+1,\dots,m, \quad p_1 = m+1,\dots,r, \quad m = r_0+q-q_0.$$

Здесь многоточия обозначают дополнительные уравнения, появляющиеся при замыкании. Отметим, что все такие уравнения содержат производные по переменным $x^{q_0+1},\dots,x^{q^*}$.

Если в системе $\overline{\Omega}_0$ алгебраические уравнения (25) совместны и не дают соотношения только между x^α или ψ_0^α, а $\mathrm{rg}\left\|\frac{\partial({\varphi'}^{h_0}_{p_0},{\varphi'}^{h_0}_{p_1},{\varphi'}^{h_1}_{p_1},\dots)}{\partial\psi_0^\alpha}\right\| = \hat q$, то можно выразить $\hat q$ функций $\psi_0^1,\dots,\psi_0^{\hat q}$ через x и неизвестные функции $\psi_0^{\hat q+1},\dots,\psi_0^{q^*}$, т. е.

$$\psi_0^\beta = \psi_0^\beta\big(x,\psi_0^{\hat q+1},\dots,\psi_0^{q^*}\big), \quad \beta = 1,\dots,\hat q. \tag{28}$$

Пусть $\hat q < q_0$. Из однородных уравнений (24_1) имеем

$$\psi_0^\nu = \psi_0^\nu\left(x^{q_0+1},\dots,x^n\right), \quad \nu = q_0+1,\dots,q^*. \tag{29}$$

Тогда, учитывая (28) и (29), из (23_1) на каждую из функций $\psi_0^{\hat q+1},\dots,\psi_0^{q_0}$ получается система q_0 линейно несвязных полулинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка от q_0 независимых переменных $x^1,\dots,x^{q_0}$ и согласно [8] решение таких систем может быть записано в виде

$$\psi_0^\gamma = \psi_0^\gamma\big(x^1,\dots,x^{q_0},\psi_0^{q_0+1},\dots,\psi_0^{q^*},\theta_0^{\hat q+1},\dots,\theta_0^{q_0}\big), \quad \gamma = \hat q+1,\dots,q_0,$$

с произвольными функциями $\theta_0^\gamma=\theta_0^\gamma\left(x^{q_0+1},\ldots,x^n\right)$. По аналогии, подставляя найденные решения в оставшиеся q^*-q_0 линейно несвязные уравнения системы (24) от q^*-q_0 независимых переменных $x^{q_0+1},\ldots,x^{q^*}$, согласно [8] можно записать решение (29) в виде

$$\psi_0^\nu=\psi_0^\nu\big(x^{q_0+1},\ldots,x^{q^*},\theta_0^{\hat q+1},\ldots,\theta_0^{q_0},\sigma_0^{q_0+1},\ldots,\sigma_0^{q^*}\big),\quad \nu=q_0+1,\ldots,q^*,$$

где $\sigma_0^\nu=\sigma_0^\nu\left(x^{q^*+1},\ldots,x^n\right)$ — произвольные функции.

Далее переходим к решению системы $\overline{\Omega}_1$. Из (27) с учетом построенных решений системы $\overline{\Omega}_0$ на каждую из неизвестных функций $\psi_1^{q_0+1},\ldots,\psi_1^{q^*}$ получается система q_0 линейно несвязных дифференциальных уравнений от q_0 независимых переменных $x^1,\ldots,x^{q_0}$. Поэтому согласно [8] ее решение имеет вид

$$\psi_1^\nu=\psi_1^\nu\big(x^1,\ldots,x^{q_0},\theta_0^{\hat q+1},\ldots,\theta_0^{q_0},\sigma_0^{q_0+1},\ldots,\sigma_0^{q^*},\sigma_1^{q_0+1},\ldots,\sigma_1^{q^*}\big),\ \nu=q_0+1,\ldots,q^*,$$

где $\sigma_1^\nu=\sigma_1^\nu\big(x^{q_0+1},\ldots,x^n\big)$ — произвольные функции. Подставляя эти решения в правую часть уравнений (26_1), получим на неизвестные функции $\psi_1^1,\ldots,\psi_1^{q_0}$ системы q_0 линейных неоднородных уравнений от q_0 независимых переменных $x^1,\ldots,x^{q_0}$; согласно [8] ее решение имеет вид

$$\psi_1^\kappa=\psi_1^\kappa\big(x^1,\ldots,x^{q_0},\theta_0^{\hat q+1},\ldots,\theta_0^{q_0},\sigma_0^{q_0+1},\ldots,\sigma_0^{q^*},\sigma_1^1,\ldots,\sigma_1^{q^*}\big),\quad \kappa=1,\ldots,q_0.$$

Можно показать, что, подставляя все найденные функции $\psi_1^1,\ldots,\psi_1^{q^*}$ в дифференциальные уравнения системы (26_2) на функции ψ_0^κ и добавляя их к нерешенным $q-q_0$ уравнениям системы (23_2), получаем систему q^*-q_0 уравнений

$$\xi^\mu_{h_1(0)}(x)\frac{\partial\psi_0^\gamma}{\partial\theta_0^\iota}\frac{\partial\theta_0^\iota}{\partial x^\mu}={\xi'}^\gamma_{h_1(0)}(\psi_0)-\xi^\lambda_{h_1(0)}(x)\frac{\partial\psi_0^\gamma}{\partial x^\lambda}-{\xi'}^\nu_{h_1(0)}(x)\frac{\partial\psi_0^\gamma}{\partial\psi_0^\nu},$$

$$\begin{aligned}\big(\xi^\mu_{p_0(1)}-\varphi^{h_0}_{p_0}\xi^\mu_{h_0(1)}\big)\frac{\partial\psi_0^\gamma}{\partial\theta_0^\iota}\frac{\partial\theta_0^\iota}{\partial x^\mu}&=\frac{\partial{\varphi'}^{h_0}_{p_0}}{\partial\psi_0^\alpha}\psi_1^\alpha+\big(\varphi^{h_0}_{p_0}{\xi'}^\gamma_{h_0(1)}-{\xi'}^\gamma_{p_0(1)}\big)\\&-\big(\xi^\lambda_{p_0(1)}-\varphi^{h_0}_{p_0}\xi^\lambda_{h_0(1)}\big)\frac{\partial\psi_0^\gamma}{\partial x^\lambda}-\big(\xi^\nu_{p_0(1)}-\varphi^{h_0}_{p_0}\xi^\nu_{h_0(1)}\big)\frac{\partial\psi_0^\gamma}{\partial\psi_0^\nu}\end{aligned}$$

от q^*-q_0 независимых переменных $x^{q_0+1},\ldots,x^{q^*}$ на неизвестные функции $\theta_0^{\hat q+1}$, $\ldots,\theta_0^{q_0}$. Поскольку $\det\big\|\frac{\partial\psi_0^\gamma}{\partial\theta_0^\iota}\big\|\neq0$, можно умножить обе части на матрицу, обратную к матрице $\big\|\frac{\partial\psi_0^\gamma}{\partial\theta_0^\iota}\big\|$, и получить систему на неизвестные функции $\theta_0^{\hat q+1}$, $\ldots,\theta_0^{q_0}$ такую, как была для ψ_0^ν. Согласно [8] решение такой системы примет вид

$$\theta_0^\gamma=\theta_0^\gamma\big(x^{q_0+1},\ldots,x^{q^*},\sigma_0^{\hat q+1},\ldots,\sigma_0^{q^*},\sigma_1^1,\ldots,\sigma_1^{q^*}\big),\quad \gamma=\hat q+1,\ldots,q_0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Если две r-параметрические группы $\widetilde G_r$ и $\widetilde H_r$ изоморфны и выполняются условия:*

1) *структуры групп с операторами $\langle X_{a_0(0)},X_{a_1(0)}\rangle$ и $\langle X'_{a_0(0)},X'_{a_1(0)}\rangle$ согласованы со структурами групп $\widetilde G_r$ и $\widetilde H_r$,*
2) $\operatorname{rg}\|\xi_{a_0(0)}\|=\operatorname{rg}\|{\xi'}_{a_0(0)}\|$, $\operatorname{rg}\|\xi_{a(0)}\|=\operatorname{rg}\|{\xi'}_{a(0)}\|=q$, $\operatorname{rg}\|\xi\|=\operatorname{rg}\|\xi'\|=q^*$, $q\le q^*<r$,

3) *система алгебраических уравнений в $\overline{\Omega}_0$ совместна и не приводит к соотношению между переменными X'^{α} или x^{α},*

то $\widetilde{G}_r$ и $\widetilde{H}_r$ подобны. Если из алгебраических уравнений можно выразить $\hat{q}$ функций, то преобразования подобия зависят от $q^* - \hat{q}$ произвольных функций $\sigma_0^{\hat{q}+1}(x^{q^*+1}, \dots, x^n), \dots, \sigma_0^{q^*}(x^{q^*+1}, \dots, x^n)$ от $(n-q^*)$ переменных и q^* произвольных функций $\sigma_1^1(x^{q_0+1}, \dots, x^n), \dots, \sigma_1^{q^*}(x^{q_0+1}, \dots, x^n)$ от $(n-q_0)$ переменных.

Теоремы 1, 2 остаются верными и при $r = r_0$, $q = q_0$, т. е. когда в алгебре присутствуют лишь операторы вида

$$X_a = \left(\xi^{\alpha}_{a(0)}(x) + \varepsilon \xi^{\alpha}_{a(1)}(x)\right) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}.$$

В этом случае условия теорем 1, 2 полностью совпадают с аналогичными критериями подобия для точных групп (см. [2]).

4. Примеры

Приведенные теоремы могут быть использованы при решении задачи классификации неподобных приближенных алгебр Ли. Такие классификации основываются на известных классификациях неподобных двух- и трехмерных алгебр Ли на плоскости (см., например, [1]) и в пространстве (см. [11]). Примеры, приводимые далее, иллюстрируют существенность выбора изоморфизма.

1. Рассмотрим двумерную абелеву алгебру Ли на плоскости с операторами

$$L_{(0)}: \quad X_{1(0)} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_{2(0)} = x \frac{\partial}{\partial y}$$

и два ее возмущения с операторами вида

$$L: \quad X_1 = X_{1(0)}, \quad X_2 = X_{2(0)} + \varepsilon \alpha(x) \frac{\partial}{\partial x}$$

и

$$L': X'_1 = X'_{1(0)}, \quad X'_2 = X'_{2(0)} + \varepsilon \beta(x') \frac{\partial}{\partial x'} + \varepsilon \gamma(x') \frac{\partial}{\partial y'}.$$

В этом случае условия согласованности структур алгебр выполнены, а ранги матриц $\|\xi_{a(0)}\|$ и $\|\xi_{a_0(0)}\|$ совпадают и равны $q = 1$. Следовательно, это случай линейно связных операторов с $q < r$.

Изоморфное отображение приближенных алгебр Ли L и L' может быть построено либо по правилу

$$X_1 \to X'_1, \quad X_2 \to X'_2,$$

либо по правилу

$$X_1 \to X'_2, \quad X_2 \to X'_1.$$

Построим преобразование подобия, порождаемое первым изоморфизмом. Система (6), (7) в этом случае примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial x'}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon \alpha(x) \frac{\partial x'}{\partial x} = \varepsilon \beta(x'), \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial y'}{\partial y} = 1, \\ \varepsilon \alpha(x) \frac{\partial y'}{\partial x} = x' - x + \varepsilon \gamma(x'). \end{cases}$$

Если искать преобразование подобия в виде (3), то после расщепления по ε и решения системы $\overline{\Omega}_0$, получим преобразование подобия точной алгебры $L_{(0)}$. Из условия совместности системы $\overline{\Omega}_1$ вытекает, что приближенные алгебры L и L'

подобны только при $\alpha(x) = \beta(x)$. Соответствующее преобразование подобия (с точностью до несущественных слагаемых) имеет вид $x' = x - \varepsilon\gamma(x)$, $y' = y$.

При построении подобия, которое порождается вторым изоморфизмом, по аналогичной схеме можно получить, что приближенные алгебры L и L' подобны, лишь если $\alpha(x) = -x^3\beta(1/x)$, и соответствующая замена переменных (с точностью до несущественных слагаемых) имеет вид

$$x' = \frac{1}{x} + \varepsilon\left\{y\beta\left(\frac{1}{x}\right) - \gamma\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad y' = \frac{y}{x} + \varepsilon\left\{\frac{y^2}{2}\beta\left(\frac{1}{x}\right)\right\}.$$

Например, в этом случае подобными будут алгебры, в операторах которых $\alpha(x) = x$, а $\beta(x') = -X'^2$.

2. Рассмотрим трехмерную алгебру Ли в пространстве трех переменных с операторами

$$L_{(0)} : X_{1(0)} = e^{-z}\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_{2(0)} = ye^{-z}\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_{3(0)} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Такая алгебра является одной из реализаций алгебры Ли с коммутационными соотношениями

$$[X_{2(0)},\ X_{3(0)}] = X_{2(0)}, \quad [X_{3(0)},\ X_{1(0)}] = -X_{1(0)}, \quad [X_{1(0)},\ X_{2(0)}] = 0$$

в пространстве дифференциальных операторов первого порядка с тремя переменными. Рассмотрим два ее возмущения, которые сохраняют коммутационные соотношения:

$$L: \quad X_1 = X_{1(0)}, \quad X_2 = X_{2(0)} + \varepsilon ye^{-z}\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = X_{3(0)},$$

$$L': \quad X'_1 = X'_{1(0)}, \quad X'_2 = X'_{2(0)} + \varepsilon {y'}^2 e^{-z'}\frac{\partial}{\partial y'}, \quad X'_3 = X'_{3(0)}.$$

Очевидно, что условия согласованности структур алгебр выполнены, а матрицы $\|\xi_{a(0)}\|$ и $\|\xi_{a_0(0)}\|$ совпадают и ранг их равен 2.

Аналогично первому примеру будем искать преобразование подобия в виде (3), порождаемое изоморфизмом $X_1 \to X'_1,\ X_2 \to X'_2,\ X_3 \to X'_3$. Тогда решение системы Ω_0 приводит к замене переменных вида

$$x' = xe^{-\theta_0(y)} + \varphi_0(y) + \varepsilon\varphi_1(x,y,z),\ y' = y + \varepsilon\psi_1(x,y,z),\ z' = z + \theta_0(y) + \varepsilon\theta_1(x,y,z),$$

а система Ω_1:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = -\theta_1 e^{-\theta_0(y)}, \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial x} = 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - yxe^{-\theta_0(y)}\frac{\partial\theta_0}{\partial y} + y\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} = \psi_1 e^{-\theta_0(y)} - y\theta_1 e^{-\theta_0(y)}, \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x} = ye^{-\theta_0(y)}, \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \frac{\partial\theta_0}{\partial x} = 0 \end{array}\right.$$

оказывается несовместной.

Если искать замену переменных, порождаемую изоморфизмом $X_1 \to X'_2$, $X_2 \to X'_1$, $X_3 \to X'_3$, то обе системы Ω_0, Ω_1 совместны и преобразование подобия имеет вид

$$x' = \frac{x}{y} + \varepsilon\frac{x^2}{2y^2}, \quad y' = \frac{1}{y} + \varepsilon\frac{x}{y^2}, \quad z' = z.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрагимов Н. Х.* Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи мат. наук. 1992. Т. 47, № 4. С. 84–144.
2. *Eisenhart L. P.* Equivalent continuous groups // Ann. Math. (2). 1932. V. 33. P. 665–670.
3. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. М.: Изд-во иностр. лит., 1947.
4. *Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Приближенные группы преобразований // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 10. С. 1712–1732.
5. *Лукащук В. О.* Общее решение системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с малым параметром // Вестн. УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3. С. 145–149.
6. *Baikov V.A., Gazizov R. K., Ibragimov N. H.* Approximate transformation groups and deformations of symmetry Lie algebras // CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations / Edited by N. H. Ibragimov. Boca Raton, Fl.: CRC Press, 1996. V. 3. Chapter 2. New trends in theoretical developments and computational methods. P. 31–67.
7. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М.; Л.: ОНТИ ГТТИ, 1934.
9. *Gazizov R. K.* Representation of general invariants for approximate transformation groups // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 213, N 1. P. 202–228.
10. *Bagderina Yu.Yu.* Number of invariants of multi-parameter approximate transformation group // Proc. Intern. Conf. "MOGRAN 2000: Modern Group Analysis for the New Millennium" Ufa: USATU, 2001. P. 16–20.
11 *Хабиров С. В.* Методы теории групп Ли — Беклунда в математической физике: Дис. ... д.ф.-м.н. Уфа, 1990.

Статья поступила 9 сентября 2008 г.

Газизов Рафаил Кавыевич, Лукащук Вероника Олеговна
Уфимский гос. авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа 450000
gazizov@mail.rb.ru, voluks@gmail.com