Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 517.968.28 + 517.982.43

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОССТАНОВЛЕНИЯ НА ПРЯМОЙ

М. С. Сгибнев

Аннотация. Исследован вопрос о единственности решения системы интегральных уравнений типа восстановления $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F} * \boldsymbol{z}$ на прямой $\mathbb{R}$; $\boldsymbol{z}$ — неизвестная вектор-функция, $\boldsymbol{g}$ — заданная вектор-функция, а $\boldsymbol{F}$ — нерешетчатая матрица конечных мер на $\mathbb{R}$ такая, что матрица $\boldsymbol{F}(\mathbb{R})$ имеет спектральный радиус единица и неразложима. Показано, что в определенном классе функций любое решение соответствующей однородной системы почти всюду совпадает с правым собственным вектором матрицы $\boldsymbol{F}(\mathbb{R})$, отвечающим ее собственному значению единица.

Ключевые слова: система интегральных уравнений, уравнение восстановления, единственность.

§ 1. Введение

Вопрос о единственности ограниченного решения интегрального уравнения (уравнения восстановления)

$$z(x) = g(x) + \int\limits_{\mathbb{R}} z(x-y)\,F(dy), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

рассматривался в [1]; здесь F — распределение вероятностей в $\mathbb{R}$, g — заданная функция, а z — ограниченная борелевская функция. Установлено (см. [1, теорема 9.13]), что если $z(x)$ — ограниченная борелевская функция, удовлетворяющая однородному уравнению

$$z(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} z(x-y)\,F(dy), \quad x \in \mathbb{R},$$

где F — неарифметическое распределение вероятностей в $\mathbb{R}$, то существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $z(x) = c$ п. в. относительно меры Лебега.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы доказать единственность решения системы интегральных уравнений типа восстановления с точностью до постоянного п. в. векторного слагаемого определенного вида. Как показано в [2], если распределение вероятностей F обладает ненулевой абсолютно непрерывной компонентой, то решение z уравнения (1) можно представить в виде $z = z_1 + z_2$, где $z_1 \in L^1(\mathbb{R})$, а функция $z_2(x)$ непрерывна и имеет конечные пределы при $x \to \pm\infty$. Поэтому при рассмотрении вопроса о единственности решения естественно расширить класс допустимых решений. Однако проблема выбора класса допустимых решений весьма непроста. Его расширение может

© 2010 Сгибнев М. С.

привести, с одной стороны, к необходимости налагать дополнительные ограничения на F так, чтобы интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} z(x-y)\,F(dy)$ имел смысл п. в. для всех $z(x)$, а с другой — утверждение цитированной теоремы 9.13 из [1] может оказаться уже неверным в расширенном классе функций $z(x)$. В качестве допустимых решений мы будем рассматривать такие функции, которые представимы в виде суммы функций из $L^1(\mathbb{R})$ и $L^\infty(\mathbb{R})$ (см. также замечание 1 ниже).

Рассмотрим систему интегральных уравнений типа восстановления:

$$z_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}} z_j(x-y)\,F_{ij}(dy), \quad i = 1,\dots,m, \tag{2}$$

где $g_i \in L_1(\mathbb{R})$, $i = 1,\dots,m$, а $\boldsymbol{F} = (F_{ij})$ — матрица неотрицательных конечных мер на $\mathbb{R}$. Обозначим через $\boldsymbol{a}(x) = (a_1(x),\dots,a_m(x))^T$ вектор-столбец с координатами $a_1(x)$, ... , $a_m(x)$ (верхний индекс T означает транспонирование). В матричной форме система (2) принимает вид $\boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{g}(x) + \boldsymbol{F} * \boldsymbol{z}(x)$, где i-я координата $(\boldsymbol{F} * \boldsymbol{z}(x))_i$ вектор-функции $\boldsymbol{F} * \boldsymbol{z}(x)$ по определению равна сумме в правой части (2). Напомним, что если ν и $\varkappa$ — меры, определенные на σ-алгебре $\mathscr{B}$ борелевских подмножеств прямой $\mathbb{R}$, то их *сверткой* называется мера

$$\nu * \varkappa(A) := \iint\limits_{\{x+y\in A\}} \nu(dx)\,\varkappa(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}} \nu(A-y)\,\varkappa(dy), \quad A \in \mathscr{B};$$

здесь $A - y := \{x \in \mathbb{R} : x + y \in A\}$. Пусть $\boldsymbol{G} = (G_{ij})$ также матрица размера $m \times m$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры на $\mathbb{R}$. Свертка $\boldsymbol{F} * \boldsymbol{G}$ — это матрица с элементами $(\boldsymbol{F} * \boldsymbol{G})_{ij} := \sum\limits_{l=1}^{m} F_{il} * G_{lj}$, $i,j = 1,\dots,m$. Далее, $\boldsymbol{F}^{1*} := \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}^{(k+1)*} := \boldsymbol{F}^{k*} * \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{F}^{k*}$, $\boldsymbol{F}^{0*} := \delta\boldsymbol{I}$, где δ — мера единичной массы, сосредоточенная в нуле, а $\boldsymbol{I}$ — единичная матрица размера $m \times m$. Через $\boldsymbol{H}$ обозначим матричную меру восстановления, порожденную матрицей мер $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{H} := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{F}^{k*}$. Пусть $\boldsymbol{A}$ — числовая матрица размера $m \times m$ и $\sigma(\boldsymbol{A})$ — совокупность всех ее собственных значений. Число $\varrho(\boldsymbol{A}) := \max\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(\boldsymbol{A})\}$ называется *спектральным радиусом* матрицы $\boldsymbol{A}$. По теореме Перрона — Фробениуса [3, теорема 8.4.4] любая неотрицательная неразложимая матрица $\boldsymbol{A}$ имеет положительное собственное значение кратности 1, равное $\varrho(\boldsymbol{A})$, и существуют положительные правый и левый собственные векторы, соответствующие этому собственному значению. Положим $\boldsymbol{F}(\infty) := (F_{ij}(\mathbb{R}))$.

В работах [4, 5] изучалась асимптотика решения $\boldsymbol{H} * \boldsymbol{g}(x)$ системы (2), у которой матрица мер $\boldsymbol{F}$ обладает следующим свойством: $\boldsymbol{F}(\infty)$ — неразложимая матрица с $\varrho[\boldsymbol{F}(\infty)] = 1$. В отличие от аналогичных систем уравнений на полуоси, у которых решение определяется однозначно в указанном виде, в рассматриваемом случае ситуация иная. Пусть $\boldsymbol{c}$ — произвольный правый собственный вектор, отвечающий собственному значению 1 матрицы $\boldsymbol{F}(\infty)$. Тогда $\boldsymbol{H} * \boldsymbol{g}(x) + \boldsymbol{c}$ снова решение системы (2). Теорема 1 настоящей работы утверждает, что для нерешетчатых матриц мер $\boldsymbol{F}$ (см. определение 2) верно и обратное утверждение: любое решение системы (2) из указанного выше расширенного класса допустимых решений п. в. совпадает с $\boldsymbol{H} * \boldsymbol{g}(x) + \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{F}(\infty)\boldsymbol{c}$.

§ 2. Определения

Распределение вероятностей F на $\mathbb{R}$ называется *арифметическим*, если оно сосредоточено на множестве точек вида 0, $\pm\lambda$, $\pm2\lambda, \dots$. Наибольшее число λ, обладающее этим свойством, называется *шагом* F [6]. Распределение вероятностей F на $\mathbb{R}$ называется *решетчатым*, если оно сосредоточено на множестве, образующем арифметическую прогрессию, т. е. на множестве точек вида $a+j\lambda$, где $a \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ — постоянные числа, а $j \in \mathbb{Z}$; здесь $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Наибольшее число λ, обладающее этим свойством, называется *шагом* F [7]. Аналогичным образом определяются арифметические и решетчатые меры на $\mathbb{R}$.

Пусть $\boldsymbol{F} = (F_{ij})$ — квадратная матрица порядка m, элементами которой являются неотрицательные конечные меры на $\mathbb{R}$.

Определение 1. Матрица мер $\boldsymbol{F} = (F_{ij})$ называется *вырожденной*, если существуют постоянные $\beta_1, \dots, \beta_m$ такие, что меры F_{ij} сосредоточены в точках $\beta_j - \beta_i$, $i, j = 1, \dots, m$. Матрица мер, не являющаяся вырожденной, называется *невырожденной*.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с невырожденными матрицами мер $\boldsymbol{F}$. Если ν — конечная мера, то обозначим через $\nu(t)$ ее функцию распределения: $\nu(t) := \nu((-\infty, t])$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 2 [8]. Матрица мер $\boldsymbol{F} = (F_{ij})$ называется *решетчатой*, если выполняются следующие условия:

1) каждая мера F_{ij}, $i \neq j$, решетчата с шагом λ_{ij}, каждая мера F_{ii} арифметична с шагом λ_{ii};

2) все λ_{ij} кратны некоторому числу, наибольшее из таких чисел обозначим через λ;

3) если a_{ij}, a_{jk} и a_{ik} — точки роста функций распределения $F_{ij}(t)$, $F_{jk}(t)$ и $F_{ik}(t)$ соответственно, то $a_{ij} + a_{jk} = a_{ik} + l\lambda$, где $l \in \mathbb{Z}$ (l может зависеть от a_{ij}, a_{jk} и a_{ik}); иными словами, $a_{ij} + a_{jk} \equiv a_{ik} \mod \lambda$.

Число λ называется *шагом* решетчатой матрицы мер $\boldsymbol{F}$. Матрица мер, не являющаяся решетчатой, называется *нерешетчатой*.

Будем использовать обозначения из теории обобщенных функций (распределений), применяемые в [1]. Пусть $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Определим преобразование Фурье $\widehat{K}(s)$ функции K равенством

$$\widehat{K}(s) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-is\cdot x} K(x)\, dx, \quad s \in \mathbb{R}^n;$$

здесь $s \cdot x := \sum\limits_{j=1}^{n} s_j x_j$. Пусть F — конечная борелевская мера на $\mathbb{R}$. Определим ее преобразование Фурье — Стилтьеса равенством (см. [1, п. 9.13])

$$\widehat{F}(s) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-isx}\, F(dx), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что преобразования Фурье функций и преобразования Фурье — Стилтьеса мер отличаются друг от друга наличием множителя $1/\sqrt{(2\pi)^n}$. Пусть $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)^T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ — векторное распределение, т. е. $\Lambda_i \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $i = 1, \dots, m$; здесь $\mathbb{R}^n \supset \Omega$ — непустое открытое множество. По определению

$$\boldsymbol{\Lambda}(\varphi) := (\Lambda_1(\varphi), \dots, \Lambda_m(\varphi))^T, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Условимся о том, что все операции над матрицами мер и вектор-функциями осуществляются поэлементно; например, если $\boldsymbol{F} = (F_{ij})$ — матрица, элементами которой являются меры, то через $\widehat{\boldsymbol{F}}(s)$ будем обозначать матрицу, состоящую из преобразований Фурье — Стилтьеса $\widehat{F}_{ij}(s)$ элементов матрицы $\boldsymbol{F}$; если $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_m)^T$, то $|\boldsymbol{a}| := (|a_1|, \dots, |a_m|)^T$. Через $\mathbf{0}$ будем обозначать нулевую матрицу, размеры которой будут определяться из контекста.

§ 3. Результаты

Запись $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ означает, что $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, а $f_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{F}$ — нерешетчатая матрица мер размера $m \times m$ такая, что матрица $\boldsymbol{F}(\infty)$ неразложима и $\varrho[\boldsymbol{F}(\infty)] = 1$, и пусть $\boldsymbol{z}(x)$ — измеримая по Борелю вектор-функция такая, что $\boldsymbol{z} \in L^1(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})$. Предположим, что п. в.*

$$\boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{z}(x). \tag{3}$$

Тогда существует постоянный вектор $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_m)^T$ такой, что $\boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{c}$ п. в.; при этом $\boldsymbol{c}$ — правый собственный вектор матрицы $\boldsymbol{F}(\infty)$, отвечающий ее собственному значению единица.

Доказательство теоремы опирается на матричный аналог теоремы 9.3 в [1] (см. теорему 2 ниже) и будет проведено в § 4.

Носитель $\operatorname{supp} \boldsymbol{\Lambda}$ векторного распределения $\boldsymbol{\Lambda}$ определяется точно так же, как и для «одномерного» распределения [1, определение 6.22].

Определение 3. Пусть $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)^T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Если ω — открытое подмножество в Ω и если $\boldsymbol{\Lambda}(\varphi) = \mathbf{0}$ для каждого $\varphi \in \mathscr{D}(\omega)$, то мы говорим, что *векторное распределение* $\boldsymbol{\Lambda}$ *исчезает в* ω. Пусть W — объединение всех открытых множеств $\omega \subset \Omega$, в которых векторное распределение $\boldsymbol{\Lambda}$ исчезает. *Носителем* $\operatorname{supp} \boldsymbol{\Lambda}$ векторного распределения $\boldsymbol{\Lambda}$ называется дополнение к W (в Ω).

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)^T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Тогда справедливо равенство* $\operatorname{supp} \boldsymbol{\Lambda} = \bigcup\limits_{i=1}^m \operatorname{supp} \Lambda_i$.

Доказательство. Пусть $\omega \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} \boldsymbol{\Lambda}$ и $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, причем $\operatorname{supp} \varphi \subset \omega$. Имеем $\boldsymbol{\Lambda}(\varphi) = \mathbf{0}$, т. е. $\Lambda_i(\varphi) = 0$ при всех i. Таким образом,

$$\omega \subset \bigcap_{i=1}^m \bigl(\Omega \setminus \operatorname{supp} \Lambda_i\bigr) = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^m \operatorname{supp} \Lambda_i.$$

Отсюда вытекает, что объединение W всех открытых подмножеств $\omega \subset \Omega$, в которых $\boldsymbol{\Lambda}$ исчезает, содержится в множестве $\Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^m \operatorname{supp} \Lambda_i$. Поэтому $\operatorname{supp} \boldsymbol{\Lambda} = \Omega \setminus W \supset \bigcup\limits_{i=1}^m \operatorname{supp} \Lambda_i$. Обратно, покажем, что $\boldsymbol{\Lambda}$ исчезает в $\Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^m \operatorname{supp} \Lambda_i$; тем самым мы установим, что $W \supset \Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^m \operatorname{supp} \Lambda_i$ и, следовательно, $\operatorname{supp} \boldsymbol{\Lambda} \subset \bigcup\limits_{i=1}^m \operatorname{supp} \Lambda_i$. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ и

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^m \operatorname{supp} \Lambda_i \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} \Lambda_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

По теореме 6.23 из [1] Λ_i исчезает в $\Omega \setminus \operatorname{supp} \Lambda_i$, поэтому $\Lambda_i(\varphi) = 0$, $i = 1, \dots, m$, т. е. $\boldsymbol{\Lambda}(\varphi) = \mathbf{0}$. Это означает, что $\boldsymbol{\Lambda}$ исчезает в $\Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} \operatorname{supp} \Lambda_i$, что и требовалось доказать.

Векторное распределение $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)^T$ назовем *медленно растущим*, если все его координаты Λ_i являются медленно растущими распределениями, и в этом случае будем писать $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathscr{S}_n'$.

Обозначим через $\boldsymbol{K} * \boldsymbol{u}$ свертку матричной функции $\boldsymbol{K} = (K_{ij})$ на $\mathbb{R}^n$ размера $m \times m$ и векторной функции $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$ на $\mathbb{R}^n$. Это вектор-функция с координатами

$$(\boldsymbol{K} * \boldsymbol{u}(x))_i := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{ij}(x-y) u_j(y)\, dy, \quad i = 1, \dots, m,$$

при условии, что данный интеграл имеет смысл; множитель $1\big/\sqrt{(2\pi)^n}$ взят для согласованности с определением, используемым в [1, обозначения 7.1]. Аналогично определяется свертка двух матриц размера $m \times m$, элементами которых являются функции.

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)^T \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *и* Y — *некоторая совокупность матричных функций* $\boldsymbol{K} = (K_{ij})$ *размера* $m \times m$ *в* $L^1(\mathbb{R}^n)$. *Если* $\boldsymbol{K} * \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ *для всех* $\boldsymbol{K} \in Y$, *то множество*

$$Z(Y) = \bigcap_{\boldsymbol{K} \in Y} \{s \in \mathbb{R}^n \colon \det \widehat{\boldsymbol{K}}(s) = 0\}$$

содержит носитель медленно растущего векторного распределения $\hat{\boldsymbol{u}}$.

Доказательство. Фиксируем $t \in \mathbb{R}^n \setminus Z(Y)$. Тогда $\det \widehat{\boldsymbol{K}}(t) \neq 0$ для некоторой матричной функции $\boldsymbol{K} \in Y$. Пусть $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$ — матрица произвольных положительных чисел. Применяя поэлементно лемму 9.2 [1], подберем матрицу функций $\boldsymbol{L} = (L_{ij}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\|L_{ij}\|_1 < \varepsilon_{ij}$ и $\widehat{L}_{ij}(s) = \widehat{K}_{ij}(t) - \widehat{K}_{ij}(s)$ для всех s из некоторой окрестности V_{ij} точки t, $i, j = 1, \dots, m$. Полагая $V := \bigcap\limits_{i,j=1}^{m} V_{ij}$, имеем $(\|L_{ij}\|_1) < \boldsymbol{\varepsilon}$ и $\widehat{\boldsymbol{L}}(s) = \widehat{\boldsymbol{K}}(t) - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)$ для всех s из окрестности V точки t. Пусть, для определенности, матричная норма скалярных матриц индуцирована евклидовой векторной нормой (см. [3, определения 5.2.1 и 5.6.3]). Выберем числа ε_{ij} достаточно малыми так, чтобы норма $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}$ была меньше $1/\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$, где $\boldsymbol{A} := \widehat{\boldsymbol{K}}(t)$.

Покажем, что $\hat{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}$ в V. Это эквивалентно тому, что $\hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\psi}) = \mathbf{0}$ для всех $\psi \in \mathscr{S}_n$ таких, что $\operatorname{supp} \hat{\psi}$ компактно и $\operatorname{supp} \hat{\psi} \subset V$; здесь $\hat{\psi}$ — преобразование Фурье функции ψ. Действительно, по определению $\hat{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}$ в V тогда и только тогда, когда $\hat{\boldsymbol{u}}(\varphi) = \mathbf{0}$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\operatorname{supp} \varphi \subset V$. Но $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}_n$, и преобразование Фурье $\mathscr{F}$ взаимно однозначно отображает $\mathscr{S}_n$ на себя. Поэтому, полагая $\psi := \mathscr{F}^{-1}(\varphi)$, получим $\varphi = \mathscr{F}(\psi) = \hat{\psi}$. Имеем $\hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\psi}) = \hat{\boldsymbol{u}}(\varphi) = \boldsymbol{u}(\check{\psi}) = (\boldsymbol{u} * \psi)(0)$, где $\check{\psi}(x) := \psi(-x)$, а $\boldsymbol{u} * \psi$ — свертка $\boldsymbol{u} \in \mathscr{S}_n'$ и $\psi \in \mathscr{S}_n$ (см. [1, определение 7.18]). Следовательно, достаточно показать, что $\boldsymbol{u} * \psi = \mathbf{0}$. Так как $\widehat{\boldsymbol{L}}(s) = \boldsymbol{A} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)$ на носителе функции $\hat{\psi}$, имеем

$$\hat{\psi}(s)[\boldsymbol{A} - \widehat{\boldsymbol{L}}(s)] = \hat{\psi}(s) \widehat{\boldsymbol{K}}(s). \tag{4}$$

Запишем $\boldsymbol{A}-\widehat{\boldsymbol{L}}(s)=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{I}-\widehat{\boldsymbol{L}}(s)\boldsymbol{A}^{-1}]$. Определим L^1-норму матрицы $\boldsymbol{M}=(M_{ij})$ функций из $L^1(\mathbb{R}^n)$ как норму скалярной матрицы $(\|M_{ij}\|_1)$. Тогда

$$\|\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 \le \|\boldsymbol{L}\|_1\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \le \|\boldsymbol{\varepsilon}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\| < 1$$

согласно выбору матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}$. Поскольку $\|(\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}^{-1})^{j*}\|_1 \le \|\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}^{-1}\|_1^j$, матричный функциональный ряд $\boldsymbol{A}^{-1}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}^{-1})^{j*}$ сходится по норме пространства $L^1(\mathbb{R}^n)$ к некоторой матричной функции $\boldsymbol{G}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\widehat{\boldsymbol{G}}(s)=\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{I}-\widehat{\boldsymbol{L}}(s)\boldsymbol{A}^{-1}]^{-1}=[\boldsymbol{A}-\widehat{\boldsymbol{L}}(s)]^{-1}.$$

Из (4) вытекает, что

$$\hat{\psi}(s)\boldsymbol{I}=\hat{\psi}(s)\widehat{\boldsymbol{G}}(s)\widehat{\boldsymbol{K}}(s)=:\widehat{\boldsymbol{G}}_1(s)\widehat{\boldsymbol{K}}(s),$$

где $\boldsymbol{G}_1:=\psi*\boldsymbol{G}$. Поскольку $\boldsymbol{K}*\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$, окончательно имеем

$$(u*\psi,\dots,u*\psi)^T=\psi\boldsymbol{I}*\boldsymbol{u}=\boldsymbol{G}_1*\boldsymbol{K}*\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},$$

т. е. $\boldsymbol{u}*\psi=\boldsymbol{0}$.

Итак, для любого $t\in\mathbb{R}^n\setminus Z(Y)$ найдется открытая окрестность $V\ni t$ такая, что $\hat{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}$ в V. Пусть W — объединение всех открытых подмножеств $\omega\subset\mathbb{R}^n$, в которых векторное распределение $\hat{\boldsymbol{u}}$ исчезает. Как мы только что показали, $W\supset\mathbb{R}^n\setminus Z(Y)$. Следовательно, $\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{u}}=\mathbb{R}^n\setminus W\subset Z(Y)$. Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Поскольку матрица мер $\boldsymbol{F}$ нерешетчата, то $\det(\boldsymbol{I}-\widehat{\boldsymbol{F}}(s))=0$ в том и только в том случае, если $s=0$ (см. [9, теорема 2]). Положим $\boldsymbol{G}:=\delta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}$. Имеем $\widehat{\boldsymbol{G}}(s)=\boldsymbol{I}-\widehat{\boldsymbol{F}}(s)$. Уравнение (3) можно записать в виде $\boldsymbol{G}*\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$. Пусть $\psi(x):=\exp(-x^2)$ и $\boldsymbol{K}(x):=\psi*\boldsymbol{G}(x)$, т. е.

$$K_{ij}(x):=\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(x-y)\,G_{ij}(dy),\quad i,j=1,\dots,m.$$

Тогда $\boldsymbol{K}\in L^1(\mathbb{R})$ и $\widehat{\boldsymbol{K}}(s)=\hat{\psi}(s)\widehat{\boldsymbol{G}}(s)$. Имеем $\det\widehat{\boldsymbol{K}}(s)=[\hat{\psi}(s)]^m\det\widehat{\boldsymbol{G}}(s)=0$ тогда и только тогда, когда $s=0$. Из (3) вытекает, что $\boldsymbol{K}*\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$. По теореме 2, в которой полагаем $Y:=\{\boldsymbol{K}\}$, носитель распределения $\hat{\boldsymbol{z}}=\big(\hat{z}_1,\dots,\hat{z}_m\big)$ содержится в одноточечном множестве $\{0\}$; в частности, $\operatorname{supp}\hat{z}_i\subset\{0\}$ при любом i. Поэтому каждое распределение $\hat{z}_i$ является конечной линейной комбинацией меры δ и ее производных [1, теорема 6.25] и, следовательно, функция $z_i(x)$ совпадает с полиномом в смысле теории обобщенных функций. Отсюда вытекает, что $z_i(x)$ равно п. в. полиному, который непременно должен иметь нулевую степень, иначе нарушалось бы условие $z_i\in L^1(\mathbb{R})+L^\infty(\mathbb{R})$. Итак, $z_i(x)=c_i$ п. в., $i=1,\dots,m$. Наконец,

$$\left|\int\limits_A\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{c})(x)\,dx\right|\le\int\limits_{\mathbb{R}}\boldsymbol{F}(dy)\int\limits_A|\boldsymbol{z}(x-y)-\boldsymbol{c}|\,dx=\boldsymbol{0}$$

для любого борелевского $A\subset\mathbb{R}$, и, следовательно, $\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{c})(x)=\boldsymbol{0}$ п. в. Таким образом, $\boldsymbol{F}*\boldsymbol{z}(x)=\boldsymbol{F}(\infty)\boldsymbol{c}$ п. в. Теперь из (3) и равенства $\boldsymbol{z}(x)=\boldsymbol{c}$ п. в. вытекает требуемое соотношение $\boldsymbol{F}(\infty)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 1 верна и в том случае, если вместо совокупности $L^1(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})$ взять более широкий класс всех борелевских функций f таких, что $\int\limits_a^{a+1} |f(x)|\,dx \le C(f) < \infty$ для всех $a \in \mathbb{R}$. Для $f \in L^1(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})$ в качестве $C(f)$ можно взять $\|f_1\|_1 + \|f_2\|_\infty$; здесь $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$ и $f_2 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

§ 5. Применение

Теорема 1 позволяет дополнить теорему 1 работы [5] о существовании и свойствах решения системы (2) утверждением о его единственности с точностью до п. в. постоянного векторного слагаемого. Пусть $C(\mathbb{R})$ — пространство всех непрерывных комплексных функций на $\mathbb{R}$. Обозначим

$$M_l := \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) \colon \exists f(\pm\infty)\}, \quad M_0 := \{f \in M_l \colon f(\pm\infty) = 0\},$$
$$C_l := \{f \in C(\mathbb{R}) \colon \exists f(\pm\infty)\}, \quad C_0 := \{f \in C_l \colon f(\pm\infty) = 0\}.$$

Пределы $f(\pm\infty)$ в M_l понимаются в следующем смысле: в классе эквивалентных функций найдется представитель $\tilde f$ такой, что существуют обычные пределы $\tilde f(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \tilde f(x)$ и $f(\pm\infty) := \tilde f(\pm\infty)$. Абсолютно непрерывную компоненту произвольной неотрицательной меры ν относительно меры Лебега обозначим через ν_c, а ее сингулярную компоненту относительно меры Лебега — через ν_s: $\nu_s = \nu - \nu_c$; таким образом, под сингулярной компонентой меры относительно меры Лебега здесь понимается сумма ее обычной сингулярной и дискретной компонент. Если $\boldsymbol{G} = (G_{ij})$ — матрица, элементы которой суть неотрицательные меры, то $\boldsymbol{G}_s := ((G_{ij})_s)$.

Теорема 3. *Пусть $\boldsymbol{F}$ — матрица размера $m\times m$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры на $\mathbb{R}$. Предположим, что матрица $\boldsymbol{F}(\infty)$ неразложима и $\varrho[\boldsymbol{F}(\infty)] = 1$. Выберем левый и правый собственные векторы $\boldsymbol{l} = (l_1,\dots,l_m)$ и $\boldsymbol{r} = (r_1,\dots,r_m)^T$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\boldsymbol{F}(\infty)$. Допустим, что $\mu := \boldsymbol{l} \int\limits_{\mathbb{R}} x\,\boldsymbol{F}(dx)\boldsymbol{r} \in (0,+\infty)$ и $\varrho[(\boldsymbol{F}^{q*})_s(\infty)] < 1$ при некотором целом $q \ge 1$. Пусть $\boldsymbol{g} \in L^1(\mathbb{R})$ — вектор-функция. Тогда решение $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{H} * \boldsymbol{g}(x)$ системы (2) можно представить в виде $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2$, где $\boldsymbol{z}_1 \in C_l$, $\boldsymbol{z}_2 \in L^1(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{z}_1(-\infty) = (0,\dots,0)^T$ и*

$$\boldsymbol{z}_1(+\infty) = \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{l} \int\limits_{\mathbb{R}} \boldsymbol{g}(x)\,dx}{\boldsymbol{l} \int\limits_{\mathbb{R}} x\,\boldsymbol{F}(dx)\boldsymbol{r}}.$$

Если дополнительно предположить $\boldsymbol{g} \in M_0\,(C_0)$, то $\boldsymbol{z}_2 \in M_0\,(C_0)$, так что $\boldsymbol{z} \in M_l\,(C_l)$ и $\boldsymbol{z}(\pm\infty) = \boldsymbol{z}_1(\pm\infty)$.

Если $\boldsymbol{z}_* \in L^1(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})$ — любое другое решение системы (2), то найдется постоянный вектор $\boldsymbol{c}$ такой, что $\boldsymbol{z}_* - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}$ п. в., при этом $\boldsymbol{F}(\infty)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
2. *Sgibnev M. S.* Stone's decomposition of the renewal measure via Banach-algebraic techniques // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130. P. 2425–2430.
3. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
4. *Sgibnev M. S.* Systems of renewal equations on the line // J. Math. Sci. The University of Tokyo. 2003. V. 10. P. 495–517.

5. *Сгибнев М. С.* Системы интегральных уравнений типа восстановления на прямой // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 1. С. 128–137.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. 2.
7. *Лукач Е.* Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
8. *Crump K. S.* On systems of renewal equations // J. Math. Anal. Appl. 1970. V. 30. P. 425–434.
9. *Сгибнев М. С.* Матричный аналог теоремы восстановления Блеквелла на прямой // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 69–86.

Статья поступила 22 октября 2008 г.

Сгибнев Михаил Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sgibnev@math.nsc.ru