*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1*

*УДК 519.21*

# ОБ АППРОКСИМАЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШОГО ВЫБРОСА НЕСТАЦИОНАРНОГО ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА

**М. С. Муминов**

**Аннотация.** Рассматривается нестационарный гауссовский процесс со средним нуль и дисперсией единица, имеющий среднеквадратичную производную. Исследуется асимптотическое поведение распределения максимума гауссовских процессов как на конечном, так и на растущем интервале. Полученные результаты применяются для исследования максимального уклонения эмпирической плотности и кривой регрессии на конечном отрезке.

**Ключевые слова:** нестационарный гауссовский процесс, асимптотическое поведение, распределения максимума, пересечение уровня, факториальные моменты, среднеквадратичные производные.

## 1. Введение

Пусть $X(t)$ — сепарабельный гауссовский процесс, $t \in (-\infty, \infty)$, дифференцируемый в среднеквадратичном. В работе рассматриваются асимптотика вероятности

$$P_T(u) = P(\max_{0\le t\le T} X(t) > u), \quad T > 0,$$

при $u \to \infty$, а также ее точность[1)]. Величина $P_T(u)$ непосредственно связана с задачей, занимающей немаловажное место в статистической радиотехнике, с вычислением вероятности достижения некоторого уровня случайным сигналом на заданном отрезке времени [3–5]. Например, Райс [5] в 1942 г. с целью аппроксимации вероятности превышения случайным гауссовским сигналом уровня $u$ на отрезке времени $[0, T]$ вывел свою знаменитую формулу для среднего числа выходов случайного сигнала за этот уровень $u$. В методе Райса используется следующий факт: вероятность того, что число выходов траекторий случайного сигнала за уровень $u$ больше или равно двум, значительно меньше, чем вероятность выхода за этот же уровень ровно один раз. В этом случае вероятность $P_T(u)$ можно приблизить при помощи моментов числа пересечений уровня $u$. В дальнейшем идея Райса развита и применена для нахождения асимптотики вероятности достижения определенного уровня гауссовским случайным сигналом в работах В. И. Питербарга [6–8] и в совместных работах Азаиса и Вшебора [9–11].

Близкие задачи неоднократно рассматривались в литературе. В работе [12] для некоторого класса процессов $X(t)$ в предположении

$$EX(t) = 0, \quad \operatorname{Var} X(t) = 1 \quad \text{при всех } t \in [0, T]$$

[1)] Используемые терминологию и факты общего характера можно найти в [1, 2] для фиксированного $T$ найдена функция $Q_T(u)$ такая, что $P_T(u)/Q_T(u) \to 1$ при $u \to \infty$. Из теоремы 10.1 в [12] вытекает, что если $X'(t)$ существует (в среднеквадратичном смысле) и $\inf\limits_{0\le s\le T} \operatorname{Var}(X'(s)) > 0$, то

$$Q_T(u) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^T \sqrt{\operatorname{Var}(X'(s))}\, ds \exp\{-u^2/2\}.$$

Далее, в [6] для случая стационарного процесса $X(t)$ получено асимптотическое разложение для вероятности $P_T(u)$. В [13] для нестационарного процесса $X(t)$ установлено соотношение, аналогичное вышеприведенному в случае, когда $\inf\limits_{0\le s\le T} \operatorname{Var}(X'(s)) > 0$ и выполняется ряд условий, близких к тем, что рассматриваются в данной статье. При выполнении же более сильных ограничений, касающихся, в частности, второй среднеквадратичной производной процесса, в [13] найдена оценка скорости сходимости в этом соотношении. Для изучения асимптотики вероятности $P_T(u)$ в работах Азаиса, Вшебора тоже предполагается, что траектория гауссовского процесса является достаточно гладкой. Например, в теореме 1 из [9] предполагается, что траектория гауссовского процесса $X(t)$, $t \in [0,1]$, с вероятностью единица принадлежит пространству $C^\infty[0,1]$. Однако при решении некоторых статистических задач траектория аппроксимирующего гауссовского процесса не является достаточно гладкой. В качестве примера мы можем привести задачу построения доверительного интервала для неизвестной плотности вероятности и кривой регрессии с помощью интерполяционного кубического сплайна [14]. В данном случае у аппроксимирующего гауссовского процесса $\eta_n(t)$, $t \in [0,1]$, не существует среднеквадратичных производных второго порядка в узлах интерполяции, более того, $\inf\limits_{0\le t\le 1} \operatorname{Var} \eta_n'(t) = 0$ при рассматриваемых краевых условиях, возникающих при построении сплайна. Заметим, что в этом случае нельзя применять результаты работы Р. О. Рудзкиса [13].

В настоящей статье предположений относительно второй среднеквадратичной производной не делается и, кроме того, не предполагается строгой положительности величины $\inf\limits_{0\le s\le T} \operatorname{Var}(X'(s))$. Полученные результаты применяются для исследования максимального уклонения непараметрических оценок плотностей и кривых регрессии, построенных с помощью интерполяционных кубических сплайнов и ядер Дирихле. В работах [15, 16] получена скорость сходимости распределений максимальных уклонений эмпирических плотностей и кривой регрессии, построенных с помощью оценки Парзена — Розенблатта. Аналогичный результат даже для сплайн-оценок до сих пор не получен. Результаты данной работы позволяют получить аналогичное результаты для ядерной оценки и оценки, построенной с помощью $\delta$-последовательности для неизвестной плотности вероятности (соответствующие теоремы анонсированы в [17]).

Разд. 2 статьи содержит формулировки основных результатов (теоремы 1–4), в разд. 3 приведены примеры из области непараметрической статистики, где с помощью теорем 2 и 3 найдены оценки скорости сходимости в предельных теоремах для распределений максимальных уклонений эмпирических плотностей и кривых регрессии, построенных с помощью интерполяционных кубических сплайнов и ядер Дирихле (теоремы 5–8). Разд. 4 содержит вспомогательные результаты, и, наконец, в разд. 5 приведены доказательства основных теорем.

## 2. Формулировка основных результатов

Пусть $X(t)$ — сепарабельный гауссовский процесс, дифференцируемый в среднеквадратичном, $t \in (-\infty, \infty)$, и пусть для некоторого $T$, $T \le \infty$,

$$EX(t) = 0, \quad \operatorname{Var} X(t) = 1 \text{ при всех } t \in [0, T]. \tag{1}$$

Примем следующие обозначения:

$$r(s,t) = \operatorname{cov}(X(s), X(t)), \quad \alpha(s,t) = \operatorname{cov}(X(s), X'(t)),$$

$$\beta(s,t) = \operatorname{cov}(X'(s), X'(t)), \quad \beta(s) = \beta(s,s), \quad I_T = \int_0^T \sqrt{\beta(s)}ds, \tag{2}$$

$$\beta_T = \min_{0 \le s \le T} \beta(s), \quad B_T = \max_{0 \le s \le T} \beta(s).$$

Введем следующие условия на процесс $X(t)$.

(I) Найдутся постоянные $C_T < \infty$, $\delta_T$, $0 < \delta_T \le T$, и неубывающая функция $h(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, такие, что для всех $s, t \in [0, T]$, $|t - s| \le \delta_T$,

$$|\beta(s,t) - \beta(s,s)| \le C_T h(|t - s|), \tag{3}$$

причем функция $h(\tau)\tau^{-1}$ интегрируема на $[0, \delta_T]$.

(I$'$) Выполнено условие (I) с $h(\tau) = \tau^\alpha l_\alpha(\tau)$, где $0 \le \alpha \le 2$, а $l_\alpha(\tau)$ — медленно меняющаяся при $\tau \to 0$ функция (она может быть и постоянной при $\alpha > 0$). При этом

(а) если $\alpha = 0$, то $l_0(\tau)$ не убывает на $[0, \delta_T]$, $l_0(\tau)\tau^{-1}$ интегрируема на $[0, \delta_T]$ и для некоторого $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 2$, функция $\tau^{-\varepsilon} l_0(\tau)$ не возрастает на $(0, T]$;

(б) если $0 < \alpha < 2$, то $h(\tau) = \tau^\alpha$;

(в) если $\alpha = 2$, то либо $l_2(\tau)$ — постоянная (для определенности $l_2(\tau) \equiv 1$), либо $l_2(\tau) \uparrow \infty$ при $\tau \to 0$, либо $l_2(\tau)$ не возрастает и для некоторого $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 2$, функция $\tau^\varepsilon l_2(\tau)$ не убывает на $(0, T]$.

(II) Если $\beta_T = 0$, то $\operatorname{mes}\{s \in [0, T]; \beta(s) > 0\} > 0$ и $\beta(s,t) \ge 0$ при всех $s, t \in [0, T]$, $|t - s| \le \delta_T$, где mes — мера Лебега соответствующего множества.

(III) Если $\delta_T < T$, то найдется постоянная $c_T > 0$ такая, что $1 - r(s,t) \ge c_T$ при всех $s, t \in [0, T]$, $|t - s| > \delta_T$.

(IV) Если $\delta_T < T$, то найдется $d_T > 0$ такое, что $1 + r(s,t) \ge d_T$ при всех $s, t \in [0, T]$, $|t - s| > \delta_T$.

Основными результатами данной работы являются четыре теоремы, две из которых дают асимптотическое поведение вероятности

$$P_T(u) = P(\max_{0 \le t \le T} X(t) > u), \quad T > 0, \tag{4}$$

для процесса, удовлетворяющего условиям (I)–(III) при $u \to \infty$ как для фиксированного $T < \infty$ (теорема 1), так и для $T$, растущего вместе с $u$ (теорема 4), а две другие дают ограничение сверху на поправочный член этой асимптотики для процесса, удовлетворяющего условиям (I$'$), (II)–(IV), также для фиксированного (теорема 2, 3) и для растущего $T$ (теорема 4).

**Теорема 1.** *Пусть* $X(t)$ *— сепарабельный гауссовский процесс, для которого выполнены* (1) *(для какого-либо фиксированного* $T < \infty$*), а также условия* (I)–(III). *Тогда верно следующее утверждение:*

$$P_T(u)/Q_T(u) \to 1 \quad \text{при } u \to \infty, \tag{5}$$

*где $Q_T(u)$ определяется равенством*

$$Q_T(u) = (2\pi)^{-1} I_T \exp\{-u^2/2\}. \tag{6}$$

Замечание 1. В условиях теоремы соотношение (5) выполняется равномерно по всем процессам $X(t)$, для которых верны неравенства $C_T \le C' < \infty$, $\delta_T \ge \delta > 0$, $c_T > c > 0$, $T^{-1} I_T \ge b > 0$, $B_T \le B < \infty$ с заданными $\delta$, $C'$, $h(\cdot)$, $c$, $b$ и $B$.

Введем дополнительные обозначения:

$$D_{\tau'} = \{s \in (0,T) : \beta(s) > 10 \max\{1, 3C_T\} h(\tau')\},\ \overline{D}_{\tau'} = [0,T] \setminus D_{\tau'},\ 0 < \tau' \le \delta_T, \tag{7}$$

$\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартного нормального закона, $C$ — постоянные, $C(\cdot, \dots, \cdot)$ — постоянные, зависящие от параметров, указанных в скобках, $I_A(x)$ — индикаторная функция множества $\{x : x \in A\}$, где $A$ — борелевское множество на прямой,

$$H(\delta) = \int_0^\delta \frac{h(\tau)}{\tau}\, d\tau,\ 0 \le \delta \le \delta_T, \quad J_T = \max_{0 \le s \le T} \int_0^T |r(s,t)|\, dt,$$

$$\bar\alpha(s,t) = \alpha(s,t) I_{[0,\infty)}(\alpha(s,t)) - \alpha(t,s) I_{(-\infty,0]}(\alpha(s,t)), \tag{8}$$

$$K_T = \max_{0 \le s \le T} \int_0^T \bar\alpha(s,t)\, dt,\ L_T = \max_{0 \le s \le T} \int_0^T |\alpha(s,t) + \alpha(t,s)|\, dt,$$

$$\widetilde{Q}_T(u) = Q_T(u) + 1 - \Phi(u), \tag{9}$$

где $Q_T(u)$ определяется равенством (6).

Кроме того, $\tau_u$ будет означать величину $\delta_T$, если $\beta_T > 0$, и какую-либо величину такую, что $0 < \tau_u \le \delta_T$, $\tau_u \downarrow 0$, $h(\tau_u)\tau_u^2 u^2 \uparrow \infty$ при $u \to \infty$, если $\beta_T = 0$. Далее, при условии (I′) с $\alpha = 2$, $l_2(\cdot) \ne \mathrm{const}$ определим $\rho(y)$ как верхнюю границу тех $\rho$, $0 < \rho \le 1$, для которых $l_2(\rho) \log \rho^{-\frac{8}{3}} \ge y$, $y \ge 0$. Нам также понадобятся следующие обозначения:

$$v_{u,\alpha} = \sqrt{l_\alpha(\tau_u)}\, \tau_u^\alpha u \quad \text{при } 0 \le \alpha < 2,$$

$$\rho_u = \rho(h^2(\tau_u) u^2) \quad \text{при } \alpha = 2,\ l_2(\cdot) \ne \mathrm{const}.$$

**Теорема 2.** *Пусть $0 < T < \infty$, $u \ge 1$ и выполнены условия* (1), (I′), (II)–(IV). *Тогда для вероятности* (4) *справедливо соотношение*

$$0 \le \widetilde{Q}_T(u) - P_T(u) \le R_T^{(0)} + c_T^{-3/2} I_T e^{-u^2/2} \sum_{i=1}^{4} R_T^{(i)}(u), \tag{10}$$

*в котором* $R_T^{(0)}(u) = \frac{\sqrt{10}}{\pi} e^{-u^2/2} \sqrt{C_T h(\tau_u)}\, \mathrm{mes}\, \widetilde{D}_{\tau_u}$, $\widetilde{D}_{\tau_u} = \overline{D}_{\tau_u} \cap \{s \in [0,T] : \beta(s) > 0\}$,

$$R_T^{(1)}(u) = \begin{cases} C(\varepsilon) T I_T^{-1} \sqrt{C_T} [h(\tau_u)]^{-1/2} H\big(v_{u,0}^{-1}\big), & \alpha = 0 \text{ в } (I'), \\ C(\alpha,\varepsilon) T I_T^{-1} \sqrt{C_T} [h(\tau_u)]^{-1/2} v_{u,\alpha}^{-2\alpha/(2-\alpha)}, & 0 < \alpha < 2 \text{ в } (I'), \\ C\sqrt{C_T} T I_T^{-1} [h(\tau_u)]^{-1/2} l_2(\rho_u) \exp\big\{-\frac{3h^2(\tau_u)u^2}{4 l_2(\rho_u)}\big\}, & \alpha = 2 \text{ в } (I'), \\ & l_2(\cdot) \ne \mathrm{const}, \\ C\sqrt{C} T I_T^{-1} \tau_u^{-1} \exp\big\{-\frac{3}{4}\tau_u^4 u^4\big\}, & \alpha = 2 \text{ в } (I'), \\ & l_2(\cdot) = \mathrm{const}, \end{cases}$$

$$R_T^{(2)}(u) = CB_T I_T^{-1} T[h(\tau_u)]^{-1/2}\tau_u^{-1} u \exp\{-h(\tau_u)\tau_u^2 u^2\}(\delta_T - \tau_u),$$

$$R_T^{(3)}(u) = Cc_T d_T^{-3/2}\big[u^2 \max\{1, \sqrt{B_T}\} J_T + \max\{K_T, L_T\} u \\ + d_T^{-1} T \sqrt{B_T} \min\{K_T, L_T\} I_T^{-1} u^2\big] \exp\{(-1/4) c_T u^2\},$$

$$R_T^{(4)}(u) = Cc_T \left[c_T^{1/2} u^{-1} I_T^{-1} \exp\left\{-\frac{[1 - r(0,T)]u^2}{2[1 + r(0,T)]}\right\} + d_T^{-1/2}\sqrt{B_T} T e^{-u^2/2}\right],$$

*причем данные соотношения справедливы для*

$$u \ge \big(\sqrt{l_\alpha(\tau_\alpha)}\tau_u{}^\alpha\big)^{-1} \delta_T^{-(2-\alpha)/2} \quad \textit{при } 0 \le \alpha < 2,$$

$$u \ge \big((1/3) l_2(\delta_T) |\log \delta_T|\big)^{1/2} h(\tau_u) \quad \textit{при } \alpha = 2,\ l_2(\cdot) \ne \mathrm{const},$$

$$u \ge 1 \quad \textit{при } \alpha = 2,\ l_2(\cdot) = \mathrm{const}.$$

Замечание 2. При некоторых дополнительных условиях правая часть оценки (10) упрощается. В частности, возможны следующие упрощения.

1. Если $\beta_T > 0$ (в частности, если процесс $X(t)$ — стационарный с невыраженной спектральной функцией), то множество $\widetilde{D}_{\tau_u}$ пустое и, следовательно, $R_T^{(0)}(u) = 0$. Кроме того, при $\beta_T > 0$ имеем $R_T^{(2)}(u) = 0$.

2. Если функция $r(s,t)$ положительна и для любого $s \in [0,T]$ не возрастает по $t$ при $t \ge s$, то в величине $R_T^{(3)}(u)$ третье слагаемое, содержащее множитель $u^2$, исчезает, так как в этом случае $\alpha(s,t) \le 0$ при $t \ge s$ и, значит, $K_T = 0$.

3. Если процесс $X(t)$ стационарный, то $\alpha(s,t) = -\alpha(t,s)$, так что $L_T = 0$. Таким образом, получаем те же упрощения в $R_T^{(3)}(u)$, что и в п. 2. Если дополнительно выполнено условие п. 2, то слагаемое в $R_T^{(3)}(u)$, содержащее множитель $u$, также исчезает.

Замечание 3. Пусть $X(t)$ — стационарный процесс, спектральная функция которого содержит непрерывную компоненту, и выполнено условие (I) при $0 < \alpha \le 2$, $l(\tau) = \mathrm{const}$. Тогда условия (II), (III) выполняются, а из соотношения (10) с учетом пп. 1 и 3 и замечания 1 вытекает оценка вида (2.5), установленная в работе [6].

Пусть теперь $0 < T \le \infty$, $\tilde\beta > 0$, $\tilde\delta > 0$, $\tilde c > 0$, $\widetilde{D} > 0$, $\widetilde{B} < \infty$, $\widetilde{C} < \infty$, $\widetilde{K} < \infty$ — некоторые постоянные и $S_T$ — совокупность всех гауссовских процессов, имеющих среднеквадратичную производную, для которых при данном $T$ выполнены условия (3), (I$'$) при $0 < \alpha \le 2$, $l_\alpha(\tau) \equiv 1$, (III), (IV) и неравенства

$$\begin{gathered} \beta_T \ge \tilde\beta, \quad \delta_T \ge \tilde\delta, \quad c_T \ge \tilde c, \quad d_T \ge \widetilde{D}, \quad C_T \le C, \\ \max\{1, B_T\} \le \widetilde{B}, \quad J_T \le \widetilde{J}, \quad \max\{K_T, L_T\} \le \widetilde{K}. \end{gathered} \tag{11}$$

Пусть также $\widetilde{I}_T = 0$, если $T \le \delta_T$, и $\widetilde{I}_T = 1$, если $\delta_T < T$, так что $\widetilde{I}_T = 1$, если $T > 1$.

**Теорема 3.** *Пусть $0 < T < \infty$. Тогда для любого процесса $X(t) \in S_T$ справедливо соотношение*

$$P_T(u) = \widetilde{Q}_T(u)[1 + R_T(u)], \tag{12}$$

*в котором* $\widetilde{Q}_T(u)$ *определяется равенством* (9) *и при всех* $u \geq \tilde{\delta}^{-2}$

$$
\begin{aligned}
|R_T(u)| \leq C(\alpha)[\widetilde{C}\tilde{\delta}^{-\alpha(2+3\alpha)/(2(2-\alpha))}u^{-(2\alpha)/(2-\alpha)}\tilde{\beta}^{-1/2} + \widetilde{I}_T c^{-1/2}\widetilde{D}^{-(4+k)/2}\tilde{\beta}^{-1/2}] \\
\times [\sqrt{\widetilde{B}}(\widetilde{J}\widetilde{D} + \widetilde{K})u^2 + \widetilde{K}\widetilde{D}]\exp\{(-1/4)\tilde{c}u^2\} \\
+ \widetilde{I}_T C\tilde{d}^{-1/2}\tilde{c}\sqrt{\widetilde{B}}T\exp\{-u^2/2\}, \quad \text{если } 0 < \alpha < 2; \quad (13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|R_T(u)| \leq C\{\sqrt{\widetilde{C}}\tilde{c}^{-3/2}\beta^{-1/2}\exp\{-(3/4)\tilde{\delta}^4u^2\} + \bigl[T\sqrt{\widetilde{B}}(\widetilde{K} + \widetilde{J}\widetilde{D})\tilde{d}^{-1/2}u^{1+k} \\
+ \widetilde{D}^{-1}\sqrt{\widetilde{B}}\min\{\widetilde{K}, \widetilde{L}\}\tilde{\beta}^{-1/2}]\exp\{-(1/4)\tilde{c}u^2\} \\
+ \sqrt{\widetilde{B}}\widetilde{D}^{-1/2}\tilde{c}T\exp\{-u^2/2\}\}, \quad \text{если } \alpha = 2. \quad (14)
\end{aligned}
$$

*Здесь* $k = 1$ *в случае нестационарного и* $k = 0$ *в случае стационарного процессов* $X(t)$.

**Теорема 4.** *Пусть* $T_u$ *— какая-либо зависящая от* $u$ *величина,* $T_u \uparrow \infty$, $T_u e^{-\frac{u^2}{2}} \to 0$ *при* $u \to \infty$. *Тогда справедливо соотношение*

$$
P_{T_u}(u)/\widetilde{Q}_{T_u}(u) \to 1 \quad \text{при } u \to \infty
$$

*равномерно по всем* $X(t) \in S_{T_u}$, *где* $Q_{T_u}(u)$ *определяется в (6) с* $T = T_u$. *При этом выполняется равенство* (12) *с* $T = T_u$ *и для всех* $u \geq \tilde{\delta}^{-2}$ *таких, что* $T_u > 1$, *— неравенства* (13), (14) *с* $T = T_u$, $\widetilde{I}_T = 1$.

## 3. Примеры

В работах Бикела и Розенблатта [18], В. Д. Конакова и В. И. Питербарга [15, 16] и М. С. Муминова [14, § 7] предложена схема приближений оценок гауссовскими процессами. Модифицируя эту схему, можно получить аналогичные результаты для сплайн-оценок и оценок, построенных с помощью системы тригонометрических функций.

**1. Оценки, полученные с помощью интерполяционных кубических сплайнов.** Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимая выборка из генеральной совокупности с плотностью распределения $f(t)$, сосредоточенной и непрерывной на отрезке $[0, 1]$. Пусть $S_n(t)$ — кубический сплайн, интерполирующий значения $y_k = F_n(t_k)$ в точках $t_k = kh$, $k = 0, \ldots, N$, с краевыми условиями

$$
S_n'(0) = a_n,\ S_n'(1) = b_n,\ \text{где } N = N(n),\ h = 1/N,\ h \to 0,\ nh \to \infty \text{ при } n \to \infty,
$$

$$
a_n = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{3}y_3 - \frac{3}{2}y_2 + 3y_1 - \frac{11}{6}y_0\right),
$$

$$
b_n = \frac{1}{h}\left(\frac{11}{6}y_N - 3y_{N-1} + \frac{3}{2}y_{N-2} - \frac{1}{3}y_{N-3}\right).
$$

Тогда, как известно [14, § 1],

$$
S_n'(t) = \frac{1}{h}\int_0^1 W_n(t, \tau)\, dF_n(\tau),
$$

где явный вид ядра сплайна $W_n(t,\tau)$ приводится там же. В качестве оценки неизвестной плотности распределения $f(t)$ примем статистику $S_n'(t)$. Пусть

$$\sigma_n^2(t) = h^{-2}\int\limits_0^1 W_N^2(t,\tau)\,d\tau, \quad \Psi_n = \int\limits_0^1 \sqrt{\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{W_N(t,\tau)}{h\sigma_n(t)}\right)^2 d\tau dt},$$

$$l_n = \sqrt{2\log\left(\frac{\Psi_n}{2\pi}\right)}, \quad u_n = l_n + \frac{x}{l_n},$$

$$\xi_n^{(1)}(t) = \sqrt{n}\frac{S_n'(t)-f(t)}{\sigma_n(t)\sqrt{f(t)}}, \quad \xi_n^{(2)}(t) = \sqrt{n}\frac{S_n'(t)-ES_n'(t)}{\sigma_n(t)\sqrt{f(t)}}, \quad t\in[0,1],$$

$\{\omega_n(t), t\in[0,1]\}$ — последовательность винеровских процессов,

$$Y_n(t) = \sqrt{n}[F_n^*(t)-t], \quad t\in[0,1], \quad \text{где } F_n^*(t) = F_n(F^{-1}(t)),$$

$$B_n(t) = \omega_n(t) - t\omega_n(1), \quad t\in[0,1],$$

$$\xi_n^{(3)}(t) = (h\sigma_n(t)\sqrt{f(t)})^{-1}\int\limits_0^1 W_N(t,\tau)\,d\omega_n(F(\tau)), \quad t\in[0,1],$$

$$\xi_n^{(4)}(t) = (h\sigma_n(t)\sqrt{f(t)})^{-1}\int\limits_0^1 W_N(t,\tau)\,d[Y_n(F(\tau))-B_n(F(\tau))-\omega_n(1)F(\tau)],\ t\in[0,1],$$

$$\eta_n(t) = (h\sigma_n(t))^{-1}\int\limits_0^1 W_N(t,\tau)\,d\omega_n(t), \quad t\in[0,1],$$

$$\eta_n^{(1)}(t) = (h\sigma_n(t))^{-1}\int\limits_0^1 W_N(t,\tau)\left[\frac{\sqrt{f(\tau)}}{\sqrt{f(t)}}-1\right]d\omega_n(\tau), \quad t\in[0,1].$$

Заметим, что

$$\xi_n^{(2)}(t) = (h\sigma_n(t)\sqrt{f(t)})^{-1}\int\limits_0^1 W_N(t,\tau)\,dY_n(F(\tau)), \quad \xi_n^{(3)}(t)+\xi_n^{(4)}(t) = \xi_n^{(2)}(t),$$

а ковариационные структуры гауссовских процессов $\eta_n(t)+\eta_n^{(1)}(t)$ и $\xi_n^{(3)}(t)$ совпадают. Точно так же, как в работах [14, 19], легко доказать, что с вероятностью единица

$$\big|\max_T\big|\xi_n^{(1)}(t)\big| - \max_T\big|\xi_n^{(2)}(t)\big|\big| \le C_1 h\sqrt{nh},$$

$$\max_T\big|\xi_n^{(4)}(t)\big| \le C_2\left(\frac{\log n}{\sqrt{nh}} \vee \sqrt{h}\log n\right),$$

$$\big|\max_T\big|\xi_n^{(4)}(t)+\xi_n^{(3)}(t)\big| - \max_T\big|\xi_n^{(3)}\big|\big| \le C_2\left(\frac{\log n}{\sqrt{nh}} \vee \sqrt{h}\log n\right)$$

и для любого $\varepsilon>0$

$$P\big(\max_T\big|\eta_n^{(1)}(t)\big| > \varepsilon\big) \le \frac{C_3 h}{\log N} + \frac{\sqrt{h}}{\varepsilon}C_4\exp\{-C_5 h^{-1}\varepsilon^2\},$$

$$P\big(l_n\big|\max_T\big|\eta_n(t)+\eta_n^{(1)}(t)\big|-\max_T|\eta_n(t)|\big|>\varepsilon\big)\le\frac{C_3h}{\log N}+C_4\varepsilon^{-1}\sqrt{h}\exp\big\{-C_5\varepsilon^2h^{-1}l_n^{-2}\big\},$$

где $a\vee b=\max\{a,b\}$.

Теперь, выбирая $\varepsilon=\varepsilon_n=C_6\sqrt{h}\log N\cdot l_n$ и обозначая

$$P_T\big(\xi_n^{(1)};x\big)=P\big(l_n\max_T\big|\xi_n^{(1)}(t)\big|-l_n^2<x\big),\ P_T(\eta_n;x)=P\big(l_n\max_T|\eta_n(t)|-l_n^2<x\big),$$

можем утверждать, что

$$P_T(\eta_n;x-C_7\sqrt{h\log^3n})-C_8h\le P_T\big(\xi_n^{(1)};x\big)\le P_T(\eta_n;x+C_7\sqrt{h\log^3n})+C_8h.$$

Здесь, выше и в дальнейшем $C_i$, $i=1,2,\dots,$ — положительные постоянные.

Из последнего утверждения следует, что распределения случайных величин $l_n\max_T\big|\xi_n^{(1)}(t)\big|-l_n^2$ и $l_n\max_T|\eta_n(t)|-l_n^2$ асимптотически совпадают. Однако среднеквадратичные производные второго порядка у гауссовского процесса $\eta_n(t)$ не существуют в узлах интерполяции. Поэтому мы не можем применять известные результаты, в том числе теоремы Р. О. Рудзкиса [13]. Поступая так же, как в [14, § 7], имеем

$$P_T(\eta_n;x)=\prod_{k=1}^N\big[1-2P(\max_{I_k}\eta_n(t)\ge u_n)\big]+R_n^{(1)}(x),$$

где $I_k=\big[\frac{k-1}{N},\frac{k}{N}\big]$, $k=1,2,\dots,N$, $\sup_T\big|R_n^{(1)}(x)\big|\le\frac{C}{\log n}$.

Теперь $\eta_n(t)$ в каждом интервале $I_k$ удовлетворяет условиям теоремы 3 с $\alpha=1$, $h(\tau)=\tau$, $\beta(t)=\beta_n(t)=\operatorname{Var}\eta_n'(t)$. Используя полученные выражения для $\rho_n(t,s)=\operatorname{cov}(\eta_n(t),\eta_n(s))$ из § 7 работы [14], при выбранных краевых условиях для $S_n(t)$ убеждаемся, что $\beta_n=\inf_T\beta_n(t)>0$. Согласно теореме 3 имеем

$$P_T(\eta_n;x)=e^{-2e^{-x}}+R_n^{(2)}(x),$$

где $\sup_T\big|R_n^{(2)}(x)\big|\le\frac{C}{\log n}$.

Наконец, получим следующую теорему.

**Теорема 5.** *Пусть $N=n^\delta$, $\frac13<\delta<1$, и пусть функция $f^{1/2}(t)$, $t\in T$, строго положительна и удовлетворяет условию Липшица в $[0,1]=\operatorname{supp}f(t)$. Тогда равномерно по $x$ справедливо соотношение*

$$P_T\big(\xi_n^{(1)},x\big)=e^{-2e^{-x}}+R_n(x),$$

*где* $\sup_T|R_n(x)|\le\frac{C}{\log n}$.

Пусть теперь $(X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n)$ — независимая выборка объема $n$ из генеральной совокупности $(X,Y)$ с неизвестной функцией регрессии $r(t)=E(Y/X=t)$ и с вероятностью единица $X\in[0,1]$, $Y\in[A,B]$, $-\infty<A,B<\infty$. В качестве оценки $r(t)$, $t\in[0,1]$, примем статистику

$$r_n(t)=\frac{1}{nh}\frac{\sum\limits_{i=1}^nY_iW_N(t,X_i)}{S_n'(t)},\quad t\in[0,1].$$

Обозначим

$$\tilde{\xi}_n^{(2)}(t) = \sqrt{n}\left(\frac{f_n(t)}{V_n(t)}\right)^{1/2}\frac{r_n(t)-r(t)}{\sigma_n(t)}, \quad t \in [0,1],$$

$$V_n(t) = \frac{1}{(nh)^2}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2 W_N(t,X_i)}{S_n'(t)} - r_n^2(t), \quad t \in [0,1],$$

$$P_T\big(\tilde{\xi}_n^{(2)};x\big) = P\big(l_n \max_T \big|\tilde{\xi}_n^{(2)}(t)\big| - l_n^2 \le x\big).$$

Аналогично теореме 2.2 из [16] имеем

$$P_n(\eta_n; x - C_9\sqrt{h\log n}) - C_{10}h \le P_T\big(\tilde{\xi}_n^{(2)};x\big) \le P_n(\eta_n; x + C_9\sqrt{h\log n}) + C_{10}h.$$

Отсюда и из вышеприведенных результатов вытекает следующая

**Теорема 6.** *Пусть $N = n^\delta$, $\frac{1}{3} < \delta < \frac{1}{2}$, и выполнены следующие условия.*

1. *Существуют окрестность $T' \supset T$ множества $T$ и постоянные $C_1 < C_2$ такие, что $P(-\infty < C_1 \le \varepsilon \le C_2 < \infty / X \in T') = 1$, $\varepsilon = Y - r(X)$ и $v(A) = P((X,\varepsilon) \in A \cap (T' \times [C_1, C_2]))$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в $R^2$. Меру $v(\cdot)$ можно продолжить до вероятностной меры $\tilde{\mu}(\cdot)$, которая абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в $R^2$ с плотностью распределения $\tilde{g}(\tau,\theta)$ такой, что $\operatorname{ess\,sup}\limits_{R^2} \tilde{g}(\tau,\theta) < \infty$. Для распределения $\tilde{\mu}(A) = P((\widetilde{X},\tilde{\varepsilon}) \in A)$ случайного вектора $(\widetilde{X},\tilde{\varepsilon})$ можно определить преобразование Розенблатта [20] $M : R^2 \to [0,1]^2$, имеющее обратное $M^{-1}$ и, кроме того,*

$$p_{n,t}(M^{-1}(\tau^*,\theta^*)) \in C[0,1]^2 \quad \forall t \in T,\ (\tau^*,\theta^*) \in [0,1]^2,$$

*где $p_{n,t}(\tau,\theta) = (f(t)V(t))^{-\frac{1}{2}}\theta W_N(t,\tau)/\sigma_n(t)$, $t \in T$, $\tau,\theta \in R^1$, $V(t) = \mathrm{Var}(Y/\overline{X} = t)$.*

2. *Функция $[f(t)V(t)]^{1/2}$, $t \in T$, строго положительна и удовлетворяет условию Липшица в $\widetilde{T} = \operatorname{supp} f(t)$.*

Если, кроме того, функция регрессии $r(t)$, $t \in \widetilde{T}$, удовлетворяет условию Липшица, то равномерно по $x$ справедливо соотношение

$$P_T\big(\tilde{\xi}_n^{(2)},x\big) = e^{-2e^{-x}} + R_n(x),$$

где $\sup\limits_T |R_n(x)| \le \frac{C}{\log n}$.

Замечание 4. Если при построении интерполяционного кубического сплайна $S_n(t)$ выберем краевые условия соотношениями $a_n = \frac{y_1-y_0}{h}$, $b_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{h}$, то аппроксимирующий гауссовский процесс

$$\eta_n(t) = (h\sigma_n(x))^{-1}\int\limits_0^1 W_N(t,\tau)\,d\omega_n(\tau)$$

не имеет среднеквадратичных производных второго порядка в узлах интерполяции и нарушается условие $\inf\limits_T \mathrm{Var}\,\eta_n'(t) > 0$. Если в рассматриваемом случае через $Z_N$ обозначим число нулей уравнения $\mathrm{Var}\,\eta_n'(t) = 0$, $t \in [0,1]$, то $2 \le Z_N \le 3N$. Естественно, что результаты С. Бермана [12] и Р. О. Рудзкиса [13] опять нельзя применять для гауссовского процесса $\eta_n(t)$, $t \in [0,1]$. В этом случае необходимый результат вытекает из теорем 1 и 2 настоящей работы.

**2. Оценки, построенные с помощью системы классических тригонометрических функций.** Рассмотрим классическую систему тригонометрических функций на интервале $T = [-\pi, \pi]$, т. е. последовательность функций $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$.

Предположим, что $I = \operatorname{supp} f(t) \subseteq [-\pi, \pi]$, $f(t)$ непрерывная при $t \in I$ и ее ряд Фурье по вышеописанной системе тригонометрических функций:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau),$$

равномерно сходится.

Рассмотрим для $f(t)$ оценку

$$f_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_n(t, X_i),$$

где $K_n(t,\tau) : R^2 \to R^1$ — борелевская функция, удовлетворяющая определенным условиям регулярности. Тогда $K_n(t,\tau) = \pi^{-1} D_n(t-\tau)$, где $D_n(\tau)$ — ядро Дирихле, т. е.

$$D_n(\tau) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos k\tau = \frac{\sin\bigl(N+\frac{1}{2}\bigr)\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}},$$

где $N = N(n)$. Обозначим

$$l_n = \sqrt{2\log(N/(2\sqrt{3}\pi))}, \quad h = 1/N, \quad \sigma_n^2(t) = \pi N, \quad \xi_n^{(1)}(t) = \sqrt{n}\frac{f_n(t) - f(t)}{\sigma_n(t)\sqrt{f(t)}},$$

$$\widetilde{K}_n(t,\tau) = (\pi N)^{-1/2} D_n(t-\tau), \quad \eta_n^*(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{K}_n(t,\tau)\, d\omega_n(\tau),$$

$P_T\bigl(\xi_n^{(1)}, x\bigr) = P\bigl\{l_n \sup_T\bigl|\xi_n^{(1)}(x)\bigr| - l_n^2 < x\bigr\}$. Здесь $\{\omega_n(t), t \in [-\pi,\pi]\}$ — последовательность винеровских процессов и $\omega_n(0) = 0$.

Используя те же рассуждения, что в случае теоремы 5, имеем

$$P_T(\eta_n^*; x - C_{12}h^{\gamma_1}) - C_{11}h^{\gamma_2} \le P_T\bigl(\xi_n^{(1)}; x\bigr) \le P_T(\eta_n^*; x + C_{12}h^{\gamma_1}) + C_{11}h^{\gamma_2},$$

где $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$. Применяя метод двойной суммы и метод сравнения из [7], методы доказательства теоремы 2.2 из [16], а также теорему 2 настоящей работы, установим, что $P_T(\eta_n^*; x) = e^{-2e^{-x}} + R_n^{(3)}(x)$, где $\sup_T\bigl|R_n^{(3)}(x)\bigr| \le \frac{C}{\log n}$. В результате получим нижеследующее утверждение.

**Теорема 7.** *Пусть $N = n^\delta$, $\frac{1}{3} < \delta < 1$, и пусть функция $f^{1/2}(t)$, $t \in T$, строго положительна и удовлетворяет условию Липшица в $I = \operatorname{supp} f(t)$. Тогда равномерно по $x$ выполняется соотношение*

$$P_T\bigl(\xi_n^{(1)}, x\bigr) = e^{-2e^{-x}} + R_n(x),$$

*где $\sup\limits_T |R_n(x)| \le \frac{C}{\log n}$.*

Пусть, как и выше, $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ — независимая выборка объема $n$ из генеральной совокупности $(X, Y)$ с неизвестной функцией регрессии $r(t) = E(Y/X = t)$, и пусть с вероятностью единица $X \in [0,1]$, $Y \in [A, B]$, $-\infty < A, B <$

$\infty$. В качестве оценки для неизвестной функции регрессии $r(t)$ рассмотрим статистику

$$r_n(t) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i K_n(t, X_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} K_n(t, X_i)}.$$

**Теорема 8.** *Пусть $N = n^{\delta}$, $\frac{1}{3} < \delta < \frac{1}{2}$, и выполнены условия 1 и 2 теоремы 6 (с $K_n$ вместо $W_N$). Если, кроме того, функция регрессии $r(t)$, $t \in \widetilde{T}$, удовлетворяет условию Липшица, то равномерно по $x$ справедливо равенство*

$$P_T\bigl(\xi_n^{(2)}, x\bigr) = e^{-2e^{-x}} + R_n(x),$$

*где*

$$\xi_n^{(2)}(t) = \sqrt{n}\biggl(\frac{f_n(t)}{V_n(t)}\biggr)^{\frac{1}{2}} \frac{r_n(t) - r(t)}{\sigma_n(t)}, \quad t \in [0,1];$$

$$V_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 K_n(t, X_i)/f_n(t) - r_n^2(t), \ t \in [0,1]; \quad \sup_T |R_n(x)| \le \frac{C}{\log n}.$$

Теорема 8 доказывается аналогично теореме 2.2 из [16].

### 4. Вспомогательные результаты

Прежде всего хотелось бы отметить, что в условиях всех трех теорем согласно следствию 1 из [1, гл. IV, § 5] и следствиям 1, 2 из [2, § 34.2(B)] траектории процесса $X(t)$ с вероятностью единица непрерывны и непрерывны величины

$$\alpha(s,t) = \frac{\partial}{\partial t} r(s,t), \quad \beta(s,t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} r(s,t). \tag{15}$$

Кроме того, можно считать, что в условиях теоремы 1 при $\beta_T > 0$ выполняется неравенство (не ограничивающее общности) $h(\delta_T) < \beta_T/(3C_T)$. Действительно, это неравенство легко получить, выбирая $\delta_T$ достаточно малым и учитывая поведение функции $h(\tau)$ вблизи 0. Разумеется, этого можно добиться лишь в том случае, когда $\beta_T > 0$. Аналогично в условиях теоремы 2 будем полагать, что выполнены следующие, не ограничивающие общности, неравенства:

$$h(\delta_T) \le \beta_T/(10\max\{1, 3C_T\}) \quad \text{при } \beta_T > 0, \ \delta_T \le \max\{1, \sqrt{1/B_T}\}.$$

Приведем четыре леммы, на которых в значительной степени и основано доказательство теорем 1 и 2. Пусть $X(t)$ — случайный процесс, $t \in [0,T]$, $T < \infty$, непрерывный с вероятностью единица, и $P\{X(0) = u\} = P\{X(T) = u\} = 0$. Пусть $D \subseteq [0,T]$ — какое-либо измеримое множество, $\overline{D} = [0,T] \setminus D$. Обозначим через $N_u^{(i)}(D)$, $i = 1,2$, число точек $t \in D$, в которых происходит пересечение уровня $u$ соответственно снизу вверх и сверху вниз процессом $X(t)$ (в смысле определения, данного в § 10.2 из [21]). Пусть

$$N_u^{(3)}(D) = N_u^{(1)}(D) + N_u^{(2)}(D)$$

и для $k = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, 3$

$$v_k^{(i)}(u, D) = EN_u^{(i)}(D)\bigl[N_u^{(i)}(D) - 1\bigr] \ldots \bigl[N_u^{(i)}(D) - k + 1\bigr]. \tag{16}$$

**Лемма 1.** *Для случайного процесса $X(t)$, непрерывного с вероятностью единица, справедливо неравенство*

$$0 \le v_1^{(1)}(u;[0,T]) + P\{X(0) > u\} - P_T(u) \le v_1^{(1)}(u;\overline{D}) + v_1^{(2)}(u;\overline{D}) + \frac{1}{2}v_2^{(1)}(u;D) + \frac{1}{2}v_2^{(2)}(u;D) + P\{X(0) > u, X(T) > u\}.$$

Теперь предположим, что $X(t)$ — гауссовский процесс, $t \in (-\infty, \infty)$, непрерывный с вероятностью единица. Пусть $k \in \{1, 2, \dots\}$ и

$$\bar{t}_k = (t_1, \dots, t_k), \quad \bar{x}_k = (x_1, \dots, x_k), \quad \bar{u}_k = (u, \dots, u),$$
$$\overline{X}(\bar{t}_k) = \{X(t_1), \dots, X(t_k)\}, \quad \overline{X}'(t_k) = \{X(t_1), \dots, X(t_k), X'(t_1), \dots, X'(t_k)\}. \tag{17}$$

Если же $k = 1$, то под $\bar{t}_1$, $\bar{x}_1$, $\bar{u}_1$, $\overline{X}(t_1)$ понимаем векторы, содержащие одну компоненту. Для какого-либо $k \ge 1$ и ограниченного множества $D$ на прямой, замыкание которого обозначим через $[D]$, введем следующее условие.

(*) В случае $k = 1$ $\operatorname{Var} X(t) > 0$ при всех $t \in [D]$, а в случае $k > 1$ ковариационная матрица $\overline{X}(\bar{t}_k)$ невырожденная при всех несовпадающих $t_1, \dots, t_k \in [D]$.

Примем следующие обозначения: $p_{\bar{t}_k}(\bar{x}_k) = p_{t_1,\dots,t_k}(x_1, \dots, x_k)$ — плотность распределения $\overline{X}(\bar{t}_k)$,

$$A_1 = (0, \infty), \quad A_2 = (-\infty, 0), \quad A_3 = (-\infty, \infty),$$
$$\mu_u^{(i)}(\bar{t}_k) = E\left(\prod_{j=1}^{k} |X'(t_j)| I_{A_i}(X'(t_j)) / \overline{X}(\bar{t}_k) = \bar{u}_k\right), \quad i = 1, 2, 3. \tag{18}$$

Следующая лемма дает явное выражение для $v_k^{(i)}(u, D)$.

**Лемма 2** [22]. *Пусть $k \ge 1$, $D$ — ограниченное измеримое по Лебегу множество на прямой и выполнено условие (*). Тогда при любых $u$ для $v_k^{(i)}(u, D)$ с $i = 1, 2, 3$ справедливо равенство*

$$v_k^{(i)}(u, D) = \int_D \cdots \int_D \mu_u^{(i)}(\bar{t}_k) p_{\bar{t}_k}(\bar{u}_k) dt_1 \dots dt_k. \tag{19}$$

Лемма 2 является обобщением результатов Ю. К. Беляева [23], Илвисакера [24, 25] и Крамера, Литбеттера [21].

В двух последующих леммах речь идет о процессе $X(t)$, рассмотренном в начале статьи (но не обязательно удовлетворяющем условиям (I)–(IV)). Для любого $\delta \ge 0$ положим

$$\Delta_{\tau'}(\delta) = \{(s, t) \in [0, T]^2 : s \in D_{\tau'}, t - s > \delta\}, \quad \overline{\Delta}_{\tau'}(\delta) = \Delta_{\tau'}(0) \setminus \Delta_{\tau'}(\delta), \tag{20}$$

где $D_{\tau'}, \overline{D}_{\tau'}$ определены в (7).

**Лемма 3.** *Если выполнены условия (1), (3) и $|r(s, t)| \ne 1$, то для вероятности (4) справедливо соотношение*

$$0 \le \widetilde{Q}_t(u) - P_T(u) \le \sum_{i=0}^{3} \widetilde{R}_T^{(i)}(u),$$

где

$$\widetilde{R}_T^{(0)} = \frac{\sqrt{10}}{\pi} e^{-u^2/2} \sqrt{C_T h(\tau')} \operatorname{mes} \widetilde{D}_{\tau'},$$

$$\widetilde{R}_T^{(3)}(u) = \int_u^\infty \int_u^\infty \varphi_{0,T}(x,y)\,dxdy, \quad \widetilde{R}_T^{(i)} = 2 \iint_{\Delta_{\tau'}(0)} \mu_u^{(i)}(t_2)\varphi_{\bar t}(\bar u)\,dt_1dt_2, \quad i = 1, 2,$$

$\widetilde{Q}_T(u) = Q_T(u) + 1 - \Phi(u)$, $\widetilde{D}_{\tau'} = \overline{D}_{\tau'} \cap \{s \in [0,T] : \beta(s) > 0\}$, $\beta(s)$ *определено в* (2), $\mu_u^{(i)}(\bar t_2)$, $i = 1, 2$, *— в* (18), $\varphi_{\bar t}(\bar x) = \varphi_{t_1,t_2}(x_1, x_2)$ *— плотность распределения вектора* $\{X(t_1), X(t_2)\}$.

Доказательство. Сначала применим лемму 1 для $D = D_{\tau'}$. Затем, используя лемму 2, симметричность подынтегральной функции в правой части (19) относительно $t_1$, $t_2$, а также то, что

$$\int_{\overline{D}_{\tau'}} \mu_u^{(i)}(\bar t_1) p_{\bar t_1}(\bar u_1)\,dt_1 \le 1/2 \widetilde{R}_T^{(0)} = \frac{\sqrt{10}}{2\pi} e^{-u^2/2} \sqrt{C_T h(\tau')} \operatorname{mes} \widetilde{D}_{\tau'}$$

(это следует из определений множеств $\overline{D}_{\tau'}$ и $\widetilde{D}_{\tau'}$, а также из того, что $\mu_u^{(i)}(\bar t_1) \le \sqrt{\max \beta(s)}$ при $t_1, s \in \widetilde{D}_{\tau'}$), получим утверждение леммы.

Далее нам потребуются величины (для $i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} m_u^{(i)}(\bar t) &= E[X'(t_i)/\overline{X}(\bar t) = \bar u] = \frac{\alpha(t_{3-i}, t_i)u}{1 + r(t_1,t_2)}, \\ \sigma_u^{(i)}(\bar t) &= \operatorname{Var}(X'(t_i)/\overline{X}(\bar t) = \bar u) = \frac{\beta(t_i)[1 - r^2(t_1,t_2)] - \alpha^2(t_{3-i}, t_i)}{1 - r^2(t_1,t_2)}, \end{aligned} \tag{21}$$

где использованы обозначения (2), (17) с $k = 2$, $\bar t = \bar t_2$, $\bar u = \bar u_2$.

**Лемма 4.** *Если* $\alpha(t_1,t_2) < 0$, $\alpha(t_2,t_1) > 0$ *для всех* $\bar t \in \overline{\Delta}_{\tau'}(\delta)$, *то для величин* $\widetilde{R}_T^{(i)}(u)$, $i = 1, 2$ (*из леммы* 3), *выполняются неравенства*

$$\widetilde{R}_T^{(i)}(u) \le C \iint_{\overline{\Delta}_{\tau'}(\delta)} \Bigg[ \Big(\sqrt{\sigma_u^{(1)}(\bar t)} + \sqrt{\sigma_u^{(2)}(\bar t)}\Big)\Big(\sqrt{\sigma_u^{(3-i)}(\bar t)} + \sigma_u^{(3-i)}(\bar t)\Big)$$

$$\times \left|\frac{\alpha(t_1,t_2) + \alpha(t_2,t_1)}{\alpha(t_i, t_{3-i})}\right|\Bigg] \exp\left\{-\frac{\big[m_u^{(i)}(\bar t)\big]^2}{6\sigma^{(3-i)}(\bar t)}\right\} \varphi_{\bar t}(\bar u)\,dt_1dt_2 + \iint_{\Delta_{\tau'}(\delta)} \Bigg[\sqrt{\beta(t_1)} + \sqrt{\beta(t_2)}$$

$$+ u\frac{\alpha(t_1,t_2) + \alpha(t_2,t_1)}{1 + r(t_1,t_2)}\Bigg] \left[\sqrt{\beta(t_{3-i})} + u\frac{|\alpha(t_i,t_{3-i})|}{1 + r(t_1,t_2)} I_{A_i}(\alpha(t_i,t_{3-i}))\right] \varphi_{\bar t}(\bar u)\,dt_1dt_2.$$

Доказательство. Учитывая элементарное свойство индикаторной функции, т. е. равенство $I_{A\cup B}(\cdot) = I_A(\cdot) + I_B(\cdot) - I_{A\cap B}(\cdot)$, и соотношение (18), легко получаем

$$0 \le \mu_u^{(i)}(\bar t) \le \max\{|E(|X'(t_1)X'(t_2)| I_{A_i}(X'(t_1)) I_{A_j}(X'(t_2))/\overline{X}(\bar t) = \bar u) \mid i, j = 1, 2\}.$$

Величины, стоящие справа в последнем соотношении, оцениваются сверху аналогично друг другу. Поэтому оценим одну из них. Пусть, например,

$$0 \le \mu_u^{(i)}(\bar t) \le E(|X'(t_1)X'(t_2)| I_{A_i}(X'(t_1)) I_{A_i}(X'(t_2))/\overline{X}(\bar t) = \bar u).$$

Тогда, учитывая равенства (18), (21) и условие на $\alpha(t_i,t_{3-i})$, для всех $\bar t\in\overline{\Delta}_{\tau'}(\delta)$ и $i=1,2$ можем записать неравенства

$$\begin{aligned}0\le\mu_u^{(i)}(\bar t)\le E\big[|X'(t_1)+X'(t_2)|\big|X'(t_{3-i})\\ -m_u^{(3-i)}(\bar t)\big|I_{A_i}(X'(t_1))I_{A_i}(X'(t_2))/(\overline{X}(\bar t))=\bar u\big]\\ \le E\big[\big|X'(t_1)-m_u^{(1)}(\bar t)\big|\big|X'(t_{3-i})-m_u^{(3-i)}(\bar t)\big|+\big|X'(t_2)-m_u^{(2)}(t_2)\big|\big|X'(t_{3-i})-m_u^{(3-i)}(\bar t)\big|\\ +\big|m_u^{(1)}(\bar t)+m_u^{(2)}(\bar t)\big|\big|m_u^{(3-i)}(\bar t)\big|^{-1}\big(X'(t_{3-i})-m_u^{(3-i)}(\bar t)\big)^2\big]I_{A_i}(X'(t_{3-i}))/\overline{X}(\bar t)=u\big]\end{aligned}\tag{22}$$

и для всех $\bar t\in\Delta_{\tau'}(\delta)$ и $i=1,2$ — неравенства

$$\begin{aligned}0\le\mu_u^{(i)}(\bar t)\le E\big[|X'(t_1)+X'(t_2)|\big(\big|X'(t_{3-i})-m_u^{(3-i)}(\bar t)\big|\\ +m_u^{(3-i)}(\bar t)I_{A_i}\big(m_u^{(3-i)}(\bar t)\big)\big)I_{A_i}(X'(t_1)I_{A_i}(X'(t_2))/(\overline{X}(\bar t)=\bar u\big]\\ \le E\big[\big(\big|X'(t_1)-m_u^{(1)}(\bar t)\big|+\big|X'(t_2)-m_u^{(2)}(\bar t)\big|+\big|m_u^{(1)}(\bar t)+m_u^{(2)}(\bar t)\big|\big)\\ \times\big(\big|X'(t_{3-i})-m_u^{(3-i)}(\bar t)\big|+m_u^{(3-i)}(\bar t)I_{A_i}\big(m_u^{(3-i)}(\bar t)\big)\big)/\overline{X}(\bar t)=\bar u\big].\end{aligned}\tag{23}$$

Введем еще обозначение

$$\tilde\sigma_u^{(3-i)}(\bar t)=E\big\{\big[X'(t_{3-i})-m_u^{(3-i)}(\bar t)\big]^2I_{A_i}(X'(t_{3-i}))/\overline{X}(\bar t)=\bar u\big\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\tilde\sigma_u^{(i)}(\bar t)\le\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^{(i)}(\bar t)}}\int_0^\infty\big(y-\big|m_u^{(i)}(\bar t)\big|\big)^2\exp\left\{-\frac{\big(y-\big|m_u^{(i)}(\bar t)\big|\big)^2}{2\sigma_u^{(i)}(\bar t)}\right\}dy\\ \le3\sqrt3\sigma_u^{(i)}(\bar t)\exp\left\{-\frac{\big(m_u^{(i)}(\bar t)\big)^2}{3\sigma_u^{(i)}(\bar t)}\right\}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (22), (23), применяя неравенство Шварца и снова учитывая (21), получаем для $\bar t\in\bar\Delta_{\tau'}(\delta)$ неравенства

$$\begin{aligned}0\le\mu_u^{(i)}(\bar t)\le\Big(\sqrt{\sigma_u^{(1)}(\bar t)}+\sqrt{\sigma_u^{(2)}(\bar t)}\Big)\sqrt{\tilde\sigma_u^{(3-i)}(\bar t)}+|\alpha(t_1,t_2)+\alpha(t_2,t_1)|\\ \times|\alpha(t_imt_{3-i})|^{-1}\tilde\sigma_u^{(3-i)}(\bar t),\quad i=1,2,\end{aligned}\tag{24}$$

а для $\bar t\in\bar\Delta_{\tau'}(\delta)$ — неравенства

$$\begin{aligned}0\le\mu_u^{(i)}(\bar t)\le\Big(\sqrt{\sigma_u^{(1)}(\bar t)}+\sqrt{\sigma_u^{(2)}(\bar t)}\Big)\sqrt{\sigma_u^{(3-i)}(\bar t)}+\big|m_u^{(1)}(\bar t)+m_u^{(2)}(\bar t)\big|\sqrt{\sigma_u^{(3-i)}(\bar t)}\\ +\Big(\sqrt{\sigma_u^{(1)}(\bar t)}+\sqrt{\sigma_u^{(2)}(\bar t)}+\big|m_u^{(1)}(\bar t)+m_u^{(2)}(\bar t)\big|\Big)m_u^{(3-i)}(\bar t)I_{A_i}(\alpha(t_i,t_{3-i})),\quad i=1,2.\end{aligned}\tag{25}$$

Используя в (24) неравенство для $\tilde\sigma_u^{(i)}(\bar t)$, а в (25) — равенства (21) и неравенства $\sigma_u^{(i)}(\bar t)\le\beta(t_i)$, $i=1,2$, приходим к утверждению леммы 4.

Теперь приведем ряд соотношений и оценок, используемых при доказательстве обеих теорем. Во-первых, заметим, что в силу (2), (9) при $r(t,t)=1$ и при условии непрерывности $\beta(s,t)$ (вытекающей из (3)) выполняются равенства

$$\begin{gathered}\alpha(t,t)=0,\quad\alpha(s,t)=-\int_s^t\beta(s',t)\,ds',\\ \beta(s,t)=\beta(t,s),\quad1-r(s,t)=\frac12\int_s^t\int_s^t\beta(s',t')\,ds'dt'.\end{gathered}\tag{26}$$

Следующие оценки и соотношения для удобства ссылок имеют собственную нумерацию (эти оценки получены в условиях леммы 4 при $\bar{t} \in \bar{\Delta}_{\tau'}(\delta)$ с $0 < \delta \leq \tau'$ с использованием равенств (26), неравенства (3) и обозначений $C'_T = \max\{1, 3C_T\}$, $\tau = t_2 - t_1$):

1) $\frac{9}{2}C'_T h(\tau')\tau^2 \leq \frac{9}{20}\beta(t_1)\tau^2 \leq \frac{1}{2}[\beta(t_1) - 3C_T h(\tau')]\tau^2 \leq 1 - r(t_1, t_2) \leq \frac{1}{2}[\beta(t_1) + 3C_T h(\tau')]\tau^2 \leq \frac{11}{20}\beta(t_1)\tau^2$;

2) $\alpha(t_1, t_2) \leq -[\beta(t_1) - 3C_T h(\tau')]\tau \leq -9C'_T h(\tau')\tau$;

3) $\alpha(t_2, t_1) \geq [\beta(t_1) - 3C_T h(\tau')]\tau \geq 9C'_T h(\tau')\tau$;

4) $|\alpha(t_1, t_2) + \alpha(t_2, t_1)| \geq 2C'_T h(\tau')\tau$.

Из 1–3 вытекает оценка

5) $0 \leq \beta(t_1)[1 - r^2(t_1, t_2)] - \alpha^2(t_1, t_2) \leq [\beta(t_1) + 3C_T h(\tau)]\tau^2 - [\beta(t_1) - 3C_T h(\tau')]^2\tau^2 \leq 3C'_T\beta(t_1)h(\tau')\tau^2$.

Учитывая 4, имеем

6) $0 \leq \beta(t_2)[1 - r^2(t_1, t_2)] - \alpha^2(t_1, t_2) \leq [\beta(t_1) + 3C_T h(\tau')]^2\tau^2 - [\beta(t_1) - 3C_T h(\tau')]^2\tau^2 \leq 4C'_T\beta(t_1)h(\tau')\tau^2$.

Из (21) и оценок 1–3, 5, 6 получаем при $\bar{t} \in \overline{\Delta}_{\tau'}(\delta)$

7) $\sigma_u^{(i)}(\bar{t}) \leq 9C'_T h(\tau)/(1 + r(t_1, t_2)),\ i = 1, 2;$

8) $\left|m_u^{(i)}(\bar{t})\right| \geq 9C'_T h(\tau')\tau u/(1 + r(t_1, t_2)) \geq \frac{9\sqrt{C'_T}h(\tau')\tau u}{\sqrt{2}\sqrt{1+r(t_1,t_2)}},\ i = 1, 2.$

Кроме того, для любых $\bar{t}$ имеем

9) $|\alpha(t_1, t_2)| \leq \sqrt{\beta(t_2)}, \quad |\alpha(t_2, t_1)| \leq \sqrt{\beta(t_1)}$.

Запишем еще два элементарных соотношения, учитывая определение $\varphi_{\bar{t}}(\bar{x})$, введенное в лемме 3, и обозначая $r(0, T)$ через $r_T$:

10) $\phi_{\bar{t}}(\bar{u}) = (2\pi\sqrt{1 - r^2(t_1, t_2)})^{-1} \exp\bigl\{-\frac{[1-r(t_1,t_2)]^2u^2}{2(1-[r(t_1,t_2)]^2)}\bigr\}e^{-u^2/2}$,

11) $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \varphi_{0,T}(x, y)\,dxdy = \frac{1}{\pi\sqrt{1-r_T^2}}\int\limits_u^\infty dx \int\limits_x^\infty \exp\bigl\{-\frac{(y-x)^2}{2(1-r_T^2)}\bigr\}\exp\bigl\{-\frac{xy}{1+r_T}\bigr\}\,dy \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_u^\infty \exp\bigl\{-\frac{x^2}{1+r_T}\bigr\}\,dx \leq \frac{\sqrt{2}}{u\sqrt{\pi}}\exp\bigl\{-\frac{(1-r_T)u^2}{2(1+r_T)}\bigr\}e^{-u^2/2}$.

## 5. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Условия этой теоремы позволяют применить лемму 3. Согласно последней, а также обозначениям (4), (6), (7), (9) и оценке 11, выводим, что

$$|P_T(u) - \widetilde{Q}_T(u)| \leq C(\sqrt{C_T h(\tau')}T + u^{-1}e^{-au^2})e^{-u^2/2} + \widetilde{R}_T^{(1)}(u) + \widetilde{R}_T^{(2)}(u), \quad (27)$$

где $a = \frac{(1-r_T)}{2(1+r_T)}$. Далее, из определения множества $\widetilde{D}_{\tau'}$ в теореме 2 и оценок 1–3 видно, что $\alpha(t_1, t_2) < 0$, $\alpha(t_2, t_1) > 0$ при всех $\bar{t} \in \overline{\Delta}_{\tau'}(\delta)$, $t_1 \neq t_2$. Поэтому можем применить лемму 4, в силу которой с учетом оценок 2–4, 7, 9 получаем

$$\widetilde{R}_T^{(i)}(u) \leq C\biggl\{C_T \iint\limits_{\bar{\Delta}_{\tau'}} \frac{h(t_2 - t_1)}{1 + r(t_1, t_2)}\varphi_{\bar{t}}(\bar{u})\,dt_1dt_2 + \iint\limits_{\Delta_{\tau'}} [\beta(t_1) + \beta(t_2)] \times \frac{\max\{1, u^2\}}{[1 + r(t_1, t_2)]^2}\varphi_{\bar{t}}(\bar{u})\,dt_1dt_2\biggr\}, \quad i = 1, 2. \quad (28)$$

В силу неравенства (3), оценки 1 и равенства 10 при $\bar{t} \in \overline{\Delta}_{\tau'}(\delta)$

$$1 + r(t_1, t_2) \geq 1, \quad 1 - r^2(t_1, t_2) \geq 4C_T h(\tau)\tau, \quad \varphi_{\bar{t}}(\bar{u}) \leq \frac{\exp\bigl(-\frac{u^2}{2}\bigr)}{4\pi\tau\sqrt{C_T h(\tau')}},$$

если $11\beta(t_1)\delta^2/20 \le 1$. Далее, на основании равенства 10, неравенства $e^{-x} \le 6/x^3$ при $x > 0$ и условия (II) при $\bar t \in \bar\Delta_{\tau'}(\delta)$, $u \ge 1$, имеем

$$\frac{\varphi_{\bar t}(\bar u)}{[1+r(t_1,t_2)]^2} \le \frac{6\sqrt{2}}{(c_T)^{7/2}u^6}e^{-u^2/2}.$$

Тогда из (20) и (28) вытекает, что

$$\widetilde{R}_T^{(i)}(u) \le C\biggl\{\frac{\sqrt{C_T}H(\delta)}{\sqrt{h(\tau')}} + (c_T)^{-\frac{7}{2}}B_T T^2 u^{-4}\biggr\}e^{-u^2/2}, \quad i = 1,2, \tag{29}$$

если $11B_T\delta^2/20 \le 1$, $u \ge 1$. Здесь $B_T$ определяется в (2), а $H(\delta)$ — в (8). Из равенства (9) и оценок (27), (29) получаем

$$|P_T(u)/Q_T(u) - 1| \le CTI_T^{-1}\biggl\{\sqrt{C}\biggl[\sqrt{h(\tau')} + \frac{H(\delta)}{T\sqrt{h(\tau')}}\biggr] + \frac{1}{Tu}e^{-au^2} + \frac{B_T T}{(c_T)^{\frac{7}{2}}u^4}\biggr\}.$$

Отсюда, полагая $u \to \infty$, $\delta \to 0$, $\tau' \to 0$, приходим к утверждению теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Снова применим леммы 3, 4, равенство 10, оценку 11 и обозначения (7), (20), полагая $\tau' = \delta = \tau_u$, где $\tau_u$ вводится перед теоремой 2. Кроме того, заметим, что в силу (20), (26) и условия (IV) $\alpha(t_1,t_2) \le 0$, $\alpha(t_2,t_1) \ge 0$, $1 - r(t_1,t_2) \ge 1 - r(t_1,t_1+u)$ для всех $\bar t \in \Delta_{\tau_u}(\tau_u) \setminus \Delta_{\tau_u}(\delta_T)$ ($\delta_T$ также вводится перед теоремой 2). Тогда для величин $\widetilde{R}_T^{(i)}(u)$, $i = 0,1,2,3$, из леммы 3 можем записать

$$\widetilde{R}_T^{(0)}(u) \le R_T^{(0)}(u), \tag{30}$$

где $R_T^{(0)}(u)$ определяется в условиях теоремы 2, и

$$\widetilde{R}_T^{(3)}(u) \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{u}\exp\biggl\{-\frac{(1-r_T)u^2}{2(1+r_T)}\biggr\}e^{-u^2/2}, \tag{31}$$

$$\widetilde{R}_T^{(1)}(u) + \widetilde{R}_T^{(2)}(u) \le e^{-u^2/2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}R_T^{(i,j)}(u), \tag{32}$$

где при $i = 1,2$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_T^{(i,1)}(u) = C\iint\limits_{\bar\Delta_{\tau_u}(\tau_u)}\biggl[&\Bigl(\sqrt{\sigma_u^{(1)}(\bar t)} + \sqrt{\sigma_u^{(2)}(\bar t)}\Bigr)\sqrt{\sigma_u^{(3-i)}(\bar t)}\\ &+ \sigma_u^{(3-i)}(\bar t)\left|\frac{\alpha(t_1,t_2)+\alpha(t_2,t_1)}{\alpha(t_i,t_{3-i})}\right|\biggr]\exp\left\{-\frac{\bigl[m_u^{(3-i)}(\bar t)\bigr]^2}{6\sigma_u^{(3-i)}(\bar t)}\right\}\frac{dt_1\,dt_2}{\sqrt{1-r^2(t_1,t_2)}},\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_T^{(i,2)}(u) = \iint\limits_{\Delta_{\tau_u}(\tau_u)\setminus\Delta_{\tau_u}(\delta_T)}&\left[\sqrt{\beta(t_1)} + \sqrt{\beta(t_2)} + \frac{u|\alpha(t_1,t_2)+\alpha(t_2,t_1)|}{1+r(t_1,t_2)}\right]\sqrt{\beta(t_{3-i})}\\ &\times[1-r(t_1,t_1+\tau_u)]^{-\frac{1}{2}}[1+r(t_1,t_2)]^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{4}[1-r(t_1,t_1+\tau_u)]u^2\right\}dt_1dt_2,\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_T^{(i,3)}(u) = C\iint\limits_{\Delta_{\tau_u}(\delta_T)}&\left[\sqrt{\beta(t_1)} + \sqrt{\beta(t_2)} + \frac{u|\alpha(t_1,t_2)+\alpha(t_2,t_1)|}{1+r(t_1,t_2)}\right]\biggl[\sqrt{\beta(t_{3-i})}\\ &+ \frac{u|\alpha(t_i,t_{3-i})|}{1+r(t_1,t_2)}I_{A_i}(\alpha(t_i,t_{3-i}))\biggr][1-r^2(t_1,t_2)]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{[1-r(t_1,t_2)]u^2}{2[1+r(t_1,t_2)]}\right\}dt_1dt_2.\end{aligned} \tag{35}$$

Для величин (33) на основании оценок 1–4, 7, 8, условия (III) и определения $\bar{\Delta}_{\tau_u}(\tau_u)$ имеем для $i = 1, 2$

$$0 \le \widetilde{R}_T^{(i,1)}(u) = CTc_T^{-3/2}[h(\tau_u)]^{-1/2}\sqrt{C_T}\int\limits_0^{\tau_u}\frac{h(\tau)}{\tau}\exp\left\{-\frac{3h^2(\tau_u)\tau^2u^2}{4h(\tau)}\right\}d\tau. \quad (36)$$

Для величин (34) в силу (20), оценок 1, 9 и условий (II), (III) получаем

$$R_T^{(1,2)}(u) + R_T^{(2,2)}(u) \le Cc_T^{-1/2}[h(\tau_u)]^{-1/2}\tau_u^{-1}\big(1 + uc_T^{-1}\big)\exp\big\{-h(\tau_u)\tau_u^2u^2\big\}$$
$$\times \int\limits_0^T\int\limits_{\tau_u}^{\delta_T}(\sqrt{\beta(t_1)} + \sqrt{\beta(t_2)})^2\,dt_1\,dt_2,$$

что при $u \ge 1$ с учетом последнего обозначения в (2) дает

$$0 \le R_T^{(1,2)}(u) + R_T^{(2,2)}(u) \le c_T^{-3/2}I_TR_T^{(2)}(u), \quad (37)$$

где величина $R_T^{(2)}(u)$ определена в теореме 2.

Далее, поскольку $|e^{-x} - e^{-y}| \le |x - y|e^{-\min\{x,y\}}$ для любых $x > 0$, $y > 0$, с учетом условия (IV) имеем

$$\left|\exp\left\{-\frac{[1 - r(t_1,t_2)]u^2}{2[1 + r(t_1,t_2)]}\right\} - e^{-u^2/2}\right| \le \frac{u^2|r(t_1,t_2)|}{d_T}e^{-c_tu^2/4}.$$

Отсюда и из обозначений (2), (8), (20), определения множеств $A_1$, $A_2$ в (18), оценки 9 и условий (II), (III) для величин (35) устанавливаем неравенство

$$0 \le R_T^{(1,3)}(u) + R_T^{(2,3)}(u) \le \overline{R}_T^{(0)}(u) + c_T^{-3/2}\sum_{i=1}^{3}\overline{R}_T^{(i)}(u), \quad (38)$$

в котором

$$\overline{R}_T^{(0)}(u) = Cd_T^{-1/2}c_T^{-1/2}e^{-u^2/2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T(\sqrt{\beta(t_1)} + \sqrt{\beta(t_2)})^2\,dt_1dt_2$$
$$\le 2Cd_T^{-1/2}c_T^{-1/2}I_T\sqrt{B_T}Te^{-u^2/2},$$

$$\overline{R}_T^{(1)}(u) = Cc_T^{-1/2}d_T^{-3/2}e^{-c_Tu^2/4}u^2\int\limits_0^T\int\limits_0^T(\sqrt{\beta(t_1)} + \sqrt{\beta(t_2)})^2|r(t_1,t_2)|\,dt_1dt_2$$
$$\le 2Cc_T^{-1/2}d_T^{-3/2}u^2\sqrt{B_T}I_TJ_Te^{-c_Tu^2/4},$$

$$\overline{R}_T^{(2)}(u) = Cc_T^{-1/2}d_T^{-3/2}e^{-c_Tu^2/4}u\int\limits_0^T dt_1$$
$$\times\int\limits_{t_1}^T(\sqrt{\beta(t_1)} + \sqrt{\beta(t_2)})[|\alpha(t_1,t_2) + \alpha(t_2,t_1)| + \bar{\alpha}(t_1,t_2)]\,dt_2$$
$$\le 2Cc_T^{-1/2}d_T^{-3/2}I_T(L_T + K_T)ue^{-c_Tu^2/4},$$

$$\overline{R}_T^{(3)}(u) = Cc_T^{-1/2} d_T^{-5/2} e^{-c_T u^2/4} u^2 \int\limits_0^T dt_1 \int\limits_{t_1}^T |\alpha(t_1,t_2)+\alpha(t_2,t_1)| \bar{\alpha}(t_1,t_2)\, dt_2$$
$$\le 2CT\sqrt{B_T} c_T^{-1/2} d_T^{-5/2} \min\{K_T, L\} u^2 e^{-c_T u^2/4}.$$

Последние четыре соотношения и неравенство (31) приводят к оценкам

$$\begin{gathered}\widetilde{R}_T^{(3)}(u) + e^{-u^2/2}\overline{R}_T^{(0)}(u) = c_T^{-3/2} I_T e^{-u^2/2} R_T^{(4)}(u),\\ \overline{R}_T^{(1)}(u) + \overline{R}_T^{(2)}(u) + \overline{R}_T^{(3)}(u) \le I_T R_T^{(3)}(u),\end{gathered} \tag{39}$$

где $R_T^{(3)}(u)$, $R_T^{(4)}(u)$ определены в теореме 2.

Перейдем к рассмотрению неравенств (36), применяя обозначения (при $0 < \delta \le \tau_u \le \delta_T$)

$$H_u(\delta) = \int\limits_0^\delta \frac{h(\tau)}{\tau} \exp\left\{\frac{-3h^2(\tau_u)\tau^2 u^2}{4h(\tau)}\right\} d\tau, \quad \overline{H}_u(\delta) = H_u(\tau_u) - H_u(\delta), \tag{40}$$

а также обозначения $v_{u,\alpha}$, $\rho_u$, введенные перед теоремой 2.

Пусть $\rho_u \le \delta_T$, $\tau_{u,\alpha} = \min\{\tau_u, v_{u,\alpha}^{-2/(2-\alpha)}\}$ и $\tau_{u,2} = \min\{\tau_u, \rho_u\}$. Тогда из (38) следует, что

$$H_u(\tau_u) \le H_0(\tau_{u,\alpha}) + \overline{H}_u(\tau_{u,\alpha}). \tag{41}$$

Оценим $H_u(\tau_u)$, используя условие (I$'$) в случаях (а), (б), (в).

1. Пусть в (I$'$) $\alpha = 0$, т. е. $h(\tau) = l_0(\tau)$. Согласно (40) и первому обозначению в (8)

$$H_0(\tau_{u,0}) \le H\bigl(v_{u,0}^{-1}\bigr). \tag{42}$$

Далее, если $\tau_{u,0} = \tau_u$, то $\overline{H}_u(\tau_{u,0}) = 0$. Если же $\tau_{u,0} = v_{u,0}^{-1}$, то, произведя в интеграле $\overline{H}_u(\tau_{u,0})$ замену $\tau = sv_{u,0}^{-1} = \frac{s}{u\sqrt{l_0(\tau_u)}}$, получим

$$\overline{H}_u(v_{u,0}^{-1}) \le \int\limits_1^{\tau_u v_{u,0}} \frac{l_0(sv_{u,0}^{-1})}{s} \exp\left\{\frac{3l_0(\tau_u)s^2}{4l_0(sv_{u,0}^{-1})}\right\} ds.$$

Заметим еще, что благодаря свойствам функции $l_0(\tau)$ имеем

$$l_0\bigl(sv_{u,0}^{-1}\bigr)\bigl(sv_{u,0}^{-1}\bigr)^{-\varepsilon} \le l_0\bigl(v_{u,0}^{-1}\bigr)\bigl(v_{u,0}^{\varepsilon}\bigr), \quad l_0\bigl(sv_{u,0}^{-1}\bigr) \le l_0(\tau_u),$$

когда $s \in [1, \tau_u v_{u,0}]$. Тогда при любых $v_{u,0}^{-1} \le \delta_T$

$$\overline{H}_u(\tau_{u,0}) \le l_0\bigl(v_{u,0}^{-1}\bigr) \int\limits_1^\infty s^{-1+\varepsilon} \exp\left\{-\frac{3}{4}s^2\right\} ds. \tag{43}$$

Используя первое обозначение в (8) и свойства $l_0(\tau)$, можем записать

$$H\bigl(v_{u,0}^{-1}\bigr) \ge v_{u,0}^{\varepsilon} l_0\bigl(v_{u,0}^{-1}\bigr) \int\limits_0^{v_{u,0}^{-1}} \tau^{-1+\varepsilon} d\tau = \frac{1}{\varepsilon} l_0\bigl(v_{u,0}^{-1}\bigr).$$

Отсюда и из (40), (41) и (43) выводим, что $H_u(\tau_u) \le C(\varepsilon) H\bigl(v_{u,0}^{-1}\bigr)$.

2. Пусть в (I′) $0<\alpha<2$, так что $h(\tau)=\tau^{\alpha}$. По определению $\tau_{u,\alpha}$

$$H_0(\tau_{u,\alpha}) \le \tau_{u,\alpha}^{\varepsilon} \int\limits_0^{\tau_{u,\alpha}} \tau^{\alpha-(1+\varepsilon)} d\tau \le v_{u,\alpha}^{-\frac{2\alpha}{2-\alpha}}. \tag{44}$$

Далее, как и в п. 1, в случае $\tau_{u,\alpha} = v_{u,\alpha}^{-\frac{2\alpha}{2-\alpha}}$, произведя в интеграле $\overline{H}_u(\tau_{u,\alpha})$ замену $\tau = s v_{u,\alpha}^{-\frac{2}{2-\alpha}} = s\tau_u^{-\frac{2\alpha}{2-\alpha}} u^{-\frac{2}{2-\alpha}}$, получим

$$\overline{H}_u(\tau_{u,\alpha}) = \int\limits_1^{\tau_u v_{u,\alpha}^{2/(2-\alpha)}} \frac{s^{\alpha-1}}{v_{u,\alpha}^{\frac{2\alpha}{2-\alpha}}} \exp\left\{-\frac{3}{4}s^{2-\alpha}\right\} ds$$

$$\le \frac{1}{v_{u,\alpha}^{\frac{2\alpha}{2-\alpha}}} \int\limits_0^{\infty} s^{\alpha-(1-\varepsilon)} \exp\left\{-\frac{3}{4}s^{2-\alpha-\varepsilon}\right\} ds. \tag{45}$$

Используя соотношения (41), (44), (45) с учетом равенства $\overline{H}(\tau_{u,\alpha})=0$ при $\tau_{u,\alpha}=\tau_u$, получаем $H_u(\tau_u) \le C(\alpha,\varepsilon) v_{u,\alpha}^{-\frac{2\alpha}{2-\alpha}}$.

3. Пусть теперь в (I′) $\alpha=2$ и $l_2(\cdot)\ne \mathrm{const}$. Аналогично неравенству (44) получаем

$$H_0(\tau_{u,2}) \le \tau_{u,2}^{\varepsilon} l_2(\tau_{u,2}) \int\limits_0^{\tau_{u,2}} \tau^{1-\varepsilon}\, d\tau \le \frac{\rho_u^2 l_2(\rho_u)}{2-\varepsilon}. \tag{46}$$

Далее, при $\tau_{u,2}=\rho_u$ в силу того, что $l_2(\tau)$ не возрастает, имеем

$$\overline{H}_u(\tau_{u,2}) = \int\limits_{\rho_u}^{\tau_u} \tau l_2(\tau) \exp\left\{-\frac{3l_2^2(\tau_u)\tau_u^4 u^2}{4l_2(\tau_u)}\right\} d\tau \le \frac{1}{2} l_2(\rho_u)\tau_u^2 \exp\left\{-\frac{3l_2^2(\tau_u)\tau_u^4 u^2}{l_2(\rho_u)}\right\}. \tag{47}$$

Такое же неравенство остается справедливым и при $\tau_{u,2}=\tau_u$, поскольку в этом случае $\overline{H}_u(\tau_{u,2})=0$.

Из (41), (46), (47) с учетом соотношений $\tau_u \le \delta_T \le 1$, $l_2^2(\tau_u)\tau_u^4 = h^2(\tau_u)$ и определения величины $\rho_u$ вытекает, что

$$H_u(\tau_u) \le C(\varepsilon) l_2(\rho_u) \exp\left\{-\frac{3l_2^2(\tau_u)\tau_u^4 u^2}{4l_2(\rho_u)}\right\}.$$

4. Пусть в (I′) $\alpha=2$, $l_2(\tau)\equiv 1$, т. е. $h(\tau)=\tau^2$. Тогда из (40) сразу выводим, что $H_u(\tau_u) \le (1/2)\tau_u^2 \exp\bigl\{-(3/4)\tau_u^4 u^2\bigr\}$. Подставим в неравенство (36) оценки для $H_u(\tau_u)$, полученные в пп. 1–4. Учитывая определение величины $R_T^{(1)}(u)$ в теореме 2 для случаев (а), (б), (в), можем записать

$$0 \le \overline{R}_T^{(1,1)}(u) + \overline{R}_T^{(2,1)}(u) \le c_T^{-3/2} I_T R_T^{(1)}(u), \tag{48}$$

если $v_{u,\alpha}^{-\frac{2}{2-\alpha}} \le \delta_T$, $0\le\alpha<2$ и $\rho_u \le \delta_T$ при $\alpha=2$, $l_2(\cdot)\ne\mathrm{const}$, где последнее неравенство вытекает из условия $h^2(\tau_u)u^2 \ge (8/3) l_2(\delta_T)|\log\delta_T|$. Лемма 3 и неравенства (30), (32), (37)–(39) и (48) приводят к утверждению теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Обозначим $R_T^*(u) = P_T(u) - \widetilde{Q}_T(u)$. В силу теоремы 2

$$|R_T^*(u)| \le R_T^{(0)} + 2\pi c_T^{-3/2} Q_T(u) \sum_{i=1}^{4} R_T^{(i)}(u).$$

По условию теоремы $X(t) \in S_T$, $0 < T < \infty$. Следовательно, согласно замечанию 1 $R_T^{(0)} = 0$, $R_T^{(2)}(u) = 0$. Теперь, учитывая оценки для $R_T^{(i)}(u)$, $i = 1, 3, 4$, приведенные в теореме 2, условие $X(t) \in S_T$, $0 < T < \infty$, замечание 1, а также соотношение $0 < Q_T(u)/\widetilde{Q}_T(u) < 1$, при всех $u \geq \tilde{\delta}^{-2}$ и $0 < T < \infty$ получаем равенство (12). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Выводы теорем 1 и 3 не изменятся, если $T$ заменить на $T_u$, а условие $T_u \exp^{-\frac{u^2}{2}} \to 0$ при $u \to \infty$ гарантирует сходимость к 0 правой части последнего неравенства в доказательстве теоремы 1, а также нетривиальность неравенств (13) и (14).

Пользуясь случаем, автор выражает свою искреннюю благодарность рецензенту за замечания и полезные советы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
2. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
3. *Тихонов В. И, Хименко В. И.* Выбросы траекторий случайных процессов. М.: Наука, 1987.
4. *Тихонов В. И, Харисов В. Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991.
5. *Rice S. O.* Mathematical analysis of random noise // Bell. Syst. Tech. J. 1944, 1945. V. 24. P. 409–416.
6. *Питербарг В. И.* Большие уклонения случайных процессов, близких к гауссовским // Теория вероятностей и ее применения. 1982. Т. 3. С. 474–491.
7. *Piterbarg V. I.* Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996.
8. *Питербарг В. И.* Метод Райса для гауссовских случайных полей // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2, № 1. С. 187–204.
9. *Azais J.-M., Wschebor M.* Une formule pour calculer la distrubution du maximum d'un processus stochastique // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1997. V. 324. P. 225–230.
10. *Azais J.-M., Wschebor M.* The distribution of the maximum of a Gaussian process: Rice method revisited in and out of equilibrium // Probability with a physical flavour. Progress in probability. Birkhauser, 2002. P. 321–348.
11. *Azais J.-M., Wschebor M.* A general formula for the distribution of the maximum of a Gaussian field and the approximation of the tail // Stochastic Processes Appl. 2008. V. 118, N 7. P. 1190–1218.
12. *Берман С.* Времена пребывания и экстремумы гауссовских процессов // Случайные процессы. М.: Мир, 1978. С. 165–203.
13. *Рудзкис Р. О.* Вероятность большого выброса нестационарного гауссовского процесса. I // Литовский мат. сб. 1985. Т. 25. С. 143–154.
14. *Муминов М. С.* О статистическом оценивании плотности распределения сплайн-функциями: Дис. канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 1985.
15. *Конаков В. Д., Питербарг В. И.* Скорость сходимости распределений максимальных уклонений гауссовских процессов и эмпирических плотностей. II // Теория вероятностей и ее применения. 1983. Т. 28, № 1. С. 164–169.
16. *Konakov V., Piterbarg V.* On the convergence rate of maximal deviations distribution for kernel regression estimates // Multivar J. Annual. 1984. V. 15. P. 279–294.
17. *Muminov M. S.* Estimation of convergence rate of distribution of maximal deviation of empirical density and curve regression // Proc. of 6 Int. conf. computer intensive methods. Minsk, Belarus, 2001. V. 3. P. 63–70.
18. *Bickel P., Rosenblatt M.* On some global measures of the deviations of density functions estimates // Ann. Statist. 1973. V. 1, N 6. P. 1071–1095.
19. *Konakov V. D.* Approximations of deviation fields of some nonparametric statistical estimates by Gaussian fields, invariance principles // Probability theory and mathematical statistics. Proc. 4th USSR-Jap. Symp., Tbilisi/USSR 1982. Berlin etc.: Springer-Verl., 1983. P. 302–314. (Lect. Notes Math.; 1021).

**20.** *Rosenblatt M.* Remarks on a multivariate transformation // Ann. Math. Statist. 1952. V. 23. P. 470–472.

**21.** *Крамер Г., Литбеттер М. Р.* Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.

**22.** *Muminov M. S.* The higher order moments of the number of crossing of a level by Gaussian process // J. Statist. Theory Appl. 2004. V. 3, N 4. P. 307–314.

**23.** *Беляев Ю. Л.* О непрерывности и дифференцируемости реализаций гауссовских процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1961. Т. 6, № 3. С. 372–375.

**24.** *Ylvisaker N. D.* The expected number of zeros of a stationary Gaussian process // Ann. Math. Statist. 1965. V. 36, N 3. P. 1043–1046.

**25.** *Ylvisaker N. D.* A note of their absence of tangencies in Gaussian sample paths // Ann. Math. Statist. 1968. V. 39, N 1. P. 261–262.


*Статья поступила 7 мая 2008 г., окончательный вариант — 21 мая 2009 г.*

Муминов Мухаммад
Институт математики и информационных технологий АНРУз,
ул. Ф. Ходжаева, 29, Ташкент 100125, Узбекистан
`M.Muhammad@rambler.ru`