Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 511

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛИНА ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ ДЗЕТА–ФУНКЦИИ РИМАНА

А. Лауринчикас

Аннотация. Доказаны предельные теоремы в смысле слабой сходимости вероятностных мер на комплексной плоскости и в пространстве аналитических функций для преобразования Меллина $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4$.

Ключевые слова: предельная теорема, преобразование Меллина, вероятностная мера, случайный элемент, дзета-функция Римана, пространство аналитических функций.

1. Введение

Пусть, как обычно, $\zeta(s)$, $s=\sigma+it$, — дзета-функция Римана, и пусть для $\sigma>1$

$$\mathcal{Z}_2(s)=\int\limits_1^\infty |\zeta(1/2+ix)|^4 x^{-s}\,dx.$$

Функцию $\mathcal{Z}_2(s)$ называют *модифицированным преобразованием Меллина* функции $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^4$. Оно введено и изучено в [1, 2], а также в [3–6] в связи с моментами дзета-функции Римана

$$\int\limits_0^T |\zeta(1/2+it)|^{2k}\,dt,\quad k=2,3,4.$$

Мотохаси [1] доказал, что функция $\mathcal{Z}_2(s)$ мероморфно продолжаема на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. В полуплоскости $\sigma>0$ у нее есть полюс $s=1$ пятого порядка, простые полюсы в точках $s=1/2\pm i\kappa_j$, $\kappa_j=\sqrt{\lambda_j-1/4}$, где $\{\lambda_j=\kappa_j^2+1/4\}\cup\{0\}$ — дискретный спектр неевклидова лапласиана, действующего на автоморфных формах для полной модулярной группы $SL(2,\mathbb{Z})$, и полюсы $s=\rho/2$, где ρ — комплексные нули $\zeta(s)$.

Среднеквадратичные оценки $\mathcal{Z}_2(s)$

$$J_T(\sigma)=\int\limits_0^T |\mathcal{Z}_2(\sigma+it)|^2\,dt$$

The paper was partially supported by Lithuanian Foundation of Studies and Science.

получены в [5] и [3]. Через

$$E_2(T) = \int_0^T |\zeta(1/2+it)|^4 \, dt - TP_4(\log T),$$

где $P_4(x)$ — полином от x четвертой степени, обозначим остаточный член в асимптотической формуле для четвертого момента $\zeta(s)$. Пусть c — константа, для которой

$$E_2(T) \ll T^{c+\varepsilon}. \tag{1}$$

В [5] доказано, что для $1/2 < \sigma < 1$

$$J_T(\sigma) \ll_\varepsilon T^\varepsilon (T + T^{(2-2\sigma)/(1-c)})$$

и безусловно для тех же σ

$$J_T(\sigma) \ll T^{(10-8\sigma)/3} \log^C T$$

с некоторой $C > 0$. Отметим, что (1) выполнено с $c = 2/3$ и что $c < 1/2$ невозможно. В [7] для $\frac{5}{6} \le \sigma \le \frac{5}{4}$ получена оценка

$$J_T(\sigma) \ll_\varepsilon T^{\frac{15-12\sigma}{5}+\varepsilon}. \tag{2}$$

Точный порядок $J_T(\sigma)$ неизвестен. В [3] доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ и фиксированного σ, $1/2 < \sigma < 1$, будет

$$J_T(\sigma) \gg_\varepsilon T^{2-2\sigma-\varepsilon},$$

а также выдвинута гипотеза, что

$$J_T(\sigma) \ll_\varepsilon T^{2-2\sigma+\varepsilon}.$$

Оценки сверху для функции $\mathscr{Z}_2(s)$ получены также в [3–5]. Во-первых, в [5] доказано, что для фиксированного σ, $1/2 < \sigma < 1$, имеем

$$\mathscr{Z}_2(\sigma+it) \ll t^{2-2\sigma} (\log t)^{18-14\sigma}, \quad t \ge t_0 > 0. \tag{3}$$

Если $s = \sigma + it$ хорошо отделена от полюсов $\mathscr{Z}_2(s)$, то [3] для $0 < \sigma < 1$ будет

$$\mathscr{Z}_2(\sigma+it) \ll_\varepsilon t^{1-\sigma+\varepsilon}. \tag{4}$$

В [4] оценка (3) улучшена до такой:

$$\mathscr{Z}_2(\sigma+it) \ll_\varepsilon t^{4/3(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

В данной работе будет изучено асимптотическое поведение функции $\mathscr{Z}_2(s)$ с помощью вероятностных методов. Точнее, будут доказаны предельные теоремы в смысле слабой сходимости вероятностных мер для функции $\mathscr{Z}_2(s)$.

Первые вероятностные результаты для дзета-функции получены в [8, 9]. Там доказана предельная теорема на комплексной плоскости для дзета-функции Римана. Затем многими математиками идеи из [8, 9] были развиты и обобщены. Историю и результаты можно найти в [10–17].

Пусть $\mathrm{meas}\{A\}$ — мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$ и

$$\nu_T^t(\dots) = \frac{1}{T} \mathrm{meas}\{t \in [0,T] : \dots\},$$

где на месте многоточия записывается условие на t. Здесь символ t в обозначении ν_T^t указывает лишь на то, что мера рассматривается относительно $t \in [0,T]$. Обозначим через $\mathscr{B}(S)$ класс борелевских множеств пространства S.

Теорема 1. *Пусть $\sigma > \frac{5}{6}$. Тогда на $(\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C}))$ существует вероятностная мера $P_{\mathbb{C},\sigma}$ такая, что вероятностная мера*

$$\nu_T^t(\mathscr{Z}_2(\sigma + it) \in A), \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{C}),$$

слабо сходится к $P_{\mathbb{C},\sigma}$ при $T \to \infty$.

Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Обозначим через $H(G)$ пространство аналитических на G функций, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах. Пусть $D = \{s \in \mathbb{C} : 5/6 < \sigma < 1\}$.

Теорема 2. *На $(H(D), \mathscr{B}(H(D)))$ существует вероятностная мера P_H такая, что вероятностная мера*

$$\nu_T^\tau(\mathscr{Z}_2(s + i\tau) \in A), \quad A \in \mathscr{B}(H(D)),$$

слабо сходится к P_H при $T \to \infty$.

2. Предельные теоремы для интегралов на конечном промежутке

Пусть $a > 1$ и $\sigma_1 > 1/2$. Для $x \geq 1$, $y \geq 1$ положим

$$v(x, y) = \exp\left\{ -\left(\frac{x}{y}\right)^{\sigma_1} \right\},$$

и пусть

$$\mathscr{Z}_{2,a,y}(s) = \int_1^a |\zeta(1/2 + ix)|^4 v(x, y) x^{-s} \, dx.$$

В этом разделе докажем предельные теоремы для функции $\mathscr{Z}_{2,a,y}(s)$. Начнем с предельной теоремы на торе

$$\Omega_a = \prod_{u \in [1,a]} \gamma_u,$$

где $\gamma_u = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\} \overset{\text{def}}{=} \gamma$ для $u \in [1, a]$. По теореме Тихонова Ω_a — компактная топологическая абелева группа. Двойственная к Ω_a группа такова:

$$\bigoplus_{u \in [1,a]} \mathbb{Z}_u,$$

где $\mathbb{Z}_u = \mathbb{Z} = \{\cdots - 1, 0, 1, \dots\}$ для $u \in [1, a]$. Тем самым преобразование Фурье вероятностной меры μ на $(\Omega_a, \mathscr{B}(\Omega_a))$ равно

$$\int_{\Omega_a} \prod_{u \in [1,a]} x_u^{k_u} \, d\mu,$$

где $k_u \in \mathbb{Z}$, $x_u \in \gamma$, и среди k_u отличных от нуля лишь конечное множество.

Определим на $(\Omega_a, \mathscr{B}(\Omega_a))$ вероятностную меру

$$Q_T(A) = \nu_T^t((u^{it} : u \in [1, a]) \in A).$$

Лемма 3. *На* $(\Omega_a, \mathscr{B}(\Omega_a))$ *существует вероятностная мера* Q *такая, что мера* Q_T *слабо сходится к* Q *при* $T \to \infty$.

Доказательство. Согласно предыдущему замечанию преобразование Фурье $g_T(\{k_u : u \in [1,a]\})$ меры Q_T равно

$$g_T(\{k_u : u \in [1,a]\}) = \int\limits_{\Omega_a} \prod_{u \in [1,a]} x_u^{k_u}\, dQ_T = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \exp\left\{ it \sum_{u \in [1,a]} k_u \log u \right\} dt$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{u \in [1,a]} k_u \log u = 0, \\ \frac{\exp\left\{iT \sum\limits_{u\in[1,a]} k_u \log u\right\} - 1}{iT \sum\limits_{u\in[1,a]} k_u \log u}, & \text{если } \sum\limits_{u \in [1,a]} k_u \log u \neq 0. \end{cases}$$

Заметим, что здесь отличных от нуля целых k_u лишь конечное множество. Тогда

$$\lim_{T\to\infty} g_T(\{k_u : u \in [1,a]\}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{u \in [1,a]} k_u \log u = 0, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{u \in [1,a]} k_u \log u \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда в силу теоремы непрерывности на локально компактных группах (см., например, [18]), получаем, что при $T \to \infty$ вероятностная мера Q_T слабо сходится к вероятностной мере Q на $(\Omega_a, \mathscr{B}(\Omega_a))$, определенной посредством ее преобразования Фурье

$$g(\{k_u : u \in [1,a]\}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{u \in [1,a]} k_u \log u = 0, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{u \in [1,a]} k_u \log u \neq 0. \end{cases}$$

Лемма 4. *На* $(\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C}))$ *существует вероятностная мера* $P_{\mathbb{C},\sigma,a,y}$ *такая, что вероятностная мера*

$$P_{T,\mathbb{C},\sigma,a,y}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_T^t(\mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma+it) \in A), \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{C}),$$

слабо сходится к $P_{\mathbb{C},\sigma,a,y}$ *при* $T \to \infty$.

Доказательство леммы 4 начнем с предельной теоремы для интегральных сумм. Разобьем промежуток $[1,a]$ точками $1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$ на n подынтервалов одинаковой длины $\frac{a-1}{n}$ и определим интегральную сумму для $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^4 v(x,y)x^{-s}$:

$$S_{2,n}(s) = S_{2,n,a,y}(s) = \sum_{j=1}^{n} |\zeta(1/2+i\xi_j)|^4 v(\xi_j,y)\xi_j^{-s}\Delta x_j$$

с $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$.

Рассмотрим вероятностную меру

$$Q_{2,T,n}(A) = Q_{2,T,n,\sigma,a,y}(A) = \nu_T^t(S_{2,n}(\sigma+it) \in A), \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{C}).$$

Лемма 5. *На $(\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C}))$ существует вероятностная мера $Q_{2,n} = Q_{2,n,\sigma,a,y}$ такая, что мера $Q_{2,T,n}$ слабо сходится к $Q_{2,n}$ при $T \to \infty$.*

Доказательство. Пусть функция $h_n : \Omega_a \to \mathbb{C}$ задана формулой

$$h_n(y_x) = \sum_{j=1}^{n} |\zeta(1/2 + i\xi_j)|^4 v(\xi_j, y)\xi_j^{-\sigma} y_{\xi_j} \Delta x_j, \quad y_x \in \Omega_a.$$

Тогда функция h_n непрерывна и

$$h_n(x^{-it}) = S_{2,n}(\sigma + it).$$

Поэтому $Q_{2,T,n} = Q_T h_n^{-1}$, где Q_T — мера из леммы 3. Тем самым результат нашей леммы вытекает из леммы 3, непрерывности h_n и теоремы 5.1 в [19].

Лемма 6. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |S_{2,n}(\sigma + it) - \mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma + it)|\, dt = 0.$$

Доказательство. По неравенству Коши — Шварца

$$\frac{1}{T} \int_0^T |S_{2,n}(\sigma + it) - \mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma + it)|\, dt \ll \left(\frac{1}{T} \int_0^T |S_{2,n}(\sigma + it) - \mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma + it)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T S_{2,n}(\sigma + it)\overline{S_{2,n}(\sigma + it)}\, dt = 0. \tag{6}$$

Более того,

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma + it)\overline{\mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma + it)}\, dt = 0. \tag{7}$$

Так как

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_{2,n}(\sigma + it)\overline{\mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma + it)}\, dt \ll \left(\frac{1}{T} \int_0^T |S_{2,n}(\sigma + it)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma + it)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

и такая же оценка верна для среднего значения функции $\overline{S_{2,n}(\sigma + it)}\mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma + it)$, утверждение леммы вытекает из (5)–(8).

Доказательство леммы 4. По лемме 5 вероятностная мера $Q_{2,T,n}$ слабо сходится к мере $Q_{2,n}$ при $T \to \infty$. Определим на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \mathbb{P})$ случайную величину θ_T, полагая

$$\mathbb{P}(\theta_T \in A) = \frac{1}{T} \int_0^T I_A\, dt, \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

где I_A — индикатор множества A. Пусть

$$U_{T,n}(\sigma) = S_{2,n}(\sigma + i\theta_T).$$

Из леммы 5 вытекает соотношение

$$U_{T,n}(\sigma) \underset{T\to\infty}{\overset{\mathscr{D}}{\to}} U_n(\sigma), \tag{9}$$

где $U_n(\sigma)$ — комплекснозначная случайная величина с распределением $Q_{2,n}$ и $\overset{\mathscr{D}}{\to}$ означает сходимость по распределению. Покажем, что семейство вероятностных мер $\{Q_{2,n} : n \in \mathbb{N}\}$ плотное. Возьмем произвольное $M > 0$. Тогда по неравенству Чебышёва имеем

$$\mathbb{P}(|U_{T,n}(\sigma)| > M) \le \frac{1}{TM} \int\limits_0^T |S_{2,n}(\sigma + it)|\, dt.$$

Отсюда и леммы 6 видно, что

$$\limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}(|\check{U}_{T,n}(\sigma)| > M) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{TM} \int\limits_0^T |S_{2,n}(\sigma + it)|\, dt$$

$$\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{TM} \int\limits_0^T |S_{2,n}(\sigma+it) - \mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma+it)|\, dt + \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{TM} \int\limits_0^T |\mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma+it)|\, dt$$

$$\ll \frac{1}{M} + \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{TM} \int\limits_0^T |\mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma)|\, dt \le \frac{R_{2,\sigma,y}}{M} \tag{10}$$

с $R_{2,\sigma,y} < \infty$. Пусть ε — произвольное положительное число. Тогда, взяв $M = M_\varepsilon = R_{2,\sigma,y}\varepsilon^{-1}$, из (9) и (10) выводим, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(|U_n(\sigma)| > M_\varepsilon) \le \varepsilon. \tag{11}$$

Положим $K_\varepsilon = \{s \in \mathbb{C} : |s| \le M_\varepsilon\}$. Тогда K_ε — компактное подмножество в $\mathbb{C}$ и ввиду (11)

$$\mathbb{P}(U_n(\sigma) \in K_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$Q_{2,n}(K_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon.$$

Тем самым мы доказали, что семейство $\{Q_{2,n} : n \in \mathbb{N}\}$ плотное. Отсюда по теореме Прохорова (см., например, [19]) заключаем, что оно относительно компактно. Следовательно, найдется последовательность $\{Q_{2,n_k}\} \subset \{Q_{2,n}\}$ такая, что Q_{2,n_k} слабо сходится к некоторой вероятностной мере Q_2 на $(\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C}))$ при $k \to \infty$. Значит,

$$U_{n_k}(\sigma) \underset{k\to\infty}{\overset{\mathscr{D}}{\to}} Q_2. \tag{12}$$

Положим

$$X_{T,\mathbb{C},a,y}(\sigma) = \mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma + i\theta_T).$$

Принимая во внимание лемму 6, находим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}(|X_{T,\mathbb{C},a,y}(\sigma) - U_{T,n}(\sigma)| \geq \varepsilon)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T\varepsilon} \int_0^T |S_{2,n}(\sigma+it) - \mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma+it)|\,dt = 0.$$

Последнее неравенство, а также (9), (12) и теорема 4.2 из [19] показывают, что

$$X_{T,\mathbb{C},a,y}(\sigma) \underset{T\to\infty}{\overset{\mathscr{D}}{\to}} Q_2.$$

Это равносильно утверждению леммы 4.

Лемма 7. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Тогда на $(H(G), \mathscr{B}(H(G)))$ существует вероятностная мера $P_{H,a,y}$ такая, что вероятностная мера*

$$P_{T,H,a,y}(A) \overset{\text{def}}{=} \nu_T^\tau(\mathscr{Z}_{2,a,y}(s+i\tau) \in A), \quad A \in \mathscr{B}(H(G)),$$

слабо сходится к $P_{H,a,y}$ при $T \to \infty$.

Доказательство. В первую очередь зададим метрику на $H(G)$, которая снабжает его топологией равномерной сходимости на компактах. Известно (см., например, [20]), что существует последовательность компактных подмножеств $\{K_l\}$ в G такая, что

$$G = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

$K_l \subset K_{l+1}$, $l \in \mathbb{N}$, и если $K \subset G$ — компакт, то $K \subset K_l$ с некоторым l. Для $f, g \in H(G)$ положим

$$\rho(f,g) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\rho_l(f,g)}{1+\rho_l(f,g)},$$

где $\rho_l(f,g) = \sup\limits_{s\in K_l} |f(s)-g(s)|$. Тогда ρ — требуемая метрика на $H(G)$.

Далее применим рассуждения, аналогичные проводимым при доказательстве леммы 3. Определим функцию $\hat{h}_n : \Omega_a \to H(G)$ по формуле

$$\hat{h}_n(y_x) = \sum_{j=1}^{n} |\zeta(1/2+i\xi_j)|^4 v(\xi_j, y)\xi_j^{-s} y_{\xi_j} \Delta x_j, \quad y_x \in \Omega_a.$$

Тогда функция $\hat{h}_n$ непрерывна и

$$\hat{h}_n(x^{-i\tau}) = S_{2,n}(s+i\tau).$$

Поэтому, взяв

$$\widehat{Q}_{2,T,n}(A) = \nu_T^\tau(S_{2,n}(s+i\tau) \in A), \quad A \in \mathscr{B}(H(G)),$$

имеем $\widehat{Q}_{2,T,n} = Q_T \hat{h}_n^{-1}$. Отсюда, из леммы 3, непрерывности $\hat{h}_n$ и теоремы 5.1 из [19] имеем, что мера $\widehat{Q}_{2,T,n}$ слабо сходится к $Q\hat{h}_n^{-1}$ при $T \to \infty$.

Пусть теперь K — компактное подмножество области G и L — простой замкнутый контур, лежащий в G и охватывающий множество K. Тогда ввиду интегральной формулы Коши

$$\sup_{s\in K} |S_{2,n}(s+i\tau) - \mathscr{Z}_{2,a,y}(s+i\tau)| \ll \frac{1}{\delta} \int_L |S_{2,n}(z+i\tau) - \mathscr{Z}_{2,a,y}(z+i\tau)||dz|,$$

где δ — расстояние от L до множества K. Отсюда

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \sup_{s\in K}|S_{2,n}(s+i\tau)-\mathscr{Z}_{2,a,y}(s+i\tau)|\,d\tau$$

$$\ll \frac{1}{\delta}\int\limits_L |dz|\frac{1}{T}\int\limits_0^T |S_{2,n}(\operatorname{Re}z+i\tau+i\operatorname{Im}z)-\mathscr{Z}_{2,a,y}(\operatorname{Re}z+i\tau+i\operatorname{Im}z)|\,d\tau. \quad (13)$$

Аналогично доказательству леммы 6 находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T |S_{2,n}(\operatorname{Re}z+i\tau+i\operatorname{Im}z)-\mathscr{Z}_{2,a,y}(\operatorname{Re}z+i\tau+i\operatorname{Im}z)|\,d\tau=0.$$

Отсюда и из (13) выводим соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \sup_{s\in K}|S_{2,n}(s+i\tau)-\mathscr{Z}_{2,a,y}(s+i\tau)|\,d\tau=0. \quad (14)$$

Мы видели, что мера $\widehat{Q}_{2,T,n}$ слабо сходится к $Q\hat{h}_n^{-1}$ при $T\to\infty$. Следовательно,

$$\widehat{U}_{T,n}(s)\underset{T\to\infty}{\xrightarrow{\mathscr{D}}}\widehat{U}_n(s), \quad (15)$$

где

$$\widehat{U}_{T,n}(s)=S_{2,n}(s+i\theta_T),$$

и $\widehat{U}_n(s)$ — $H(G)$-значный случайный элемент с распределением $\widehat{Q}_{2,n}=Q\hat{h}_n^{-1}$. Используя (14) и (15), находим, что для $M_l>0$

$$\mathbb{P}\{\sup_{s\in K_l}|\widehat{U}_n(s)|>M_l\}\le\frac{\widehat{R}_{2,y}}{M_l}$$

с $\widehat{R}_{2,y}<\infty$. Отсюда, взяв $M_l=M_{l,\varepsilon}=\widehat{R}_{2,y}\varepsilon^{-1}2^l$ с произвольным $\varepsilon>0$, получаем, что

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in K_l}|\widehat{U}_n(s)|>M_{l,\varepsilon})\le\varepsilon 2^{-l},\quad l\in\mathbb{N}. \quad (16)$$

Положим

$$K_\varepsilon=\{g\in H(G):\sup_{s\in K_l}|g(s)|\le M_{l,\varepsilon},\ l\in\mathbb{N}\}.$$

Тогда множество K_ε компактно в $H(G)$, так что по (16)

$$\mathbb{P}(\widehat{U}_n(s)\in K_\varepsilon)\ge 1-\varepsilon$$

для любого $n\in\mathbb{N}$ или

$$\widehat{Q}_{2,n}(K_\varepsilon)\ge 1-\varepsilon$$

для любого $n\in\mathbb{N}$. Это показывает, что семейство вероятностных мер $\{\widehat{Q}_{2,n}:n\in\mathbb{N}\}$ плотно, тем самым по теореме Прохорова оно относительно компактно. Следовательно, найдется подпоследовательность $\{\widehat{Q}_{2,n_k}\}\subset\{\widehat{Q}_{2,n}\}$ такая, что $\widehat{Q}_{2,n_k}$ слабо сходится к некоторой вероятностной мере $\widehat{Q}_2$ на $(H(G),\mathscr{B}(H(G)))$ при $k\to\infty$. Отсюда

$$\widehat{U}_{n_k}(s)\underset{k\to\infty}{\xrightarrow{\mathscr{D}}}\widehat{Q}_2. \quad (17)$$

Положим теперь
$$X_{T,H,a,y}(s) = \mathscr{Z}_{2,a,y}(s+i\theta_T).$$
Тогда ввиду соотношения (14) для любого $\varepsilon > 0$
$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\mathbb{P}\{\rho(X_{T,H,a,y}(s),\widehat{U}_{T,n}(s)) \geq \varepsilon\}$$
$$\leq \lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T\varepsilon}\int\limits_0^T \rho(X_{T,H,a,y}(s+i\tau),\widehat{U}_{T,n}(s+i\tau))\,d\tau = 0.$$
Тем самым (15), (17) и теорема 4.2 из [19] доказывают лемму.

3. Приближение абсолютно сходящимся интегралом

Пусть, как и выше, $\sigma_1 > 1/2$ и $\Gamma(s)$ — гамма-функция. Для $y \geq 1$ положим
$$l_y(s) = \frac{s}{\sigma_1}\Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right)y^s,$$
и пусть для $\sigma > 1/2$
$$\mathscr{Z}_{2,y}(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\mathscr{Z}_2(s+z)l_y(z)\frac{dz}{z}.$$
Так как $\sigma+\sigma_1 > 1$, для $\operatorname{Re} z = \sigma_1$ имеем
$$\mathscr{Z}_2(s+z) = \int\limits_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^4 x^{-(s+z)}\,dx.$$

Пусть
$$a_y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^4\frac{l_y(z)\,dz}{zx^z}.$$
Тогда ввиду оценки $\Gamma(\sigma+it) \ll e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{\sigma-1/2}$ получаем
$$a_y(x) \ll |\zeta(1/2+ix)|^4x^{-\sigma_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_y(\sigma_1+it)|\,dt \ll |\zeta(1/2+ix)|^4x^{-\sigma_1}.$$
Поскольку
$$\int\limits_1^T|\zeta(1/2+it)|^4\,dt \ll T\log^4 T,$$
приходим к выводу, что интеграл
$$\int\limits_1^\infty\frac{a_y(x)\,dx}{x^s}$$
сходится абсолютно при $\sigma > \frac{1}{2}$. Поэтому
$$\int\limits_1^\infty\frac{a_y(x)\,dx}{x^s} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\left(\frac{l_y(z)}{z}\int\limits_1^\infty|\zeta(1/2+ix)|^4\frac{dx}{x^{s+z}}\right)dz = \mathscr{Z}_{2,y}(s). \quad (18)$$

Применяя формулу Меллина, из (18) получаем, что интеграл

$$\mathscr{Z}_{2,y}(s) = \int\limits_1^\infty |\zeta(1/2+ix)|^4 v(x,y) x^{-s}\, dx$$

сходится абсолютно при $\sigma > 1/2$.

Лемма 8. *Пусть K — компактное подмножество в полосе D. Тогда*

$$\lim_{y\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \sup_{s\in K} |\mathscr{Z}_2(s+i\tau) - \mathscr{Z}_{2,y}(s+i\tau)|\, d\tau = 0.$$

Доказательство. Поскольку в фиксированной полосе будет

$$\Gamma(s) \ll e^{-c|t|}, \quad c > 0, \tag{19}$$

применяя оценку (4) и теорему о вычетах, выводим, что для $\sigma_2 < \sigma$

$$\mathscr{Z}_{2,y}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_2-\sigma-i\infty}^{\sigma_2-\sigma+i\infty} \mathscr{Z}_2(s+z) l_y(z) \frac{dz}{z} + \mathscr{Z}_2(s) + \operatorname{Res}_{z=1-s} \mathscr{Z}_2(s+z) l_y(z) z^{-1}. \tag{20}$$

Пусть теперь L — простой замкнутый контур длиной $|L|$, лежащий в D и охватывающий множество K. Через δ обозначим расстояние от L до множества K. Тогда по интегральной формуле Коши имеем

$$\sup_{s\in K} |\mathscr{Z}_2(s+i\tau) - \mathscr{Z}_{2,y}(s+i\tau)| \le \frac{1}{2\pi\delta} \int\limits_L |\mathscr{Z}_2(z+i\tau) - \mathscr{Z}_{2,y}(z+i\tau)||dz|.$$

Тем самым для достаточно большого T

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T} \int\limits_0^T \sup_{s\in K} |\mathscr{Z}_2(s+i\tau) - \mathscr{Z}_{2,y}(s+i\tau)|\, d\tau \\
&\qquad \ll \frac{1}{T\delta} \int\limits_L |dz| \int\limits_0^{2T} |\mathscr{Z}_2(\operatorname{Re} z+i\tau) - \mathscr{Z}_{2,y}(\operatorname{Re} z+i\tau)|\, d\tau \\
&\qquad\qquad \ll \frac{|L|}{T\delta} \sup_{\substack{\sigma \\ s\in L}} \int\limits_0^{2T} |\mathscr{Z}_2(\sigma+i\tau) - \mathscr{Z}_{2,y}(\sigma+i\tau)|\, d\tau.
\end{aligned} \tag{21}$$

В силу оценки (19) получаем, что для $5/6 < \sigma < 1$

$$\frac{1}{T} \int\limits_0^T |R(\sigma+it)|\, dt = o(1), \quad T \to \infty, \tag{22}$$

где

$$R(s) = \operatorname{Res}_{z=1-s} \mathscr{Z}_2(s+z) l_y(z) z^{-1}.$$

Из неравенства (20) следует, что

$$\mathscr{Z}_2(\sigma+it) - \mathscr{Z}_{2,y}(\sigma+it) \ll \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{Z}_2(\sigma_2+it+i\tau)||l_y(\sigma_2-\sigma+i\tau)|\, d\tau + |R(\sigma+it)|.$$

Тогда для тех же значений σ, что и выше, ввиду (22) при $T \to \infty$ имеет место оценка

$$\frac{1}{T}\int_0^{2T} |\mathscr{Z}_2(\sigma+i\tau) - \mathscr{Z}_{2,y}(\sigma+i\tau)|\,d\tau \ll \int_{-\infty}^{\infty} |l_y(\sigma_2-\sigma+i\tau)|\biggl(\frac{1}{T}\int_{-|\tau|}^{|\tau|+2T} |\mathscr{Z}_2(\sigma_2+it)|\,dt\biggr)\,d\tau + o(1). \quad (23)$$

Принимая во внимание (2), выводим, что для $\sigma > \frac{5}{6}$

$$\int_0^T |\mathscr{Z}_2(\sigma+it)|^2\,dt \ll T.$$

Отсюда по неравенству Коши получаем, что

$$\int_0^T |\mathscr{Z}_2(\sigma_2+it)|\,dt \ll T.$$

Учитывая это в (23), получаем, что

$$\frac{1}{T}\sup_{\substack{\sigma\\ s\in L}}\int_0^{2T} |\mathscr{Z}_2(\sigma+i\tau)-\mathscr{Z}_{2,y}(\sigma+i\tau)|\,d\tau \ll \sup_{\substack{\sigma\\ s\in L}}\int_{-\infty}^{\infty} |l_y(\sigma_2-\sigma+i\tau)|(1+|\tau|)\,d\tau + o(1)$$
$$\ll \sup_{\sigma\le -\varepsilon/4}\int_{-\infty}^{\infty} |l_y(\sigma+it)|(1+|t|)\,dt + o(1)$$

при $T \to \infty$. Поскольку

$$\lim_{y\to\infty}\sup_{\sigma\le -\varepsilon/4}\int_{-\infty}^{\infty} |l_y(\sigma+it)|(1+|t|)\,dt = 0,$$

отсюда и из (21) приходим к утверждению леммы.

Лемма 9. *Пусть $\sigma > \frac{5}{6}$. Тогда*

$$\lim_{y\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T |\mathscr{Z}_2(\sigma+it) - \mathscr{Z}_{2,y}(\sigma+it)|\,dt = 0.$$

Доказательство. Для $\frac{5}{6} < \sigma < 1$ результат теоремы вытекает немедленно из леммы 8. Случай $\sigma \geq 1$ рассматривается так же, как в лемме 8.

4. Предельные теоремы для функции $\mathscr{Z}_{2,y}(s)$

Здесь мы докажем предельные теоремы на комплексной плоскости и в пространстве аналитических функций для функции $\mathscr{Z}_{2,y}(s)$.

Лемма 10. *Пусть $\sigma > 1/2$. Тогда на $(\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C}))$ существует вероятностная мера $P_{\mathbb{C},\sigma,y}$ такая, что вероятностная мера*

$$\nu_T^t(\mathscr{Z}_{2,y}(\sigma + it) \in A), \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{C}),$$

слабо сходится к $P_{\mathbb{C},\sigma,y}$ при $T \to \infty$.

Доказательство. По лемме 4 вероятностная мера $P_{T,\mathbb{C},\sigma,a,y}$ слабо сходится к некоторой мере $P_{\mathbb{C},\sigma,a,y}$ при $T \to \infty$. Сначала покажем, что семейство вероятностных мер $\{P_{\mathbb{C},\sigma,a,y}\}$ плотно для фиксированного y.

Пусть θ_T — случайная величина, как в разд. 3, и

$$X_{T,\mathbb{C},a,y}(\sigma) = \mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma + i\theta_T).$$

Тогда по лемме 4

$$X_{T,\mathbb{C},a,y}(\sigma) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathscr{D}} X_{\mathbb{C},a,y}(\sigma), \tag{24}$$

где $X_{\mathbb{C},a,y}(\sigma)$ — комплекснозначная случайная величина с распределением $P_{\mathbb{C},\sigma,a,y}$. Пусть $M > 0$. Тогда по неравенству Чебышёва

$$\mathbb{P}\big(|X_{T,\mathbb{C},a,y}(\sigma)| > M\big) \le \frac{1}{TM} \int_0^T |\mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma + it)|\, dt. \tag{25}$$

Интеграл, определяющий $\mathscr{Z}_{2,y}(s)$, сходится абсолютно для $\sigma > 1/2$, поэтому

$$\sup_{a\ge 1} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma + it)|\, dt \le R < \infty. \tag{26}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Взяв $M = M_\varepsilon = R\varepsilon^{-1}$, из (25) (26) находим, что

$$\limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}(|X_{T,\mathbb{C},a,y}(\sigma)| > M_\varepsilon) \le \epsilon. \tag{27}$$

Рассмотрим функцию $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $h(z) = |z|$, $z \in \mathbb{C}$. Из непрерывности h, (24) и теоремы 5.1 в [19] получаем, что

$$|X_{T,\mathbb{C},a,y}(\sigma)| \xrightarrow[T\to\infty]{\mathscr{D}} |X_{\mathbb{C},a,y}(\sigma)|.$$

Отсюда и из (27) выводим неравенство

$$\mathbb{P}(|X_{\mathbb{C},a,y}(\sigma)| > M_\varepsilon) \le \epsilon. \tag{28}$$

Множество $C_\varepsilon = \{s \in \mathbb{C} : |s| \le M_\varepsilon\}$ компактно, и ввиду (28)

$$\mathbb{P}(X_{\mathbb{C},a,y}(\sigma) \in C_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon$$

для любого $a > 1$. Последнее неравенство и определение $X_{\mathbb{C},a,y}(\sigma)$ показывают, что

$$P_{\mathbb{C},\sigma,a,y}(C_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon$$

для любого $a > 1$, т. е. семейство вероятностных мер $\{P_{\mathbb{C},\sigma,a,y}\}$ плотно. По теореме Прохорова семейство $\{P_{\mathbb{C},\sigma,a,y}\}$ относительно компактно. Согласно определению $\mathscr{Z}_{2,a,y}(s)$ и $\mathscr{Z}_{2,y}(s)$ для $\sigma > \frac{1}{2}$ имеем

$$\lim_{a\to\infty} \mathscr{Z}_{2,a,y}(s) = \mathscr{Z}_{2,y}(s).$$

Поэтому для $\sigma > 1/2$ и произвольного $\varepsilon > 0$ будет

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \nu_T^t(|\mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma+it) - \mathscr{Z}_{2,y}(\sigma+it)| \geq \varepsilon) \leq \lim_{a\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^T |\mathscr{Z}_{2,a,y}(\sigma+it) - \mathscr{Z}_{2,y}(\sigma+it)|\, dt = 0.$$

Полагая $X_{T,\mathbb{C},y}(\sigma) = \mathscr{Z}_{2,y}(\sigma + i\theta_T)$, отсюда находим, что

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}(|X_{T,\mathbb{C},a,y}(\sigma) - X_{T,\mathbb{C},y}(\sigma)| \geq \varepsilon) = 0. \tag{29}$$

Ввиду относительной компактности семейства $\{P_{\mathbb{C},\sigma,a,y}\}$ существует подпоследовательность $\{P_{\mathbb{C},\sigma,a_k,y}\} \subset \{P_{\mathbb{C},\sigma,a,y}\}$ такая, что $P_{\mathbb{C},\sigma,a_k,y}$ слабо сходится к некоторой вероятностной мере $P_{\mathbb{C},\sigma,y}$ на $(\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C}))$ при $k\to\infty$. Тем самым

$$X_{\mathbb{C},a_k,y}(\sigma) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}} P_{\mathbb{C},\sigma,y}.$$

Отсюда, из (24) и (29) вытекает, что выполнены все предположения теоремы 4.2 в [19], так что

$$X_{T,\mathbb{C},y} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathscr{D}} P_{\mathbb{C},y}.$$

Это равносильно утверждению леммы 10.

Пусть $D_0 = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$.

Лемма 11. *На $(H(D_0), \mathscr{B}(H(D_0)))$, существует вероятностная мера $P_{H,y}$ такая, что вероятностная мера*

$$\nu_T^\tau(\mathscr{Z}_{2,y}(s+i\tau) \in A), \quad A \in \mathscr{B}(H(D_0)),$$

слабо сходится к $P_{H,y}$ при $T \to \infty$.

Доказательство. Будем рассуждать так же, как в доказательстве леммы 10. Разница будет только в различии топологий пространств $H(D_0)$ и $\mathbb{C}$.

Пусть $X_{T,H,a,y}(s) = \mathscr{Z}_{2,a,y}(s + i\theta_T)$. Тогда по лемме 7

$$X_{T,H,a,y}(s) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathscr{D}} X_{H,a,y}(s), \tag{30}$$

где $X_{H,a,y}(s)$ — $H(D_0)$-значная случайная величина с распределением $P_{H,a,y}$.

Пусть последовательность компактных подмножеств $\{K_l\}$ соответствует области D_0. Используя неравенство Чебышёва, для $M_l > 0$ получаем, что

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in K_l} |X_{T,H,a,y}(s)| > M_l) \leq \frac{1}{TM_l} \int_0^T \sup_{s\in K_l} |\mathscr{Z}_{2,a,y}(s+i\tau)|\, d\tau. \tag{31}$$

Для $\mathscr{Z}_{2,y}(s)$ интеграл сходится абсолютно на D_0, откуда вытекает, что сходимость равномерна на компактных подмножествах D_0. Поэтому

$$\sup_{a\geq 1} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K_l} |\mathscr{Z}_{2,a,y}(s+i\tau)|\, d\tau \leq R_l < \infty. \tag{32}$$

Взяв $M_l = M_{l,\varepsilon} = R_l 2^l \varepsilon^{-1}$, из (31) и (32) получаем, что

$$\limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{s\in K_l} |X_{T,H,a,y}(s)| > M_{l,\varepsilon}) \leq \frac{\varepsilon}{2^l}, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{33}$$

Функция $h : H(D_0) \to \mathbb{R}$, заданная соотношением $h(f) = \sup\limits_{s \in K_l} |f(s)|$, $f \in H(D_0)$, непрерывна, поэтому из (30) и теоремы 5.1 в [19] получаем, что

$$\sup_{s \in K_l} |X_{T,H,a,y}(s)| \xrightarrow[T\to\infty]{\mathscr{D}} \sup_{s \in K_l} |X_{H,a,y}(s)|.$$

Отсюда и из (33) приходим к неравенству

$$\mathbb{P}(\sup_{s \in K_l} |X_{H,a,y}(s)| > M_{l,\varepsilon}) \leq \frac{\varepsilon}{2^l}, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

Множество $H_\varepsilon = \{f \in H(D_0) : \sup\limits_{s \in K_l} |f(s)| \leq M_l,\, l \in \mathbb{N}\}$ компактно ввиду принципа компактности, более того, в силу (34) будет

$$\mathbb{P}(X_{H,a,y}(s) \in H_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

для любого $a > 1$. Отсюда

$$P_{H,a,y}(H_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

для всех $a > 1$, иными словами, семейство вероятностных мер $\{P_{H,a,y}\}$ плотно, и по теореме Прохорова оно относительно компактно. Так как для $\mathscr{Z}_{2,y}(s)$ интеграл сходится абсолютно на D_0, выводим, что

$$\lim_{a \to \infty} \mathscr{Z}_{2,a,y}(s) = \mathscr{Z}_{2,y}(s)$$

равномерно на компактных подмножествах в D_0. Поэтому

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \nu_T^\tau(\varrho(\mathscr{Z}_{2,a,y}(s+i\tau), \mathscr{Z}_{2,y}(s+i\tau)) \geq \varepsilon)$$
$$\leq \lim_{a\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\epsilon T} \int_0^T \rho(\mathscr{Z}_{2,a,y}(s+i\tau), \mathscr{Z}_{2,y}(s+i\tau))\, d\tau = 0.$$

Взяв $X_{T,H,y}(s) = \mathscr{Z}_{2,y}(s + i\theta_T)$, получаем, что

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}(\varrho(X_{T,H,a,y}(s), X_{T,H,y}(s)) \geq \varepsilon) = 0. \tag{35}$$

Относительная компактность семейства $\{P_{H,a,y}\}$ влечет существование подпоследовательности $\{P_{H,a_k,y}\} \subset \{P_{H,a,y}\}$ такой, что $P_{H,a_k,y}$ слабо сходится к некоторой вероятностной мере $P_{H,y}$ на $(H(D_0), \mathscr{B}(H(D_0)))$ при $k \to \infty$. Отсюда

$$X_{H,a_k,y} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}} P_{H,y}.$$

Последнее соотношение (30), (35) и теорема 4.2 из [19] показывают, что

$$X_{T,H,y} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathscr{D}} P_{H,y}.$$

Лемма доказана.

5. Доказательство основных теорем

Теоремы 1 и 2 вытекают из лемм 9, 10 и лемм 11, 8 соответственно.

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем, что семейство вероятностных мер $\{P_{\mathbb{C},\sigma,y}\}$, где $P_{\mathbb{C},\sigma,y}$ — предельная мера из леммы 8, плотно. Будем использовать обозначения из предыдущего раздела.

По лемме 10

$$X_{T,\mathbb{C},y}(\sigma) \underset{T\to\infty}{\overset{\mathscr{D}}{\to}} X_{\mathbb{C},y}(\sigma), \tag{36}$$

где $X_{\mathbb{C},\sigma,y}$ — комплекснозначная случайная величина с распределением $P_{\mathbb{C},\sigma,y}$. Так как интеграл, определяющий $\mathscr{Z}_{2,y}(s)$, сходится абсолютно при $\sigma > 1/2$, получаем, что

$$\sup_{y\ge 1}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |\mathscr{Z}_{2,y}(\sigma+it)|\,dt \le \sup_{y\ge 1}\limsup_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T |\mathscr{Z}_{2,y}(\sigma+it)|^2\,dt\right)^{1/2} \le R < \infty.$$

Как и в доказательстве леммы 10, находим, что

$$\limsup_{T\to\infty}\mathbb{P}(|X_{T,\mathbb{C},y}(\sigma)| > M) \le \epsilon,$$

если $M = R\varepsilon^{-1}$. Отсюда получаем, что $P_{\mathbb{C},\sigma,y}(C_\varepsilon) \ge 1-\varepsilon$ для любого $y \ge 1$, где C_ε определено в доказательстве леммы 10. Тем самым семейство $\{P_{\mathbb{C},\sigma,y}\}$ плотно, следовательно, оно относительно компактно. По лемме 9 и неравенству Чебышёва

$$\lim_{y\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\nu_T^t(|\mathscr{Z}_2(\sigma+it)-\mathscr{Z}_{2,y}(\sigma+it)| \ge \epsilon) \le \lim_{y\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{\epsilon T}\int_0^T |\mathscr{Z}_2(\sigma+it)-\mathscr{Z}_{2,y}(\sigma+it)|\,dt = 0.$$

Обозначив $X_{T,\mathbb{C}}(\sigma) = \mathscr{Z}_2(\sigma+i\theta_T)$, отсюда получаем, что

$$\lim_{y\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\mathbb{P}(|X_{T,\mathbb{C},y}(\sigma)-X_{T,\mathbb{C}}(\sigma)| \ge \varepsilon) = 0. \tag{37}$$

Пусть теперь $\{P_{\mathbb{C},\sigma,y_k}\} \subset \{P_{\mathbb{C},\sigma,y}\}$ таково, что $P_{\mathbb{C},\sigma,y_k}$ слабо сходится к некоторой вероятностной мере $P_{\mathbb{C},\sigma}$ на $(\mathbb{C},\mathscr{B}(\mathbb{C}))$ при $k\to\infty$. Тогда

$$X_{\mathbb{C},y_k}(\sigma) \underset{k\to\infty}{\overset{\mathscr{D}}{\to}} P_{\mathbb{C},\sigma}.$$

Последнее соотношение, а также (36) и (37) вместе с теоремой 4.2 из [19] приводят к тому, что

$$X_{T,\mathbb{C}}(\sigma) \underset{T\to\infty}{\overset{\mathscr{D}}{\to}} P_{\mathbb{C},\sigma}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. По лемме 11

$$X_{T,H,y}(s) \underset{T\to\infty}{\overset{\mathscr{D}}{\to}} X_{H,y}(s), \tag{38}$$

где $X_{H,y}(s)$ — $H(D)$-значный случайный элемент с распределением $P_{H,y}$, как и в доказательстве леммы 11, получаем, что

$$\limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{s\in K_l} |X_{T,H,y}(s)| > M_l) \leq \frac{\varepsilon}{2^l}, \quad l \in \mathbb{N},$$

если $M_l = M_{l,\varepsilon} = R_l 2^l \varepsilon^{-1}$ и $R_l < \infty$ определено так:

$$\sup_{y\geq 1} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \sup_{s\in K_l} |\mathscr{Z}_{2,y}(s+i\tau)|\, d\tau \leq R_l.$$

Здесь последовательность $\{K_l\}$ соответствует области D. Отсюда легко следует, что $P_{\mathbb{C},y}(H_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$ для всех $y \geq 1$, где H_ε определено в доказательстве леммы 11. Тем самым установлена плотность семейства $\{P_{H,y}\}$, а это влечет относительную компактность. Используя неравенство Чебышёва, в силу леммы 8 получаем, что

$$\lim_{y\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \nu_T^\tau(\varrho(\mathscr{Z}_2(s+i\tau), \mathscr{Z}_{2,y}(s+i\tau)) \geq \varepsilon)$$

$$\leq \lim_{y\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\varepsilon T} \int\limits_0^T \varrho(\mathscr{Z}_2(s+i\tau), \mathscr{Z}_{2,y}(s+i\tau))\, d\tau = 0.$$

Пусть $X_{T,H}(s) = \mathscr{Z}_2(s+i\theta_T)$. Тогда

$$\lim_{y\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}(\varrho(X_{T,H,y}(s), X_{T,H}(s)) \geq \varepsilon) = 0. \tag{39}$$

Выберем $\{P_{H,y_k}\} \subset \{P_{H,y}\}$ так, что P_{H,y_k} слабо сходится к некоторой вероятностной мере P_H на $(H(D), \mathscr{B}(H(D)))$ при $k \to \infty$. Тогда

$$X_{H,y_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}} P_H, \tag{40}$$

и утверждение теоремы получается из (38)–(40) и теоремы 4.2 в [19].

6. Заключительные замечания

Пусть для $k \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{Z}_k(s) = \int\limits_1^\infty |\zeta(1/2+ix)|^{2k} x^{-s}\, dx$$

обозначает модифицированное преобразования Меллина степеней дзета-функции Римана на критической прямой. Отметим, что классическое преобразование Меллина функции $f(x)$ определяется соотношением

$$\int\limits_0^\infty f(x) x^{s-1}\, dx.$$

Выбор промежутка интегрирования $[1, \infty)$ в этом определении $\mathscr{Z}_k(s)$ связан с проблемами сходимости в точке $x = 0$. $\mathscr{Z}_k(s)$ — аналитическая функция для произвольного $k \geq 0$, и $\sigma > \sigma_0(k)$. Как отмечено в [2], оценка [21]

$$\int\limits_0^T |\zeta(1/2+it)|^{2k}\, dt \ll T^{\frac{k+2}{4}} \log^{c(k)} T, \quad 2 < k < 6,$$

показывает, что интеграл, определяющий $\mathscr{Z}_k(s)$, абсолютно сходится при $\sigma > 1$, если $0 \le k \le 2$, и при $\sigma > \frac{k+2}{4}$, если $2 \le k \le 6$. Тем самым функция $\mathscr{Z}_k(s)$ аналитична в полуплоскости $\sigma > 1$, если $0 \le k \le 2$, и в полуплоскости $\sigma > \frac{k+2}{4}$, если $2 \le k \le 6$. Для $c \ge c_k > 0$ и $\sigma \ge \sigma_1(k) > 1$ функция $\mathscr{Z}_k(s)$ удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению [5]:

$$\mathscr{Z}_k(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathscr{Z}_{k-r}(w)\mathscr{Z}_r(1-w+s)dw, \quad r = 1, \dots, k-1.$$

Исторически функцию $\mathscr{Z}_k(s)$ начали изучать для $k = 2$ [1, 2]. Первые результаты относительно функции $\mathscr{Z}_1(s)$ получены в [5]. Пусть

$$G(T) = \int\limits_1^T E(t)\,dt - \pi T, \quad G_1(T) = \int\limits_1^T G(T)\,dt,$$

где $E(T)$ — остаточный член в формуле среднеквадратического для дзета-функции Римана, т. е.

$$\int\limits_0^T |(1/2+it)|^2\,dt = T\log\frac{T}{2\pi} + (2\gamma_0 - 1)T + E(T)$$

с эйлеровой постоянной γ_0. В [5] доказано, что $\mathscr{Z}_1(s)$ аналитически продолжаема в область $\sigma > -\frac{3}{4}$, за исключением полюса порядка 2 при $s = 1$ и

$$\mathscr{Z}_1(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma_0 - \log 2\pi}{s-1} - E(1) + \pi(s+1) \\ + s(s+1)(s+2)\int\limits_1^\infty G_1(x)x^{-s-3}\,dx, \quad \sigma > -\frac{3}{4}.$$

Более того, при $0 \le \sigma \le 1$, $t \ge t_0 > 0$ имеем

$$\mathscr{Z}_1(\sigma+it) \ll_\varepsilon t^{1-\sigma+\varepsilon}, \tag{41}$$

и при $T \ge 1$ будет

$$\int\limits_1^T |\mathscr{Z}_1(\sigma+it)|^2\,dt \ll_\varepsilon \begin{cases} T^{3-4\sigma+\varepsilon}, & \text{если } 0 \le \sigma \le \frac{1}{2}, \\ T^{2-2\sigma+\varepsilon}, & \text{если } \frac{1}{2} \le \sigma \le 1. \end{cases}$$

Ютила [22] получил мероморфное продолжение $\mathscr{Z}_1(s)$ на всю комплексную плоскость с двойным полюсом в $s = 1$ и по крайней мере двойным полюсом в $s = -m$, $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, он усилил (41) до

$$\mathscr{Z}_1(\sigma+it) \ll_\varepsilon \begin{cases} t^{1-\frac{4\sigma}{3}+\varepsilon}, & \text{если } 0 \le \sigma \le \frac{1}{2}, \\ t^{\frac{5}{6}-\sigma+\varepsilon}, & \text{если } \frac{1}{2} \le \sigma \le 1. \end{cases}$$

Недавно Луккаринен [23] доказала, что кроме двойного полюса в $s = 1$ функция $\mathscr{Z}_1(s)$ имеет простые полюсы порядка в точках $s = -(2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$, и не имеет других сингулярностей. Тем самым функции $\mathscr{Z}_2(s)$ и $\mathscr{Z}_1(s)$ обладают довольно разными свойствами аналитичности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Motohashi Y.* A relation between the Riemann zeta-function and the hyperbolic Laplacian // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1995. V. 22, N 4. P. 299–313.

2. *Motohashi Y.* Spectral theory of the Riemann zeta-function. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.

3. *Ivič A.* On some conjectures and results for the Riemann zeta-function and Hecke series // Acta Arith. 2001. V. 99. P. 115–145.

4. *Ivič A.* On the estimation of $Z_2(s)$ // Dubickas et al. (eds.) Anal. Probab. Methods Number Theory. Vilnius: TEV, 2002. P. 83–98.

5. *Ivič A., Jutila M., Motohashi Y.* The Mellin transform of powers of the zeta-function // Acta Arith. 2002. V. 95. P. 305–342.

6. *Jutila M.* The Mellin transform of the fourth power of Riemann's zeta-function // Proc. conf. analytic number theory with special emphasis on L-functions. Inst. Math. Sci., Chennai, India, 2004. P. 15–29.

7. *Ivič A.* On estimation of some Mellin ttransforms connected with the fourth moment of $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$ // W. Schwarz, J. Steuding (eds.). Proc. ELAZ-Conference, 2004. Stuttgart: Franz Steiner Verl., 2006. P. 77–88.

8. *Bohr H., Jessen B.* Über die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Erste Mitteilung // Acta Math. 1930. V. 54. P. 1–35.

9. *Bohr H., Jessen B.* Über die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Zweite Mitteilung // Acta Math. 1932. V. 58. P. 1–55.

10. *Joyner D.* Distribution theorems of L-functions. Harlow: Longman Scientific, 1986.

11. *Laurinčikas A.* Limit theorems for the Riemann zeta-function. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1996.

12. *Laurinčikas A. A.* The Riemann zeta-function: results and problems. III // Limit theorems. Proc. sci. sem. faculty of physics and math., Šiauliai Univ. 2000. N 3. P. 46–56.

13. *Laurinčikas A.* Probabilistic results for general Dirichlet series // Chebyshevski Sb. 2003. V. 4, N 3. P. 129–143.

14. *Laurinčikas A.* Applications of probabilistic methods in the theory of the Riemann zeta-function // IV Intern. conf. modern problems of number theory and its appl., Tula, 2001. Topical Problems. Part II. Moscow: Moscow State Univ., 2004. P. 98–116.

15. *Laurinčikas A., Garunkštis R.* The Lerch zeta-function. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002.

16. *Matsumoto K.* Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions // Sugaku Expos. 2004. V. 7, N 1. P. 51–71.

17. *Steuding J.* Value-distribution of L-functions. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007. (Lecture Notes in Math.; V. 1877).

18. *Heyer H.* Probability measures on locally compact groups. Berlin: Springer-Verl., 1977.

19. *Billingsley P.* Convergence of probability measures. New York: John Wiley and Sons, 1968.

20. *Conway J. B.* Functions of one complex variable. New York: Springer-Verl., 1973.

21. *Ivič A.* The Riemann zeta-function. New York: Wiley, 1985.

22. *Jutila M.* The Mellin transform of the square of Riemann's zeta-function // Period. Math. Hung. 2001. V. 42. P. 179–190.

23. *Lukkarinen M.* The Mellin transform of the square of Riemann's zeta-function and Atkinson's formula: Dissertation. Univ. of Turku, 2004.

Статья поступила 6 августа 2008 г.

Antanas Laurinčikas (Лауринчикас Антанас)
Department of Mathematics and Informatics
Vilnius University, Naugarduko 24 Vilnius 03225, Lithuania,
Institute of Mathematics and Informatics
Akademijos, 4, Vilnius 08663, Lithuania
`antanas.laurincikas@maf.vu.lt`