Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 517.98

ОПЕРАТОРЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА ИЗ ПРОСТРАНСТВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В ПРОСТРАНСТВО ТИПА БЛОХА НА ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

С. Стевич

Аннотация. Пусть $\mathbb{B}$ — единичный шар в $\mathbb{C}^n$ и $H(\mathbb{B})$ — пространство голоморфных функций на $\mathbb{B}$. Определим оператор интегрального типа на $H(\mathbb{B})$, полагая

$$I_\varphi^g(f)(z) = \int_0^1 \Re f(\varphi(tz))g(tz)\frac{dt}{t}, \quad z \in \mathbb{B},$$

где $g \in H(\mathbb{B})$, $g(0) = 0$ и φ — голоморфное отображение $\mathbb{B}$. Изучены ограниченность и компактность этого оператора из пространства со смешанной нормой $H(p,q,\phi)(\mathbb{B})$ в пространство типа Блоха $\mathscr{B}_\mu(\mathbb{B})$.

Ключевые слова: оператор интегрального типа, пространство со смешанной нормой, пространство типа Блоха, ограниченность, компактность.

1. Введение

Пусть $\mathbb{B} = \mathbb{B}^n$ — единичный открытый шар в $\mathbb{C}^n$, $S = \partial\mathbb{B}$ — его граница, $\mathbb{D} = \mathbb{B}^1$ — единичный открытый круг в $\mathbb{C}$, $d\sigma(\zeta)$ — нормированная поверхностная мера на S и $H(\mathbb{B})$ — класс всех аналитических функций на $\mathbb{B}$. Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$ и $w = (w_1, \dots, w_n)$ — точки в $\mathbb{C}^n$, $\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^n z_k\overline{w}_k$ и $|z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$. Для $f \in H(\mathbb{B})$ с рядом Тейлора $f(z) = \sum_{|\beta|\ge 0} a_\beta z^\beta$ пусть

$$\Re f(z) = \sum_{|\beta|\ge 0} |\beta| a_\beta z^\beta$$

— радиальная производная f, где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ — мультииндекс, $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$ и $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdots z_n^{\beta_n}$. Известно (см., например, [1]), что

$$\Re f(z) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) = \langle \nabla f(z), \bar{z}\rangle.$$

Если $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ — мультииндекс и $f \in H(\mathbb{B})$, то используем следующее обозначение:

$$\partial^\beta f(z) = \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial z_1^{\beta_1} \cdots \partial z_n^{\beta_n}}(z).$$

Через $\nabla^m f$ будем обозначать вектор-функцию из $\mathbb{C}^{n^m}$, компоненты которой состоят из всех частных производных порядка m функции f.

Положительную непрерывную функцию ϕ на $[0,1)$ называют *нормальной* [2], если существуют $\delta \in [0,1)$ и a, b, $0<a<b$, такие, что

$$\frac{\phi(r)}{(1-r)^a} \text{ убывает на } [\delta,1) \quad \text{и} \quad \lim_{r\to 1}\frac{\phi(r)}{(1-r)^a}=0;$$

$$\frac{\phi(r)}{(1-r)^b} \text{ возрастает на } [\delta,1) \quad \text{и} \quad \lim_{r\to 1}\frac{\phi(r)}{(1-r)^b}=\infty.$$

В дальнейшем, говоря о нормальности функции $\nu:\mathbb{B}\to[0,\infty)$, мы будем также предполагать, что выполнено условие $\nu(z)=\nu(|z|)$, $z\in\mathbb{B}$.

Для $0<p,q<\infty$ и нормальной ϕ пространство со смешанной нормой $H(p,q,\phi)(\mathbb{B})=H(p,q,\phi)$ состоит из всех функций $f\in H(\mathbb{B})$ таких, что

$$\|f\|_{H(p,q,\phi)}=\left(\int_0^1 M_q^p(f,r)\frac{\phi^p(r)}{1-r}dr\right)^{1/p}<\infty,$$

где

$$M_q(f,r)=\left(\int_S |f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{1/q}.$$

Для $p=q$ и $\varphi(r)=(1-r^2)^{\alpha+1}$, $\alpha>-1$, пространство со смешанной нормой эквивалентно весовому пространству Бергмана $A^p_\alpha(\mathbb{B})=A^p_\alpha$, состоящему из всех $f\in H(\mathbb{B})$ таких, что

$$\|f\|^p_{A^p_\alpha}=\int_{\mathbb{B}}|f(z)|^p dV_\alpha(z)<\infty,$$

где $dV_\alpha(z)=(1-|z|^2)^\alpha dV(z)$ и $dV(z)$ — объемная лебегова мера.

Класс всех $f\in H(\mathbb{B})$ таких, что

$$B_\mu(f)=\sup_{z\in\mathbb{B}}\mu(z)|\operatorname{Re} f(z)|<\infty,$$

где μ нормальна на $[0,1)$, называют *пространством типа Блоха* и обозначают через $\mathscr{B}_\mu(\mathbb{B})=\mathscr{B}_\mu$. Этот класс с нормой

$$\|f\|_{\mathscr{B}_\mu}=|f(0)|+B_\mu(f)$$

является банаховым пространством.

Если взять $\mu(z)=(1-|z|^2)^\alpha$, $\alpha\in(0,\infty)$, то получается α-пространство Блоха $\mathscr{B}^\alpha$, которое при $\alpha=1$ становится пространством Блоха (см., например, [3–6] и библиографию в них).

Подпространство в $\mathscr{B}_\mu$, состоящее из всех f таких, что

$$\lim_{|z|\to 1}\mu(z)|\operatorname{Re} f(z)|=0,$$

называют *малым пространством типа Блоха* и обозначают через $\mathscr{B}_{\mu,0}$.

Опираясь на тот факт, что операторы композиции и взвешенные операторы композиции естественно возникают из изометрий некоторых функциональных пространств (см. [7]), в [8] Ли и автор ввели в рассмотрение *обобщенные операторы композиции* на пространстве $H(\mathbb{D})$ следующим образом:

$$C_\varphi^g(f)(z) = \int\limits_0^z f'(\varphi(\zeta))g(\zeta)d\zeta, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1}$$

и изучили их ограниченность и компактность на α-пространствах Блоха и пространствах Зигмунда на единичном круге. Напомним, что взвешенные операторы композиции, индуцированные функциями $u \in H(\mathbb{B})$ и φ (непостоянным аналитическим отображением $\mathbb{B}$ в себя) определены так: $uC_\varphi f(z) = u(z)f(\varphi(z))$. Некоторые результаты в этой области, особенно относящиеся к единичному кругу или единичному полидиску, могут быть найдены, например, в [9–21] (см. также библиографию в них).

Пусть $g \in H(\mathbb{B})$ удовлетворяет условию $g(0) = 0$ и φ — голоморфное отображение $\mathbb{B}$ в себя. Тогда на $H(\mathbb{B})$ можно определить следующий оператор, тесно связанный с оператором (1):

$$I_\varphi^g(f)(z) = \int\limits_0^1 \operatorname{Re} f(\varphi(tz))g(tz)\frac{dt}{t}, \quad z \in \mathbb{B}. \tag{2}$$

Оператор (2) связан также с другими операторами на единичном шаре (такими, как операторы T_g и L_g, определенные в [22, 23]), а также с оператором T_g на полидиске (см. [24, 25]). Некоторые характеристики ограниченности и компактности этих и других операторов интегрального типа в $\mathbb{C}^n$ можно найти, например, в [4, 23, 24, 26–38].

В данной работе будут даны необходимые и достаточные условия ограниченности и компактности оператора (2) из пространства со смешанной нормой $H(p, q, \phi)$ в пространство типа Блоха или в малое пространство типа Блоха.

Всюду ниже константы обозначаются через C, они положительны и, возможно, различны в разных ситуациях. Обозначение $a \preceq b$ используется в том случае, если существует положительная постоянная C такая, что $a \le Cb$. Будем писать $a \asymp b$, если одновременно $a \preceq b$ и $b \preceq a$.

2. Вспомогательные результаты

В этом разделе содержатся пять вспомогательных результатов, используемых в доказательствах основных результатов в разд. 3.

Лемма 1. *Пусть μ и ϕ нормальны, $g \in H(\mathbb{B})$, $g(0) = 0$, и φ — аналитическое отображение $\mathbb{B}$ в себя. Оператор $I_\varphi^g : H(p, q, \phi) \to \mathscr{B}_\mu$ компактен тогда и только тогда, когда он ограничен и для любой ограниченной последовательности $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $H(p, q, \phi)$, сходящейся к нулю равномерно на компактах из $\mathbb{B}$ при $k \to \infty$, имеет место сходимость $\left\|I_\varphi^g f_k\right\|_{\mathscr{B}_\mu} \to 0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство леммы 1 аналогично, например, доказательствам предложения 3.11 в [10], леммы 3 в [23], леммы 3 в [24] и леммы 3 в [36], поэтому мы его опустим.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 1 из [39], и мы также опустим ее доказательство.

Лемма 2. *Пусть μ нормальна. Замкнутое множество K в $\mathscr{B}_{\mu,0}$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и удовлетворяет условию*

$$\lim_{|z|\to 1}\sup_{f\in K}\mu(z)|\operatorname{Re} f(z)| = 0.$$

Доказательство следующей леммы проводится в духе доказательств леммы 1 в [22] и леммы 1 в [23].

Лемма 3. *Допустим, что $f, g \in H(\mathbb{B})$ и $g(0) = 0$. Тогда*

$$\operatorname{Re} I_\varphi^g(f)(z) = \operatorname{Re} f(\varphi(z))g(z).$$

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{\alpha\neq 0} a_\alpha z^\alpha$ — разложение в ряд Тейлора голоморфной функции $\operatorname{Re} f(\varphi(z))g(z)$. Тогда

$$\operatorname{Re}\big[I_\varphi^g(f)\big](z) = \operatorname{Re}\int\limits_0^1 \sum_{\alpha\neq 0} a_\alpha (tz)^\alpha \frac{dt}{t} = \operatorname{Re}\biggl(\sum_{\alpha\neq 0}\frac{a_\alpha}{|\alpha|}z^\alpha\biggr) = \sum_{\alpha\neq 0} a_\alpha z^\alpha,$$

что и требовалось доказать. □

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 4. *Пусть $a_j \geq 0$, $j = 1,\dots,n$, где $n \in \mathbb{N}$ фиксировано. Тогда для $p \in (0, 1]$*

$$\frac{1}{n^{1-p}}\biggl(\sum_{j=1}^n a_j^p\biggr) \leq \biggl(\sum_{j=1}^n a_j\biggr)^p \leq \sum_{j=1}^n a_j^p$$

и для $p \geq 1$

$$\sum_{j=1}^n a_j^p \leq \biggl(\sum_{j=1}^n a_j\biggr)^p \leq n^{p-1}\biggl(\sum_{j=1}^n a_j^p\biggr).$$

Лемма 5. *Пусть $0 < p, q < \infty$ и ϕ нормальна. Тогда найдется положительная константа C, не зависящая от f, такая, что*

$$|\nabla^m f(z)| \leq C\frac{\|f\|_{H(p,q,\phi)}}{\phi(|z|)(1-|z|^2)^{\frac{n}{q}+m}}, \quad z \in \mathbb{B}. \tag{3}$$

Доказательство. Сначала заметим, что по лемме 4 имеем

$$\begin{aligned} M_q^p(|\nabla^m f|, r) &= \biggl(\int\limits_S \Bigl(\sum_{|\alpha|=m}|\partial^\alpha f(r\zeta)|^2\Bigr)^{q/2} d\sigma(\zeta)\biggr)^{p/q} \\ &\geq C\biggl(\int\limits_S \sum_{|\alpha|=m}|\partial^\alpha f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\biggr)^{p/q} \geq C\sum_{|\alpha|=m} M_q^p(\partial^\alpha f, r). \end{aligned} \tag{4}$$

Слегка модифицируя доказательство теоремы 3(a) в [25] (см. также [30]), можно доказать, что

$$\sum_{j=0}^{m-1}|\nabla^j f(0)|^p + \int\limits_0^1 M_q^p(|\nabla^m f|, r)(1-r)^{mp}\frac{\phi^p(r)}{1-r}\,dr \preceq \|f\|_{H(p,q,\phi)}^p. \tag{5}$$

Из (4) и (5), используя монотонность интегральных средних, теорему 7.2.5 в [1] и вытекающее из нормальности ϕ свойство

$$\phi(z) \asymp \phi(w) \quad \text{или} \quad w \in B(z, \varepsilon(1-|z|)),$$

где $\varepsilon \in (0,1)$ фиксировано, имеем

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{H(p,q,\phi)} &\geq \int\limits_{(1+|z|)/2}^{(3+|z|)/4} M_q^p(|\nabla^m f|, r)(1-r)^{mp}\frac{\phi^p(r)}{1-r}\,dr \\
&\geq C\sum_{|\alpha|=m}\int\limits_{(1+|z|)/2}^{(3+|z|)/4} M_q^p(\partial^\alpha f, r)(1-r)^{mp}\frac{\phi^p(r)}{1-r}\,dr \\
&\geq C\sum_{|\alpha|=m} M_q^p(\partial^\alpha f, (1+|z|)/2)\phi^p(|z|)(1-|z|)^{mp} \\
&\geq C\sum_{|\alpha|=m} (1-|z|^2)^{\frac{pn}{q}}|\partial^\alpha f(z)|^p\phi^p(|z|)(1-|z|)^{mp} \\
&\geq C\phi^p(|z|)(1-|z|^2)^{\frac{pn}{q}+mp}|\nabla^m f(z)|^p,
\end{aligned}$$

откуда и следует результат леммы. □

3. Основные результаты

В этом разделе сформулируем и докажем основные результаты работы, относящиеся к ограниченности и компактности операторов $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$ (или $\mathscr{B}_{\mu,0}$).

Теорема 1. *Пусть $0 < p, q < \infty$, $g \in H(\mathbb{B})$, $g(0) = 0$, ϕ и μ нормальны и φ — аналитическое отображение $\mathbb{B}$ в себя. Тогда оператор $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$ ограничен в том и только в том случае, если*

$$\sup_{z\in\mathbb{B}} \frac{\mu(z)|g(z)||\varphi(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{\frac{n}{q}+1}} < \infty. \tag{6}$$

Доказательство. Допустим, что (6) выполнено. Используя лемму 3 и неравенство (3) с $m = 1$, получаем

$$\begin{aligned}
\mu(z)\big|\mathrm{Re}\big(I_\varphi^g f\big)(z)\big| = \mu(z)|\operatorname{Re} f(\varphi(z))||g(z)| &\leq \mu(z)|\nabla f(\varphi(z))||g(z)||\varphi(z)| \\
&\leq C\|f\|_{H(p,q,\phi)}\frac{\mu(z)|g(z)||\varphi(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{\frac{n}{q}+1}}
\end{aligned} \tag{7}$$

для любых $z \in \mathbb{B}$ и $f \in H(p,q,\phi)$.

Используя условия (6), (7) и тот факт, что $I_\varphi^g f(0) = 0$, выводим ограниченность $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$.

Пусть теперь $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$ ограничен. Используя функции

$$f_l(z) = z_l \in H(p,q,\phi), \quad l \in \{1,\dots,n\}, \tag{8}$$

получаем, что $I_\varphi^g f_l \in \mathscr{B}_\mu$ для $l \in \{1,\dots,n\}$, т. е.

$$\big\|I_\varphi^g f_l\big\|_{\mathscr{B}_\mu} = \sup_{z\in\mathbb{B}} \mu(z)|g(z)||\varphi_l(z)| < \infty$$

для каждого $l \in \{1,\dots,n\}$, следовательно,

$$\sup_{z\in\mathbb{B}} \mu(z)|g(z)||\varphi(z)| \le \sum_{l=1}^{n} \sup_{z\in\mathbb{B}} \mu(z)|g(z)||\varphi_l(z)| < \infty. \tag{9}$$

Положим

$$f_w(z) = \frac{(1-|w|^2)^\beta}{\phi(w)(1-\langle z,w\rangle)^{\frac{n}{q}+\beta}}, \quad z \in \mathbb{B}, \tag{10}$$

где $w \in \mathbb{B}$ и $\beta > b$. По лемме 2 из [30] имеем $\sup\limits_{w\in\mathbb{B}} \|f_w\|_{H(p,q,\phi)} \le C$. Отсюда, из ограниченности $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$, $I_\varphi^g f_w(0) = 0$, и леммы 3 получаем

$$\begin{aligned} C\big\|I_\varphi^g\big\|_{H(p,q,\varphi)\to\mathscr{B}_\mu} &\ge \big\|I_\varphi^g f_{\varphi(w)}\big\|_{\mathscr{B}_\mu} = \sup_{z\in\mathbb{B}} \mu(z)|g(z)||\operatorname{Re} f_{\varphi(w)}(\varphi(z))| \\ &\ge \mu(w)|g(w)||\operatorname{Re} f_{\varphi(w)}(\varphi(w))| = \frac{C\mu(w)|g(w)||\varphi(w)|^2}{\phi(|\varphi(w)|)(1-|\varphi(w)|^2)^{\frac{n}{q}+1}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Из (11) выводим, что

$$\sup_{|\varphi(w)|\ge 1/2} \frac{\mu(w)|g(w)||\varphi(w)|}{\phi(|\varphi(w)|)(1-|\varphi(w)|^2)^{\frac{n}{q}+1}} \le \sup_{|\varphi(w)|\ge 1/2} \frac{2\mu(w)|g(w)||\varphi(w)|^2}{\phi(|\varphi(w)|)(1-|\varphi(w)|^2)^{\frac{n}{q}+1}} < \infty. \tag{12}$$

С другой стороны, если $|\varphi(w)| \le 1/2$, используя нормальность ϕ и соотношение (9), приходим к тому, что

$$\frac{\mu(w)|g(w)||\varphi(w)|}{\phi(|\varphi(w)|)(1-|\varphi(w)|^2)^{\frac{n}{q}+1}} \le C \sup_{w\in\mathbb{B}} \mu(w)|g(w)||\varphi(w)| < \infty. \tag{13}$$

Из (12) и (13) вытекает условие (6), что и требовалось. $\square$

Теорема 2. *Пусть $0 < p, q < \infty$, $g \in H(\mathbb{B})$, $g(0) = 0$, ϕ и μ нормальны и φ — аналитическое отображение $\mathbb{B}$ в себя. Тогда оператор $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$ компактен в том и только в том случае, если он ограничен и*

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{\mu(z)|g(z)||\varphi(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{\frac{n}{q}+1}} = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Сначала допустим, что $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$ компактен. Тогда, очевидно, $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$ ограничен.

Пусть $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность в $\mathbb{B}$ такая, что $|\varphi(z_k)| \to 1$ при $k \to \infty$ (если такой последовательности нет, то условие (14), очевидно, выполнено). Положим

$$\hat{f}_k(z) = f_{\varphi(z_k)}(z), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

где f_w определен в (10).

Из доказательства теоремы 1 известно, что $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|\hat{f}_k\|_{H(p,q,\phi)} \le C$. Легко видеть, что $\hat{f}_k$ сходится к нулю равномерно на компактах в $\mathbb{B}$ при $k \to \infty$.

Из леммы 1 вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \big\|I_\varphi^g \hat{f}_k\big\|_{\mathscr{B}_\mu} = 0. \tag{16}$$

Имеем

$$\left\|I_\varphi^g \hat{f}_k\right\|_{\mathscr{B}_\mu} = \sup_{z\in\mathbb{B}} \mu(z)\left|\mathrm{Re}\left(I_\varphi^g \hat{f}_k\right)(z)\right| \geq \mu(z_k)|g(z_k)||\,\mathrm{Re}\,\hat{f}_k(\varphi(z_k))|$$

$$= \frac{C\mu(z_k)|g(z_k)||\varphi(z_k)|^2}{\phi(|\varphi(z_k)|)(1-|\varphi(z_k)|^2)^{\frac{n}{q}+1}}. \quad (17)$$

Из (16), (17) и сходимости $|\varphi(z_k)| \to 1$ при $k \to \infty$ приходим к тому, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu(z_k)|g(z_k)||\varphi(z_k)|}{\phi(|\varphi(z_k)|)(1-|\varphi(z_k)|^2)^{\frac{n}{q}+1}} = 0,$$

откуда вытекает (14).

Пусть теперь $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$ ограничен и выполнено условие (14). Предположим, что $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность в $H(p,q,\phi)$ такая, что $f_k \to 0$ равномерно на компактах в $\mathbb{B}$ при $k \to \infty$. Пусть

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_{H(p,q,\phi)} =: M.$$

Из условия (14) вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0,1)$ такое, что

$$\frac{\mu(z)|g(z)||\varphi(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{\frac{n}{q}+1}} < \frac{\varepsilon}{M}, \quad (18)$$

как только $\delta < |\varphi(z)| < 1$.

Используя леммы 3, 5 и неравенства (9), (18), получаем

$$\left\|I_\varphi^g f_k\right\|_{\mathscr{B}_\mu} = \sup_{z\in\mathbb{B}} \mu(z)|g(z)\,\mathrm{Re}\, f_k(\varphi(z))|$$

$$\leq \sup_{\{z\in\mathbb{B}:\, |\varphi(z)|\leq\delta\}} \mu(z)|g(z)||\,\mathrm{Re}\, f_k(\varphi(z))| + \sup_{\{z\in\mathbb{B}:\delta<|\varphi(z)|<1\}} \mu(z)|g(z)||\,\mathrm{Re}\, f_k(\varphi(z))|$$

$$\leq M_g \sup_{|w|\leq\delta} |\nabla f_k(w)| + C\|f_k\|_{H(p,q,\phi)} \sup_{\{z\in\mathbb{B}:\delta<|\varphi(z)|<1\}} \frac{\mu(z)|g(z)||\varphi(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{\frac{n}{q}+1}}$$

$$\leq M_g \sup_{|w|\leq\delta} |\nabla f_k(w)| + C\varepsilon, \quad (19)$$

где $M_g = \sup_{z\in\mathbb{B}} \mu(z)|g(z)||\varphi(z)|$ (отметим, что M_g конечна ввиду ограниченности оператора $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$).

Из сходимости к нулю на компактах в $\mathbb{B}$ последовательности $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и неравенства Коши вытекает, что последовательность $(|\nabla f_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ также сходится к нулю на компактах в $\mathbb{B}$ при $k \to \infty$, в частности, $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{|w|\leq\delta} |\nabla f_k(w)| = 0$. Полагая $k \to \infty$ в (19) и используя этот факт, получаем

$$\limsup_{k\to\infty} \left\|I_\varphi^g f_k\right\|_{\mathscr{B}_\mu} \leq C\varepsilon$$

для любого положительного ε, откуда вытекает, что последний предел равен нулю. Учитывая лемму 1, приходим к требуемому. $\square$

Теорема 3. *Пусть $0 < p, q < \infty$, $g \in H(\mathbb{B})$, $g(0) = 0$, ϕ и μ нормальны и φ — аналитическое отображение $\mathbb{B}$ в себя. Оператор $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_{\mu,0}$ ограничен в том и только в том случае, если $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$ ограничен и*

$$\lim_{|z|\to 1} \mu(z)|g(z)||\varphi(z)| = 0. \quad (20)$$

Доказательство. Сначала допустим, что $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_{\mu,0}$ ограничен. Тогда ясно, что $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$ ограничен.

Используя пробные функции (8), получим $I_\varphi^g f_l \in \mathscr{B}_{\mu,0}$, $l \in \{1,\dots,n\}$, т. е.

$$I_\varphi^g f_l(z) = \mu(z)|g(z)||\varphi_l(z)| \to 0 \quad \text{при } |z| \to 1$$

для каждого $l \in \{1,\dots,n\}$ и тем самым

$$\lim_{|z|\to 1} \mu(z)|g(z)||\varphi(z)| = 0.$$

Следовательно, условие (20) выполнено.

Обратно, пусть $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$ ограничен и условие (20) выполнено. Тогда для каждого полинома p имеем

$$\mu(z)\bigl|\operatorname{Re} I_\varphi^g p(z)\bigr| \le \mu(z)|g(z)||\operatorname{Re} p(\varphi(z))| \le \mu(z)|g(z)||\varphi(z)|\|\nabla p\|_\infty \to 0$$

при $|z| \to 1$. Отсюда $I_\varphi^g p \in \mathscr{B}_{\mu,0}$. Используя плотность множества полиномов в $H(p,q,\phi)$, получаем, что для каждой $f \in H(p,q,\phi)$ найдется последовательность полиномов $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$\|f - p_k\|_{H(p,q,\phi)} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Это обстоятельство и ограниченность оператора $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_\mu$ влекут сходимость

$$\bigl\|I_\varphi^g f - I_\varphi^g p_k\bigr\|_{\mathscr{B}_\mu} \le \bigl\|I_\varphi^g\bigr\|_{H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}_\mu} \|f - p_k\|_{H(p,q,\phi)} \to 0$$

при $k \to \infty$. Отсюда $I_\varphi^g(H(p,q,\phi)) \subseteq \mathscr{B}_{\mu,0}$. Так как $\mathscr{B}_{\mu,0}$ — замкнутое подмножество $\mathscr{B}_\mu$, ограниченность $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_{\mu,0}$ получена. $\square$

Теорема 4. *Пусть $0 < p, q < \infty$, $g \in H(\mathbb{B})$, $g(0) = 0$, ϕ и μ нормальны и φ — аналитическое отображение $\mathbb{B}$ в себя. Тогда оператор $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_{\mu,0}$ компактен в том и только в том случае, если*

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{\mu(z)|g(z)||\varphi(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1 - |\varphi(z)|^2)^{\frac{n}{q}+1}} = 0. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть (21) выполнено. Тогда из лемм 3 и 5 вытекает, что

$$\mu(z)\bigl|\operatorname{Re}\bigl(I_\varphi^g f\bigr)(z)\bigr| \le C\|f\|_{H(p,q,\phi)} \frac{\mu(z)|g(z)||\varphi(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1 - |\varphi(z)|^2)^{\frac{n}{q}+1}}. \tag{22}$$

Переходя в (22) к точной верхней границе по множеству $\|f\|_{H(p,q,\phi)} \le 1$, затем полагая $|z| \to 1$ и используя (21), получим

$$\lim_{|z|\to 1} \sup_{\|f\|_{H(p,q,\phi)} \le 1} \mu(z)\bigl|\operatorname{Re}\bigl(I_\varphi^g f\bigr)(z)\bigr| = 0. \tag{23}$$

Из (23) с помощью леммы 2 вытекает компактность оператора $I_\varphi^g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_{\mu,0}$.

Предположим теперь, что условие (21) не выполнено. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{B}$ такие, что $\lim_{k\to\infty} |z_k| = 1$ и

$$\frac{\mu(z_k)|g(z_k)||\varphi(z_k)|}{\phi(|\varphi(z_k)|)(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{\frac{n}{q}+1}} \ge \varepsilon_0 > 0 \tag{24}$$

для достаточно большого k.

Предположим сначала, что $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}|\varphi(z_k)| < 1$. Тогда по теореме 3 равенство (20) выполнено и тем самым $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(z_k)|g(z_k)||\varphi(z_k)| = 0$. Используя этот факт, (24) и нормальность ϕ, приходим к противоречию.

Пусть теперь $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}|\varphi(z_k)| = 1$. Тогда найдется подпоследовательность последовательности $(\varphi(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ (которую мы будем обозначать снова через $(\varphi(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$) такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}|\varphi(z_k)| = 1$. Пусть $(\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ определена, как в (15), где $\beta > b$. Известно, что $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\|\hat{f}_k\|_{H(p,q,\varphi)} \le C$. С другой стороны, ввиду предположения $\beta > b$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(1-|\varphi(z_k)|^2)^\beta}{\phi(|\varphi(z_k)|)} = 0,$$

откуда вытекает, что $\hat{f}_k$ сходится к 0 равномерно на компактах в $\mathbb{B}$ при $k\to\infty$.

Отсюда

$$\lim_{k\to\infty}\left\|I_\varphi^g\hat{f}_k\right\|_{\mathscr{B}_\mu} = 0. \tag{25}$$

С другой стороны, из (17) и (24) имеем

$$\left\|I_\varphi^g\hat{f}_k\right\|_{\mathscr{B}_\mu} \ge \frac{C\mu(z_k)|g(z_k)||\varphi(z_k)|^2}{\phi(|\varphi(z_k)|)(1-|\varphi(z_k)|^2)^{\frac{n}{q}+1}} \ge \frac{1}{2}C\varepsilon_0 > 0$$

для достаточно большого k, что противоречит (25), и это завершает доказательство теоремы. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rudin W.* Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. New York: Springer-Verl., 1980.
2. *Shields A. L., Williams D. L.* Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 162. P. 287–302.
3. *Li S.* Derivative free characterizations of Bloch spaces // J. Comput. Anal. Appl. 2008. V. 10, N 2. P. 253–258.
4. *Stević S.* On an integral operator on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ // J. Inequal. Appl. 2005. V. 1. P. 81–88.
5. *Stević S.* On α-Bloch spaces with Hadamard gaps // Abstr. Appl. Anal. V. 2007. Article ID 39176. 7 pp.
6. *Yamashita S.* Gap series and α-Bloch functions // Yokohama Math. J. 1980. V. 28. P. 31–36.
7. *Hornor W., Jamison J. E.* Isometries of some Banach spaces of analytic functions // Integral Equations Operator Theory. 2001. V. 41. P. 401–425.
8. *Li S., Stević S.* Generalized composition operators on Zygmund spaces and Bloch type spaces // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 338, N 2. P. 1281–1295.
9. *Clahane D., Stević S.* Norm equivalence and composition operators between Bloch/Lipschitz spaces of the unit ball // J. Inequal. Appl. 2006. V. 2006. Article ID 61018. 11 pp.
10. *Cowen C., MacCluer B.* Composition operators on spaces of analytic functions. Boca Raton: CRC Press, 1995. (Stud. Adv. Math.).
11. *Li S., Stević S.* Composition followed by differentiation between Bloch type spaces // J. Comput. Anal. Appl. 2007. V. 9, N 2. P. 195–206.
12. *Li S., Stević S.* Weighted composition operators from Bergman-type spaces into Bloch spaces // Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci. 2007. V. 117, N 3. P. 371–385.
13. *Li S., Stević S.* Weighted composition operators from α-Bloch space to H^∞ on the polydisk // Numer. Funct. Anal. Optimization. 2007. V. 28, N 7. P. 911–925.
14. *Li S., Stević S.* Weighted composition operators from H^∞ to the Bloch space on the polydisc // Abstr. Appl. Anal. V. 2007, Article ID 48478. 12 pp.
15. *Li S., Stević S.* Weighted composition operators between H^∞ and α-Bloch spaces in the unit ball // Taiwanese J. Math. 2008. V. 12, N 7. P. 1625–1639.

16. *Ohno S.* Weighted composition operators between H^∞ and the Bloch space // Taiwanese J. Math. 2001. V. 5. P. 555–563.
17. *Shi J. H., Luo L.* Composition operators on the Bloch space // Acta Math. Sinica. 2000. V. 16. P. 85–98.
18. *Stević S.* Composition operators between H^∞ and the α-Bloch spaces on the polydisc // Z. Anal. Anwend. 2006. Bd 25, Heft 4. S. 457–466.
19. *Stević S.* Weighted composition operators between mixed norm spaces and H_α^∞ spaces in the unit ball // J. Inequal. Appl. V. 2007. Article ID 28629. 9 pp.
20. *Stević S.* Norm of weighted composition operators from Bloch space to H_μ^∞ on the unit ball // Ars. Combin. 2008. V. 88. P. 125–127.
21. *Ueki S. I., Luo L.* Compact weighted composition operators and multiplication operators between Hardy spaces // Abstr. Appl. Anal. V. 2008. Article ID 196498. 11 pp.
22. *Hu Z.* Extended Cesàro operators on the Bloch space in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // Acta Math. Sci., Ser. B. Engl. Ed. 2003. V. 23, N 4. P. 561–566.
23. *Li S., Stević S.* Riemann–Stieltjes type integral operators on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ // Complex Variables Elliptic Equations. 2007. V. 52, N 6. P. 495–517.
24. *Stević S.* Boundedness and compactness of an integral operator on a weighted space on the polydisc // Indian J. Pure Appl. Math. 2006. V. 37, N 6. P. 343–355.
25. *Stević S.* Weighted integrals of holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$, // Complex Variables. 2002. V. 47, N 9. P. 821–838.
26. *Chang D. C., Li S., Stević S.* On some integral operators on the unit polydisk and the unit ball // Taiwanese J. Math. 2007. V. 11, N 5. P. 1251–1286.
27. *Chang D. C., Stević S.* Estimates of an integral operator on function spaces // Taiwanese J. Math. 2003. V. 7, N 3. P. 423–432.
28. *Chang D. C., Stević S.* The generalized Cesàro operator on the unit polydisk // Taiwanese J. Math. 2003. V. 7, N 2. P. 293–308.
29. *Chang D. C., Stević S.* Addendum to the paper "A note on weighted Bergman spaces and the Cesàro operator" // Nagoya Math. J. 2005. V. 180. P. 77–90.
30. *Hu Z.* Extended Cesàro operators on mixed norm spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 131, N 7. P. 2171–2179.
31. *Li S., Stević S.* Integral type operators from mixed-norm spaces to α-Bloch spaces // Integral Transforms Spec. Funct. 2007. V. 18, N 7. P. 485–493.
32. *Li S., Stević S.* Weighted composition operators from Bergman-type spaces into Bloch spaces // Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci. 2007. V. 117, N 3. P. 371–385.
33. *Li S., Stević S.* Compactness of Riemann–Stieltjes operators between $F(p,q,s)$ and α-Bloch spaces // Publ. Math. Debrecen. 2008. V. 72, N 1–2. P. 111–128.
34. *Li S., Stević S.* Riemann–Stieltjes operators between mixed norm spaces // Indian J. Math. 2008. V. 50, N 1. P. 177–188.
35. *Li S., Stević S.* Riemann–Stieltjes operators between different weighted Bergman spaces // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2008. V. 15, N 4. P. 677–686.
36. *Стевич С.* Ограниченность и компактность интегрального оператора на пространстве со смешанной нормой на поликруге // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 694–706.
37. *Tang X. M.* Extended Cesàro operators between Bloch-type spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 326, N 2. P. 1199–1211.
38. *Xiao J.* Riemann–Stieltjes operators on weighted Bloch and Bergman spaces of the unit ball // J. London Math. Soc. 2004. V. 70, N 2. P. 199–214.
39. *Madigan K., Matheson A.* Compact composition operators on the Bloch space // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. V. 347, N 7. P. 2679–2687.

Статья поступила 8 апреля 2008 г.

Stevo Stević (Стевич Стево)
Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences,
Knez Mihailova 36/III, 11000 Beograd, Serbia
sstevic@ptt.rs