Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 517.55

ДИАГОНАЛИ РЯДОВ ЛОРАНА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Д. Ю. Почекутов

Аннотация. Рассматривается проблема алгебраичности диагональных рядов для разложений Лорана рациональных функций, геометрически идентифицируемых с помощью амебы знаменателя, либо с помощью целочисленной точки из многогранника Ньютона знаменателя. Даются достаточные условия алгебраичности диагоналей на основе теории многомерных вычетов и топологических свойств дополнений наборов комплексных гиперповерхностей на комплексно аналитических многообразиях.

Ключевые слова: диагонали рядов Лорана, амеба гиперповерхности, разделяющий цикл, локальный вычет, интегральные представления, алгебраическая функция.

1. Введение

Диагональные ряды (диагонали) степенных рядов от многих переменных естественно возникают в проблемах алгебраичности и D-финитности сумм степенных рядов [1, гл. 2].

Диагональю степенного ряда (ряда Лорана)

$$F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$$

назовем производящую функцию подпоследовательности коэффициентов $\{c_\alpha\}_{\alpha \in L}$, пронумерованной некоторой подрешеткой $L \subset \mathbb{Z}^n$. Такие диагонали будем называть *полными*. Диагонали различают по размерности (рангу) указанной подрешетки. Наибольший интерес представляют два предельных случая: ранга 1 и ранга $n-1$. Эти два случая и рассматриваются в данной статье для рядов Лорана рациональных функций. В случае ранга 1 полная диагональ естественно разбивается в сумму односторонних диагоналей: подрядов по положительным и отрицательным степеням. Аналогично в произвольном случае можно рассматривать аналог односторонней диагонали как производящую функцию подпоследовательности, пронумерованной некоторой полуподрешеткой $L' \subset L$.

Ранее были изучены лишь диагонали степенных рядов по положительным степеням (т. е. рядов Тейлора):

$$F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha z^\alpha.$$

Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ 2427.2008.01), а также грантов Сибирского федерального университета и Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (2.1.1/4620).

В этом случае известно (см. [2, 3], а также расширенную библиографию в [1]), что любая диагональ рациональной функции над конечным полем всегда является алгебраической функцией. Диагонали двумерного ряда Тейлора комплексной рациональной функции также являются алгебраическими функциями [2]. В [4] показано, что диагональ D-финитного степенного ряда является D-финитной. Напомним, что ряд F называется *D-финитным*, если все производные F порождают конечномерное векторное пространство над полем рациональных функций.

Для исследования диагоналей лорановских рядов рациональных функций в настоящей статье используется геометрический способ идентификации этих рядов с помощью амебы полярной гиперповерхности исходной рациональной функции либо с помощью целочисленной точки из многогранника Ньютона ее знаменателя (подробнее см. п. 2). В п. 3 доказано, что полная диагональ рациональной функции двух переменных всегда является алгебраической. В то же время односторонняя диагональ может быть трансцендентной. В п. 4 доказано, что полная $(n-1)$-мерная диагональ является алгебраической функцией.

2. Одномерные диагонали и их интегральные представления

Пусть дана рациональная функция n переменных

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_1,\dots,z_n)}{Q(z_1,\dots,z_n)},$$

где P и Q — несократимые полиномы. Рассмотрим произвольный ряд Лорана для F с центром в нуле:

$$F(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_{\alpha_1\dots\alpha_n} {z_1}^{\alpha_1}\cdots {z_n}^{\alpha_n}. \tag{1}$$

В $\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ зафиксируем направление q, которое определяет две диагональные подпоследовательности $\{c_{l\cdot q}\}_{l\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{c_{l\cdot q}\}_{l\in\mathbb{Z}_-}$ кратной последовательности $\{c_\alpha\}$ (для определенности полагаем, что $\mathbb{Z}_+$ — это множество неотрицательных целых чисел, а $\mathbb{Z}_-$ — множество отрицательных целых чисел).

Производящие функции

$$d_q^\pm(t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}_\pm} c_{l\cdot q} t^l \tag{2}$$

указанных подпоследовательностей назовем *односторонними q-диагоналями ряда* (1). Соответственно сумму $d_q^+ + d_q^-$ назовем *полной q-диагональю.*

Замечание. Фактически достаточно изучать лишь диагонали для направления $q_0 = (1,\dots,1)$. В самом деле, унимодулярным преобразованием $\beta = A\alpha$ решетки $\mathbb{Z}^n$ любой несократимый вектор $q\in\mathbb{Z}^n$ можно перевести в q_0. Соответственно биномиальная замена переменных $w = z^A$ сохранит свойство рациональности функции $F(z)$.

В случае, когда F голоморфна в начале координат (т. е. $Q(0)\neq 0$), один из рядов Лорана функции $F(z)$ — это ее ряд Тейлора с центром в нуле и для каждого $q\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}$ полная диагональ $d_q(t)$ совпадает с односторонней $d_q^+(t)$. Согласно [5] для q-диагонали ряда Тейлора справедливо интегральное представление

$$d_q(t) = \frac{1}{(2\pi\imath)^n}\int\limits_{\Gamma_\rho} F(z)\frac{z^q}{z^q - t}\frac{dz_1}{z_1}\cdots\frac{dz_n}{z_n}, \tag{3}$$

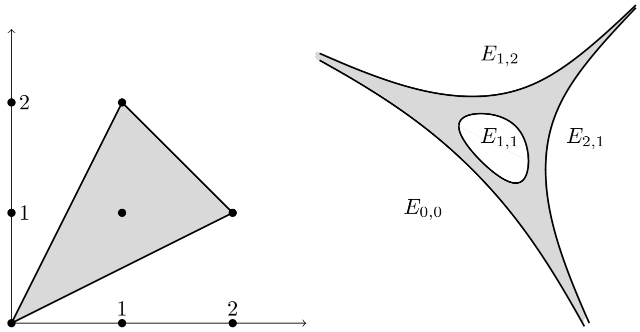

Рис. 1. Многогранник Ньютона (слева), амеба и компоненты дополнения E_ν (справа) для многочлена $Q = z_1^2 z_2 - 4z_1z_2 + z_1z_2^2 + 1$.

где z^q — моном $z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n}$, цикл

$$\Gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| = \rho_1, \dots, |z_n| = \rho_n\}$$

выбирается так, что

а) в замкнутом поликруге

$$\overline{U}_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| \le \rho_1, \dots, |z_n| \le \rho_n\}$$

нет полюсов функции $F(z)$;

б) $\rho^q > |t|$.

Чтобы получить интегральное представление для диагональных рядов произвольных рядов Лорана (1), отметим, что области сходимости последних логарифмически выпуклые (доказывается так же, как для рядов Тейлора, см., например, [6, п. 3]). Эти области сходимости представляют собой в логарифмической шкале связные компоненты дополнения так называемой амебы гиперповерхности полюсов.

Определение [7, п. 6.1]. *Амебой $\mathscr{A}_V$ алгебраической гиперповерхности*

$$V = \{z \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n : Q(z) = 0\}$$

(или *полинома* Q) называется образ V при отображении $\mathrm{Log} : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{R}^n$, определенном формулой

$$\mathrm{Log} : (z_1, \dots, z_n) \to (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|).$$

Термин «амеба» мотивирован специфичным видом $\mathscr{A}_V$ в случае $n = 2$ — это фигура с тонкими щупальцами, уходящими на бесконечность (рис. 1).

Обозначим, через $N(Q)$ многогранник Ньютона полинома Q, т. е. выпуклую оболочку в $\mathbb{R}^n$ всех показателей мономов, участвующих в полиноме Q. Известно [8], что на множестве связных компонент $\{E\}$ дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathscr{A}_V$ существует инъективная функция порядка

$$\nu : \{E\} \to \mathbb{Z}^n \cap N(Q)$$

такая, что двойственный конус $C^\vee_{\nu(E)}$ к многограннику Ньютона в точке $\nu(E)$ есть конус рецессии компоненты E (напомним, что конус рецессии выпуклого множества E — это наибольший конус, который некоторым сдвигом можно поместить в E). Таким образом, дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \mathscr{A}_V$ состоит из конечного числа связных выпуклых компонент, которые можно перечислять (кодировать) в

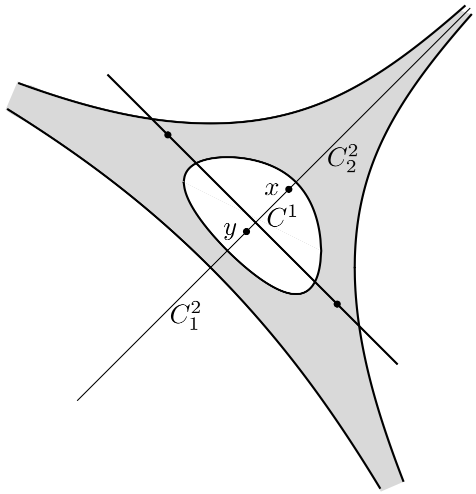

Рис. 2. Амебы полиномов Q (затемненная) и $z_1z_2 - t$ (жирная прямая), цепи C^1, $C^2 = C_1^2 + C_2^2$.

виде E_ν с помощью целочисленных векторов $\nu \in N(Q)$. Имеется взаимно однозначное соответствие между связными компонентами $\{E_\nu\}$ дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathscr{A}_V$ и разложениями Лорана (с центром в нуле) несократимой дроби $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ (см. [7, п. 6.1]). Множества $\mathrm{Log}^{-1}(E_\nu)$ и есть области сходимости соответствующих разложений Лорана.

В случае двух переменных конусом рецессии компоненты E_ν может быть плоский двумерный конус (когда ν — вершина $N(Q)$, луч (когда ν — целочисленная точка на внутренности ребра из $N(Q)$) и точка (когда ν — внутренняя целочисленная точка $N(Q)$).

Предложение 1. *Пусть ряд Лорана* (1) *сходится в области* $\mathrm{Log}^{-1}(E)$, *где* E *— связная компонента дополнения к амебе гиперповерхности* $V = \{Q = 0\}$, *и пусть* x, y *— две любые точки из* E *такие, что для выбранного направления* $q \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ *выполняется неравенство* $\langle y, q\rangle < \langle x, q\rangle$. *Тогда для полной диагонали* $d_q(t)$ *ряда Лорана* (1) *справедливо интегральное представление*

$$d_q(t) = \frac{1}{(2\pi\imath)^n}\int\limits_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)}\frac{z^q}{z^q - t}\frac{dz_1}{z_1}\cdots\frac{dz_n}{z_n},$$

где $e^{\langle y,q\rangle} < |t| < e^{\langle x,q\rangle}$, $\Gamma = \mathrm{Log}^{-1}(x) - \mathrm{Log}^{-1}(y)$.

Логарифмический образ гиперболы $z_1^{q_1}z_2^{q_2} = t$ разбивает компоненту E на две части. Указанное неравенство говорит о том, что точки x и y выбираются из различных частей этого разбиения (рис. 2).

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I_x(t) = \frac{1}{(2\pi\imath)^n}\int\limits_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \frac{P(z)}{Q(z)}\frac{z^q}{z^q - t}\frac{dz_1}{z_1}\cdots\frac{dz_n}{z_n}$$

и подставим вместо дроби $\frac{P(z)}{Q(z)}$ соответствующий ей ряд Лорана (1), а вместо дроби $\frac{1}{z^q-t}$ — ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными степенями t. Тогда при $|t| < e^{\langle x,q\rangle}$ получим

$$I_x(t) = \frac{1}{(2\pi\imath)^n} \int\limits_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n} c_{\alpha_1\cdots\alpha_n} z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{z_1^{q_1k-1}\cdots z_n^{q_nk-1}}\, dz.$$

Очевидно, что ненулевой вклад в данный интеграл внесут только мономы с коэффициентами $c_{kq_1,\dots,kq_n}$ при $k>0$, таким образом, данный интеграл равен

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{kq_1,\dots,kq_n} t^k = d_q^+(t).$$

Аналогично, раскладывая в интеграле I_y по $\mathrm{Log}^{-1}(y)$ дробь $\frac{1}{z^q-t}$ в ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с отрицательными степенями t, при $|t| > e^{\langle y,q\rangle}$ получим $-d_q^-(t)$.

Разность интегралов $I_x - I_y$ и будет полной диагональю

$$d_q(t) = d_q^+(t) + d_q^-(t)$$

ряда Лорана (1).

3. Диагонали для рациональных функций двух переменных

Пусть F — рациональная функция двух переменных, представленная несократимой дробью

$$F(z_1,z_2) = \frac{P(z_1,z_2)}{Q(z_1,z_2)}.$$

Рассмотрим ее произвольный ряд Лорана с центром в нуле:

$$F(z_1,z_2) = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}^2} c_{\alpha_1\alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}. \tag{4}$$

Как отмечалось выше, в предположении несократимости дроби $\frac{P}{Q}$, этот ряд сходится в области $\mathrm{Log}^{-1}(E)$, соответствующей компоненте E из дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus \mathscr{A}_V$.

Теорема 1. *Для любого $q=(q_1,q_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}$ полная диагональ*

$$d_q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{kq_1,kq_2} t^k$$

всякого ряда Лорана (4) является алгебраической функцией.

Для доказательства нам потребуются сведения из теории многомерных вычетов и понятие циклов, разделяющих наборы комплексных гиперповерхностей на комплексных аналитических многообразиях.

Определение [9, п. 9]. Пусть $S_1,\dots,S_n$ — n гиперповерхностей (дивизоров) на n-мерном комплексном аналитическом многообразии X. Цикл $\Gamma \in Z_n(X\setminus(S_1\cup\ldots\cup S_n))$ размерности n называется *разделяющим дивизоры* $S_1,\dots,S_n$, если $\Gamma\sim 0$ в областях

$$X\setminus(S_1\cup\ldots[j]\ldots\cup S_n)\,,\quad j=1,\dots,n.$$

В монографии [9, п. 9] доказан следующий критерий разделяющих циклов.

Теорема A. *Если $H_{2n-1}(X) \simeq 0$ и $X \setminus S_j$ — штейново многообразие для всех $j = 1, \dots, n$, то цикл Γ разделяет дивизоры тогда и только, когда он представляется в виде линейной комбинации*

$$\sum_{a \in S_1 \cap \ldots \cap S_n} n_a \Gamma_a$$

локальных циклов

$$\Gamma_a = \{z \in U_a : |f_j(z)| = \varepsilon_j,\ j = 1, \dots, n\},$$

где $\{f_j = 0\} = S \cap U_a$, т. е. f_j — функция, локально определяющая S_j в некоторой окрестности U_a изолированной точки a пересечения $S_1 \cap \dots \cap S_n$.

Замечание. В случае двух переменных эта теорема доказана без требования штейновости дополнений $X \setminus S_1$ и $X \setminus S_2$ [9, п. 9].

Локальный цикл Γ_a участвует в определении локального вычета (вычета Гротендика), ассоциированного с голоморфным отображением (или векторным полем) $f = (f_1, \dots, f_n)$. Условие алгебраичности локального вычета, зависящего от параметра, дает следующий результат (см. [10] или [9, п. 10]).

Теорема B. *Пусть $f_1(z,t), \dots, f_n(z,t)$ — полиномы переменных $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}^m$, которые при $t = t^0$ имеют изолированный общий нуль $z = a$. Тогда интеграл рациональной формы*

$$\int\limits_{\Gamma_a} \frac{h(z,t)dz}{f_1(z,t) \cdot \ldots \cdot f_n(z,t)}$$

по локальному циклу Γ_a определяет аналитический элемент алгебраической функции по t.

Доказательство теоремы 1. Согласно предложению 1 для $d_q(t)$ справедливо интегральное представление

$$d_q(t) = \frac{1}{(2\pi\imath)^2} \int\limits_{\Gamma} \frac{P(z_1,z_2)}{Q(z_1,z_2)} \frac{z_1^{q_1-1} z_2^{q_2-1}}{z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t}\, dz_1 dz_2 \tag{5}$$

по циклу $\Gamma = \mathrm{Log}^{-1}(x) - \mathrm{Log}^{-1}(y)$, где $x, y \in E$, причем $e^{\langle y,q \rangle} < |t| < e^{\langle x,q \rangle}$.

Рассмотрим подынтегральную дифференциальную форму в (5) в проективной компактификации $\mathbb{CP}^2$ пространства $\mathbb{C}^2$. В зависимости от степени полинома P эта форма может иметь полюс на бесконечно удаленной прямой $\mathbb{P}_\infty = \mathbb{CP}^2 \setminus \mathbb{C}^2$. Разобьем семейство трех дивизоров на две группы

$$S_1 = \overline{\{Q = 0\}} \cup \mathbb{P}_\infty, \quad S_2 = \overline{\{z^q - t = 0\}},$$

где черта означает замыкание в $\mathbb{CP}^2$ соответствующего аффинного множества, и докажем, что Γ разделяет S_1 и S_2.

Имеем $\Gamma = \partial C^1$, где цепь $C^1 = \mathrm{Log}^{-1}\gamma$ — это прообраз отрезка $\gamma = [x,y]$, соединяющего точки x и y. Компонента E выпуклая, следовательно, $\gamma \cap \mathscr{A}_V = \varnothing$, поэтому прообраз $\mathrm{Log}^{-1}\gamma$ отрезка не пересекает $\{Q = 0\}$. Отсюда заключаем, что $C^1 \cap S_1 = \varnothing$.

Аналогично $\Gamma = \partial C^2$, где $C^2 = \overline{\mathrm{Log}^{-1}(r_+ \cup r_-)}$. Здесь $r\pm$ — лучи, выходящие из точек x и y соответственно и являющиеся продолжением отрезка γ, а замыкание берется в $\mathbb{CP}^2$. Точки x и y лежат в разных частях разбиения компоненты E логарифмическим образом гиперболы $\{z^q - t = 0\}$. Поэтому $C^2 \cap S_2 = \varnothing$.

Заметим, что $\mathbb{CP}^2 \setminus S_j$, $j = 1, 2$, являются штейновыми многообразиями (см., например, [11]) и $H_3(\mathbb{CP}^2) \simeq 0$ (напомним, что комплексные проективные пространства допускают клеточные разбиения лишь с четномерными клетками).

Таким образом, многообразие $X = \mathbb{CP}^2$ и дивизоры $S_1,\ S_2$ удовлетворяют условию теоремы A, а цикл Γ разделяет дивизоры S_1 и S_2. Согласно теореме A он представим в виде линейной комбинации локальных циклов

$$\Gamma = \sum_{a \in S_1 \cap S_2} c_a \Gamma_a.$$

Тем самым интеграл (5) равен линейной комбинации локальных вычетов от рациональной формы, которые по теореме B являются алгебраическими функциями. Линейная комбинация алгебраических функций является алгебраической функцией.

Теорема 2. *Для любого* $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ *односторонняя диагональ ряда Лорана* (4), *связанного с неограниченной компонентой* E, *является алгебраической функцией.*

Следующий пример показывает, что теорема 2 неверна для рядов, соответствующих ограниченным компонентам E_ν.

Пример. Рассмотрим рациональную функцию двух переменных

$$F(z_1, z_2) = \frac{P(z_1,\ z_2)}{Q(z_1,\ z_2)} = \frac{1}{z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1}.$$

Заметим, что на единичном остове $|z_1| = |z_2| = 1$ модуль монома $4z_1z_2$ больше суммы модулей трех остальных мономов, поэтому точка $(0,\ 0) = (\log 1, \log 1)$ не принадлежит амебе полинома Q и, более того, она лежит в компоненте с порядком $\nu = (1, 1)$ (см. [8, предложение 2.7]). Так как точка $(1,\ 1)$ — внутренняя точка многогранника Ньютона $N(Q)$, то $E_{1,1}$ — ограниченная компонента.

Разложение Лорана для F в $\operatorname{Log}^{-1}(E_{1,1})$ следующее:

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2) &= -\frac{1}{4z_1 z_2} \sum_{k \ge 0} \left(\frac{1 + z_1 z_2^2 + z_1^2 z_2}{4 z_1 z_2} \right)^k \\ &= -\frac{1}{4z_1z_2} \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{N}^2} \frac{(k_1+k_2)!}{k_1! k_2!} \frac{(z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2)^{k_1}}{(4z_1z_2)^{k_1+k_2}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} c_{\alpha_1, \alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}, \end{aligned}$$

где

$$c_{\alpha_1, \alpha_2} = \sum_{k \in \mathbb{N}^2 : k_1 - 2k_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2} \frac{1}{4^{k_1+k_2+1}} \binom{k_1 + k_2}{k_1} \binom{\alpha_2 + k_2 + 1}{k_1}.$$

Согласно предложению 1 полная $(1, 1)$-диагональ для $F(z_1, z_2)$ выражается следующим интегралом:

$$\frac{1}{(2\pi\imath)^2} \int_{\Gamma} \frac{1}{z_1^2 z_2 - 4z_1z_2 + z_1 z_2^2 + 1} \frac{dz_1 dz_2}{z_1 z_2 - t}, \tag{6}$$

где $\Gamma = \operatorname{Log}^{-1}(x) - \operatorname{Log}^{-1}(y)$, точки x и y выбираются в $E_{1,1}$ по разные стороны от амебы гиперболы $z_1 z_2 = t$, как показано на рис. 2.

Ввиду высокой степени знаменателя в (6) бесконечно удаленная прямая $\mathbb{P}_\infty$ не является полярным дивизором для подынтегрального выражения, т. е. в $\mathbb{CP}^2$ полярными дивизорами служат замыкания аффинных кривых $\{z_1^2z_2 - 4z_1z_2 + z_1z_2^2 + 1 = 0\}$, $\{z_1z_2 - t = 0\}$.

В данной ситуации $\Gamma = \partial C^k$, $\mathbb{CP}^2 \setminus S_k$, $k = 1, 2$, где C^1 и $C^2 = C_1^2 + C_2^2$ представляются отрезком и лучами в логарифмической шкале (см. рис. 2). Цепь $C^2 - C^1$ ограничивает область $G \subset \mathbb{CP}^2$, которая на рисунке представляется полуплоскостью слева от прямой, составленной из C^1, C^2 (ввиду симметрии можно считать, что $C^2 - C^1$ — это замыкание вещественной гиперплокости $|z_1| = |z_2|$, а G — внутренность замыкания множества $|z_1| > |z_2|$). Согласно [9, п. 9, следствие 1] интеграл (6) равен сумме локальных вычетов по точкам пересечения дивизоров S_1 и S_2, лежащим в области G. В область G попадают одна из конечных точек

$$p_\pm(t) = \left(\frac{2t^2}{4t - 1 \pm s(t)}, \frac{4t - 1 \pm s(t)}{2t}\right), \text{ где } s(t) = \sqrt{1 - 8t + 16t^2 - 4t^3},$$

пересечения $S_1 \cap S_2$ и бесконечно удаленная точка $(1 : 0 : 0)$.

Оказывается, вычеты в обеих точках на бесконечности равны нулю. Следовательно, полная $(1, 1)$-диагональ указанного разложения Лорана равна вычету в точке $p_+(t)$, который по по формуле Коши равен

$$d_{(1,1)}(t) = \frac{1}{J(p_+(t))} = \frac{4t + s(t) - 1}{4t^3 - 16t^2 + 8t - 4ts(t) + s(t) - 1},$$

где J — якобиан полиномов Q и z_1z_2. Таким образом, полная диагональ является алгебраической функцией.

Докажем, что односторонняя диагональ, выраженная интегралом

$$d^-_{(1,1)}(t) = -\frac{1}{(2\pi\imath)^2} \int\limits_{\mathrm{Log}^{-1}(y)} \frac{1}{z_1^2z_2 - 4z_1z_2 + z_1z_2^2 + 1} \frac{dz_1dz_2}{z_1z_2 - t},$$

является неалгебраической функцией.

Этот интеграл можно свести к интегралу по 1-циклу на римановой поверхности $V = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1^2z_2 - 4z_1z_2 + z_1z_2^2 + 1 = 0\}$, представив цикл интегрирования $\mathrm{Log}^{-1}(y)$ в виде трубки над 1-циклом на V. Следуя схеме из предложения 6 статьи [12], получаем, что таким 1-циклом можно взять $\sigma = V \cap C_1^2$.

Тогда согласно формуле Лере [13, п. 16]

$$d^-_{(1,1)}(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_\sigma \frac{dz_2}{(2z_1z_2 - 4z_1 + z_1^2)(z_1z_2 - t)}\bigg|_V. \tag{7}$$

Уточним расположение σ на римановой поверхности V. Амеба $\mathscr{A}_V$ имеет максимальное количество компонент дополнения, и ее граница $\partial\mathscr{A}_V$ гладкая, тогда Log-проекция V на $\mathscr{A}_V$ является $2 \to 1$-отображением, а у точек границы $\partial\mathscr{A}_V$ имеется только один прообраз (см. [12]). Поэтому цикл σ является поднятием на V отрезка $C_1^2 \cap \mathscr{A}_V$, соединяющего ограниченную компоненту $E_{1,1}$ с компонентой $E_{0,0}$. На римановой поверхности V он соответствует одному из канонических разрезов тора (см. рис. 3 на развертке тора, представляющей эллиптическую кривую V).

Гипербола пересекает кривую V в точках $p_\pm(t)$, сливающихся при $t_j \in \mathbb{C}$ таких, что $s(t_j) = 0$, $j = 1, 2, 3$. Геометрически это соответствует ситуации,

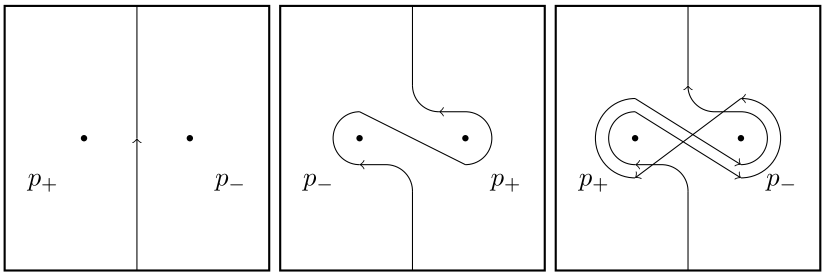

Рис. 3. Цикл σ (меридиан тора на левом рисунке) и его поведение при обходе параметра t вдоль γ и 2γ.

когда гипербола касается кривой V. Если t_j пронумерованы так, что $|t_1| < |t_2| < |t_3|$, то нас интересует значение t_2, при котором на рис. 2 логарифмический образ гиперболы касается нижней границы ограниченной компоненты $E_{1,1}$ (при таком значении t цикл $\operatorname{Log}^{-1}(y)$ становится «зажимающимся»).

Пусть γ — окружность малого радиуса вокруг точки t_2. Проследим на развертке тора для V (рис. 3) поведение цикла σ при обходе параметра t вдоль петли γ. При однократном обходе вдоль γ точки p_- и p_+ переставляются местами, а вариация цикла $\operatorname{var}_\gamma \sigma$ равна $\sigma_1 - \sigma_2$, где σ_1, σ_2 — петли вокруг точек p_+ и p_- соответственно. При двухкратном обходе вдоль γ точки $p_\pm(t)$ два раза меняются местами, а $\operatorname{var}_\gamma \sigma = 2(\sigma_1 - \sigma_2)$.

Заметим, что $J(p_+(t) = -J(p_-(t))$, поэтому

$$d_{(1,1)}(t) = \int\limits_{\sigma_1} \frac{dz_2}{(2z_1z_2 - 4z_1 + z_1^2)(z_1z_2 - t)}\bigg|_V = -\int\limits_{\sigma_2} \frac{dz_2}{(2z_1z_2 - 4z_1 + z_1^2)(z_1z_2 - t)}\bigg|_V.$$

Таким образом, при аналитическом продолжении вдоль петли γ аналитический элемент $d^-_{(1,1)}(t)$, заданный интегралом (7), переходит в $d^-_{(1,1)}(t) + 2d_{(1,1)}(t)$, а при продолжении вдоль петли 2γ он переходит в $d^-_{(1,1)}(t) + 4d_{(1,1)}(t)$. При k-кратном обходе γ аналитический элемент будет получать приращение, равное $2kd_{(1,1)}(t)$.

Алгебраическая функция не может иметь такого ветвления. Следовательно, односторонняя диагональ $d^-_{(1,1)}(t)$ является неалгебраической функцией.

Доказательство теоремы 2. Аналогично доказательству теоремы 1 покажем, что в интегральном представлении для односторонней диагонали цикл, по которому введется интегрирование, является разделяющим. Тогда согласно теореме A он представим в виде линейной комбинации локальных циклов, вычеты по которым являются алгебраическими функциями параметра (теорема B).

Пусть гиперповерхность задается в торе знаменателем функции $F(z)$:

$$V = \{z \in \mathbb{T}^2 : Q(z) = 0\}.$$

Для доказательства удобно рассматривать торическую компактификацию $\mathbb{X}$ пространства $\mathbb{T}^2$, построенную по многограннику Ньютона $N(Q)$, точнее, по вееру Σ, двойственному к $N(Q)$ (см. [14]).

Заметим, что нечетномерные гомологии компактного торического многообразия являются тривиальными, в частности, $H_3(\mathbb{X}) \simeq 0$ [14, п. 4.5].

Моментное отображение μ переводит $\mathbb{X}$ в многоугольник Ньютона $N(Q)$ (рис. 4), при этом $\mathbb{T}^2$ переводится во внутренность $N(Q)$ [7, п. 6.1].

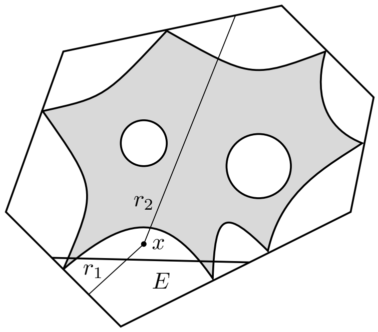

Рис. 4. Компактифицированные амебы для Q (затемненная часть) и $z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t$ (жирный отрезок).

Полином $Q(z)$ определяет в $\mathbb{X}$ гиперповерхность $\overline{V}$. Образ $\mu(\overline{V}) \subset N(Q)$ называется *компактифицированной* амебой. Типичное расположение компактифицированной амебы относительно $N(Q)$ представлено на рис. 4.

Рассмотрим первый случай, когда E — компонента с невырожденным конусом рецессии. Выберем точку $x \in E$, как показано на рис. 4. Интеграл

$$I = \frac{1}{(2\pi\imath)^2} \int\limits_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} \frac{z_1^{q_1-1} z_2^{q_2-1}}{z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t}\, dz_1 dz_2 \tag{8}$$

равен какой-то из односторонних диагоналей с точностью до знака (см. доказательство предложения 1).

Пусть D_i — $\mathbb{T}_N$-инвариантный дивизор, являющийся замыканием 1-мерных орбит [14]. Некоторые $\mathbb{T}_N$-инвариантные дивизоры являются потенциально полярными для подынтегральной формы в (8). При моментном отображении $\mathbb{T}_N$-инвариантные дивизоры D_i переходят в ребра $\mu(D_i)$ многоугольника $N(Q)$.

Пусть соседние щупальцы амебы, разделенные компонентой E, пересекают $\mu(D_i)$ и $\mu(D_j)$.

Разобьем семейство полярных дивизоров в (8) на две группы. Пусть дивизор S_1 состоит из $\overline{V}$ и нескольких $\mathbb{T}_N$-инвариантных дивизоров (среди которых нет D_i и D_j), а S_2 состоит из замыкания в $\mathbb{X}$ гиперболы $\{z^q - t = 0\}$ и дивизоров D_i, D_j.

Докажем, что цикл $\Gamma = \mathrm{Log}^{-1}(x)$ <u>разделяет</u> дивизоры S_1 и S_2.

Имеем $\Gamma = \partial C^{(1)}$, где цепь $C^{(1)} = \overline{\mathrm{Log}^{-1}(r_1)}$, r_1 — это выходящий из точки x луч, лежащий в компоненте E и пересекающий прямую $\langle q, u\rangle = \log|t|$. Луч не пересекает амебу, поэтому его прообраз не будет пересекать $Q = 0$. Таким образом, $C^1 \cap S_1 = \varnothing$.

Аналогично $\Gamma = \partial C^{(2)}$, где цепь $C^{(2)} = \overline{\mathrm{Log}^{-1}(r_2)}$, r_2 — это выходящий из точки x луч, противоположно направленный лучу r_1. Луч r_2 не пересекает $\langle q, u\rangle = \log|t|$. Следовательно, $C^2 \cap S_2 = \varnothing$.

Таким образом, цикл Γ разделяет дивизоры S_1, S_2.

Повторяя рассуждения, завершающие доказательство теоремы 1, получаем, что одна из односторонних диагоналей является алгебраической. Согласно теореме 1 полная диагональ, равная сумме двух односторонних, является алгебраической. Следовательно, и другая односторонняя диагональ есть алгебраическая функция.

Рассмотрим второй случай, когда E — компонента, у которой конус рецессии есть луч, и прямая $\langle q, u\rangle = \log|t|$ разбивает E на неограниченную и ограниченную части. Выберем точку x из ограниченной части, тогда интеграл

$$I = \frac{1}{(2\pi\imath)^2} \int\limits_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} \frac{z_1^{q_1-1} z_2^{q_2-1}}{z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t}\, dz_1 dz_2$$

равен одной из односторонних диагоналей с точностью до знака.

Пусть соседние щупальцы амебы, разделенные компонентой E, пересекают $\mu(D_i)$.

Докажем, что $\Gamma = \mathrm{Log}^{-1}(x)$ разделяет дивизоры S_1, состоящий из $\overline{V}$ и нескольких $\mathbb{T}_N$-инвариантных дивизоров (среди которых нет D_i), и S_2, состоящий из замыкания в $\mathbb{X}$ гиперболы $\{z^q - t = 0\}$ и дивизора D_i.

Имеем $\Gamma = \partial C^{(1)}$, где цепь $C^{(1)} = \overline{\mathrm{Log}^{-1}(r_1)}$, r_1 — это выходящий из точки x луч, лежащий в компоненте E и пересекающий прямую $\langle q, u\rangle = \log|t|$. Прообраз r_1 не будет пересекать $Q = 0$, так как сам луч не пересекает амебу. Таким образом, $C^1 \cap S_1 = \varnothing$.

Аналогично $\Gamma = \partial C^{(2)}$, где цепь $C^{(2)} = \overline{\mathrm{Log}^{-1}(r_2)}$, r_2 — это выходящий из точки x луч, противоположно направленный лучу r_1. Луч r_2 не пересекает $\langle q, u\rangle = \log|t|$. Следовательно, $C^2 \cap S_2 = \varnothing$. Значит, цикл Γ разделяет дивизоры S_1, S_2. Тогда, как и в предыдущем случае, получаем, что односторонняя диагональ является алгебраической функцией.

Рассмотрим третий случай, когда E — компонента, у которой конус рецессии есть луч, и прямая $\langle q, u\rangle = \log|t|$ разбивает E на две неограниченные части. Выберем точку $x \in E$ из компоненты, тогда интеграл

$$I = \frac{1}{(2\pi\imath)^2} \int\limits_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} \frac{z_1^{q_1-1} z_2^{q_2-1}}{z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t}\, dz_1 dz_2$$

равен какой-то из односторонних диагоналей с точностью до знака.

Пусть соседние щупальцы амебы, разделенные компонентой E, пересекают $\mu(D_i)$.

Докажем, что $\Gamma = \mathrm{Log}^{-1}(x)$ разделяет дивизоры S_1, состоящий из $\overline{V}$, замыкания в $\mathbb{X}$ гиперболы $\{z^q - t = 0\}$ и нескольких $\mathbb{T}_N$-инвариантных дивизоров (среди которых нет D_i), и S_2, состоящий из $\mathbb{T}_N$-инвариантого дивизора D_i.

Имеем $\Gamma = \partial C^{(1)}$, где цепь $C^{(1)} = \overline{\mathrm{Log}^{-1}(r_1)}$, r_1 — это выходящий из точки x луч, лежащий в компоненте E, следовательно, не пересекающий прямую $\langle q, u\rangle = \log|t|$. Прообраз r_1 не будет пересекать $Q = 0$, так как r_1 не пересекает амебу. Таким образом, $C^1 \cap S_1 = \varnothing$.

Аналогично $\Gamma = \partial C^{(2)}$, где цепь $C^{(2)} = \overline{\mathrm{Log}^{-1}(r_2)}$, r_2 — это выходящий из точки x луч, перпендикулярный конусу рецессии. Очевидно, что $C^2 \cap D_2 = \varnothing$. Тем самым цикл Γ разделяет дивизоры S_1, S_2. Так же, как и в первом случае, получаем, что односторонняя диагональ является алгебраической функцией.

4. Полные диагонали ранга $n-1$ (примитивные диагонали)

Рассмотрим для ряда Лорана (1) следующую $(n-1)$-мерную диагональ:

$$I_{12} := \sum_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^{n-1}} c_{\alpha_2,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} t_2^{\alpha_2} t_3^{\alpha_3} \ldots t_n^{\alpha_n}. \tag{9}$$

В статье [3], где такие диагонали рассматриваются для степенных рядов по положительным степеням, они названы *примитивными*. По аналогии назовем (9) *полной примитивной* диагональю ряда Лорана (1).

Заметим, что полная $(1,\dots,1)$-диагональ является композицией примитивных, например, при $n=3$

$$d_{(1,1,1)}(t) = I_{23}(I_{12}(F)).$$

Для краткости обозначим $(\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^{n-1}$ через α'. Вся решетка $\mathbb{Z}^{n-1}$ представляется дизъюнктной суммой ортаэдров $\mathbb{Z}^{n-1}=\bigcup\limits_{\varepsilon}\mathbb{Z}_{\varepsilon_2}\times\dots\times\mathbb{Z}_{\varepsilon_n}$, где $\varepsilon=(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$ с компонентами $\varepsilon_j=\pm1$, а $\mathbb{Z}_{\varepsilon_j}$ равно $\mathbb{Z}_+$, если $\varepsilon_j=+1$, и $\mathbb{Z}_-$, если $\varepsilon_j=-1$.

Соответственно диагональ I_{12} представляется суммой ортаэдральных диагоналей $I_{12}=\sum\limits_{\varepsilon} I_{12}^{\varepsilon}$, где

$$I_{12}^{\varepsilon}=\sum_{\alpha'\in\mathbb{Z}_{\varepsilon_2}\times\dots\times\mathbb{Z}_{\varepsilon_n}} c_{\alpha_2\alpha'}t^{\alpha'}.$$

В случае $n=2$ ортаэдральные диагонали $I_{12}^{\pm}$ совпадают с односторонними диагоналями $d_{(1,1)}^{\pm}$.

Пусть ряд Лорана (1) сходится в области $\operatorname{Log}^{-1}(E)$, где E — связная компонента дополнения амебы для Q. Выберем $t=(t_2,\dots,t_n)$ так, чтобы плоскости (амебы полиномов $z_1z_2-t_2,\ z_3-t_3,\dots,\ z_n-t_n$)

$$u_1+u_2=\log|t_2|,\ u_3=\log|t_3|,\dots,u_n=\log|t_n|$$

пересекались в некоторой точке из E.

Предложение 2. *Пусть x^{ε} — произвольная точка из пересечения E с конусом*

$$\varepsilon_2(e^{x_1+x_2}-|t_2|)>0,\ \varepsilon_3(e^{x_3}-|t_3|)>0,\dots,\varepsilon_n(e^{x_n}-|t_n|)>0.$$

Тогда для полной примитивной диагонали (9) *ряда Лорана* (1) *в* $\operatorname{Log}^{-1}(E)$ *справедливо интегральное представление*

$$I_{12}=\frac{1}{(2\pi\imath)^n}\int\limits_{\Gamma}\frac{P(z)}{Q(z)}\frac{dz}{(z_1z_2-t_2)(z_3-t_3)\dots(z_n-t_n)}, \tag{10}$$

где $\Gamma=\sum\limits_{\varepsilon}(\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)\operatorname{Log}^{-1}(x^{\varepsilon})$.

Доказательство. Будем для определенности считать, что точка x^{ε} такая, что $\varepsilon_j=+1$ при $j=\overline{2,m}$ и $\varepsilon_j=-1$ при $j=\overline{m+1,n}$.

Рассмотрим интеграл

$$I_{x^{\varepsilon}}(t_2,\dots,t_n)=\frac{1}{(2\pi\imath)^n}\int\limits_{\operatorname{Log}^{-1}(x^{\varepsilon})}\frac{P(z)}{Q(z)}\frac{dz}{(z_1z_2-t_2)(z_3-t_3)\dots(z_n-t_n)}.$$

Подставим в интеграл вместо дроби F ее ряд Лорана (1), вместо дроби $\frac{1}{z_1z_2-t_2}$ — ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными степенями t_2, вместо дробей $\frac{1}{z_j-t_j}$, $j=\overline{3,m}$, — ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными степенями t_j, а вместо дробей $\frac{1}{z_j-t_j}$,

$j=\overline{m+1,n}$, — ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с отрицательными степенями t_j. Тогда получаем, что интеграл I_{x^ε} равен

$$\frac{\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}{(2\pi\imath)^n}\int\limits_{\mathrm{Log}^{-1}(x^\varepsilon)}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}c_\beta z^\beta\sum_{\alpha_2=0}^{\infty}\frac{t_2^{\alpha_2}}{(z_1z_2)^{\alpha_2+1}}\prod_{j=3}^{m}\sum_{\alpha_j=0}^{\infty}\frac{t_j^{\alpha_j}}{z_j^{\alpha_j+1}}\prod_{j=m+1}^{n}\sum_{\alpha_j=0}^{\infty}\frac{z_j^{\alpha_j}}{t_j^{\alpha_j+1}}\,dz.$$

Ненулевой вклад в данный интеграл внесут только мономы $c_\beta z^\beta$ при $\beta_1=\beta_2=\alpha_2\geq 0$, $\beta_j=\alpha_j\geq 0$, $j=3,\dots,m$, $\beta_j=\alpha_j<0$, $j=m+1,\dots,n$. Таким образом, данный интеграл равен

$$\sum_{\alpha_2\geq 0,\dots,\alpha_m\geq 0,\alpha_{m+1}<0,\dots,\alpha_n<0}c_{\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n}t_2^{\alpha_2}t_3^{\alpha_3}\dots t_n^{\alpha_n}.$$

Тогда комбинация интегралов $\sum\limits_{\varepsilon}(\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)I_{x^\varepsilon}$ и будет диагональю I_{12}.

Теорема 3. *Полная примитивная диагональ* (9) *ряда Лорана* (1), *связанная с компонентой* E, *является алгебраической функцией.*

Доказательство. Согласно предложению 2 для $I_{12}(t)$ справедливо интегральное представление

$$I_{12}(t_2,\dots,t_n)=\frac{1}{(2\pi\imath)^n}\int\limits_{\Gamma}\frac{P(z)}{Q(z)}\frac{dz}{(z_1z_2-t_2)(z_3-t_3)\dots(z_n-t_n)},$$

где $\Gamma=\sum\limits_{\varepsilon}(\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)\,\mathrm{Log}^{-1}(x^\varepsilon)$.

Рассмотрим подынтегральную дифференциальную форму в (10) в проективной компактификации $\mathbb{CP}^n$ пространства $\mathbb{C}^n$. В зависимости от степени полинома P эта форма может иметь полюс на бесконечно удаленной плоскости $\mathbb{P}_\infty=\mathbb{CP}^n\setminus\mathbb{C}^n$. Разобьем семейство дивизоров на n групп

$$S_1=\overline{\{Q=0\}}\cup\mathbb{P}_\infty,\ S_2=\overline{\{z_1z_2=t_2\}},\ S_3=\overline{\{z_3=t_3\}},\dots,S_n=\overline{\{z_n=t_n\}},$$

где черта означает замыкание аффинного множества в $\mathbb{CP}^n$, и докажем, что Γ разделяет $S_1,\dots,S_n$.

Имеем $\Gamma=\partial C^1$, где цепь $C^1=\overline{\mathrm{Log}^{-1}\bigcup\limits_{\varepsilon}(\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)r_\varepsilon}$, r_ε — луч, выходящий из точки x_ε, не пересекающий дивизоры $S_2,\dots,S_n$.

Имеем $\Gamma=\partial C^2$, где $C^2=\mathrm{Log}^{-1}\bigcup\limits_{'\varepsilon}(\varepsilon_3\cdots\varepsilon_n)[x_{+1,'\varepsilon},x_{-1,'\varepsilon}]$, $[x_{+1,'\varepsilon},x_{-1,'\varepsilon}]$ — отрезок, пересекающий дивизор D_2 и не пересекающий дивизоры $S_1,S_3,\dots,S_n$.

Цепи $C^3,\dots,C^n$ строятся аналогично цепи C_2.

Как уже отмечалось выше, дополнение до дивизора в проективном пространстве является штейновым. Таким образом, утверждение теоремы следует из теорем A и B.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stanley R.* Enumerative combinatorics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. V. II.
2. *Furstenberg H.* Algebraic functions over finite fields // J. of Algebra. 1967. V. 7. P. 271–277.
3. *Denef J., Lipshitz L.* Algebraic power series and diagonals // J. Number Theory. 1987. V. 26. P. 46–67.
4. *Lipshitz L. D*-finite power series // J. of Algebra. 1989. V. 122. P. 353–373.
5. *Djokovič D. Ž.* A properties of the Taylor expansion of rational function in several variables // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 66. P. 679–685.

6. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985. Т. II.

7. *Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A.* Discriminants, resultants and multidimentional determinants. Boston: Bikhäuser, 1994.

8. *Forsberg M., Passare M., Tsikh A.* Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // Adv. Math. 2000. V. 151. P. 45–70.

9. *Цих А. К.* Многомерные вычеты и их приложения. Новосибирск: Наука, 1988.

10. *Сафонов К. В., Цих А. К.* Об особенностях вычета Гротендика, зависящего от параметра, и диагонали двойных степенных рядов // Изв. вузов. Математика. 1984. № 4. С. 57–58.

11. *Kiselman C. O.* On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals // Acta Math. 1967. V. 117. P. 1–35.

12. *Лейнартас Е. К., Пассаре М., Цих А. К.* Многомерные версии теоремы Пуанкаре для разностных уравнений // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 10. С. 87–104.

13. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.

14. *Fulton W.* Introduction to toric varieties. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.

Статья поступила 5 октября 2008 г.

Почекутов Дмитрий Юрьевич
Сибирский федеральный университет, институт математики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
potchekutov@gmail.com