Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 512.57

0–ДИАЛГЕБРЫ С БАР–ЕДИНИЦЕЙ И НЕАССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ РОТА — БАКСТЕРА

А. П. Пожидаев

Аннотация. Описываются однородные структуры алгебр Рота — Бакстера, возникающие на 0-диалгебре с ассоциативной бар-единицей. В качестве следствия находится структура алгебры Рота — Бакстера на произвольной ассоциативной диалгебре с бар-единицей и унитальной конформной ассоциативной алгебре. Доказывается, что произвольная альтернативная диалгебра вложима в альтернативную диалгебру с ассоциативной бар-единицей. Вводится понятие многообразия диалгебр в смысле Эйленберга, эквивалентное понятию, введенному ранее П. С. Колесниковым.

Ключевые слова: диалгебра, бар-единица, присоединение бар-единицы, алгебра Рота — Бакстера, обертывающая алгебра, конформная алгебра, альтернативная диалгебра, многообразие диалгебр, унитальное многообразие.

Введение

В последнее время отмечается значительный интерес к диалгебрам (и близким к ним структурам) и алгебрам Рота — Бакстера. Класс ассоциативных диалгебр является довольно интересным, несмотря на отсутствие простых объектов (в классическом понимании), отличных от ассоциативных алгебр. Как известно, для алгебр Ли существует понятие универсальной обертывающей ассоциативной алгебры. По теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта для любой алгебры Ли L существует ассоциативная алгебра A такая, что L изоморфна некоторой подалгебре алгебры Ли $A^{(-)}$. Лодэй нашел универсальную обертывающую для алгебры Лейбница (см. [1]). Роль таких обертывающих играют ассоциативные диалгебры — алгебраические системы с двумя ассоциативными операциями, согласованными между собой. П. С. Колесниковым недавно показано, что любая диалгебра, в свою очередь, может быть получена из некоторой ассоциативной конформной алгебры [2].

Пусть Φ — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, A — алгебра над Φ, R — некоторое линейное отображение, определенное на A. Алгебра A называется *алгеброй Рота — Бакстера*, если для любых $x, y \in A$ выполнено

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + \lambda xy), \qquad (1)$$

где λ — некоторый фиксированный элемент из Φ. Уравнение (1) введено Бакстером в 1960 г. [3], а затем популяризовано в работах Рота и его школы [4, 5].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00157), СО РАН (интеграционный проект № 97), фонда FAPESP (Бразилия, Сан-Пауло, 2008/50142–8), АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (2.1.1.419) и НШ–344.2008.1.

Линейные операторы, удовлетворяющие (1), в контексте алгебр Ли введены независимо А. А. Белавиным и В. Г. Дринфельдом в 1982 г. и М. А. Семеновым-Тян-Шанским в 1983 г. и связаны с решениями, так называемыми R-матрицами, классического уравнения Янга — Бакстера. Недавно приложения алгебр Рота — Бакстера найдены в таких областях, как квантовая теория поля, уравнения Янга — Бакстера, смешанные произведения, операды, алгебры Хопфа, комбинаторика и теория чисел (ссылки могут быть найдены, например, в [6]).

Агуиар [7] в 2000 г. впервые установил связь между алгебрами Рота — Бакстера и дендриформными алгебрами и показал, что алгебра Рота — Бакстера веса $\lambda = 0$ имеет структуру дендриформной алгебры. Далее связь с дендриформными триалгебрами была установлена в работе [8]. Функторы между категориями алгебр Рота — Бакстера и категориями дендриформных диалгебр и триалгебр исследованы в [6].

В данной статье, в некотором роде продолжающей работу автора [9], исследуется естественный вопрос о связи алгебр Рота — Бакстера и диалгебр с ассоциативной бар-единицей. Более того, такую связь удается установить для более широкого класса так называемых 0-диалгебр, введенного П. С. Колесниковым в [2]. Эти результаты излагаются в § 1. В § 2 в связи с результатами § 1 исследуется вопрос о том, всегда ли произвольную ассоциативную диалгебру можно вложить в ассоциативную диалгебру с бар-единицей. До недавнего времени это был открытый вопрос. Мы даем положительный ответ на данный вопрос. Отдельно рассматривается случай свободных ассоциативных диалгебр и близких к ним диалгебр, при этом доказательство (конструкция присоединения) несколько отличается от общего случая. В § 3 мы рассматриваем понятие многообразия диалгебр в смысле П. С. Колесникова [2] и определяем эквивалентное понятие многообразия диалгебр в смысле Эйленберга. Понятие многообразия диалгебр в смысле Эйленберга позволяет определять не только классы диалгебр, заданные тождествами. Например, можно определить класс структуризуемых диалгебр: структуризуемые диалгебры наделены дополнительной унарной операцией — инволюцией, и тождества в них задаются на кососимметрических и симметрических элементах.

§ 1. 0-Диалгебры и алгебры Рота — Бакстера

Алгеброй Лейбница (правой) называется алгебра с тождеством $(xy)z = (xz)y + x(yz)$. Как известно, любая алгебра Лейбница может быть получена исходя из некоторой диалгебры [1]. Напомним данную конструкцию.

0-*Диалгеброй* над полем F называется векторное пространство над F с двумя бинарными операциями $\dashv$ и $\vdash$ такими, что

$$(x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z, \tag{2}$$

$$z \dashv (x \vdash y) = z \dashv (x \dashv y). \tag{3}$$

0-Диалгебра с двумя ассоциативными бинарными операциями $\dashv$ и $\vdash$, связанными также аксиомой

$$(x, y, z)_\times := (x \vdash y) \dashv z - x \vdash (y \dashv z) = 0, \tag{4}$$

называется *ассоциативной диалгеброй* (далее просто *диалгеброй*). Положим

$$(x, y, z)_\vdash := (x \vdash y) \vdash z - x \vdash (y \vdash z), \quad (x, y, z)_\dashv := (x \dashv y) \dashv z - x \dashv (y \dashv z).$$

Таким образом, в ассоциативной диалгебре помимо аксиом 0-диалгебры также выполнено

$$(x,y,z)_{\times}=0,\quad (x,y,z)_{\vdash}=0,\quad (x,y,z)_{\dashv}=0.$$

Простейшими примерами диалгебр являются ассоциативные алгебры ($a\dashv b=ab=a\vdash b$) и дифференциальные ассоциативные алгебры (A,d), $d^2=0$, $a\dashv b=a(db)$, $a\vdash b=(da)b$.

Если M — ассоциативный A-бимодуль и $f:M\mapsto A$ — бимодульный гомоморфизм, то M можно наделить структурой диалгебры, полагая $m_1\dashv m_2=m_1f(m_2)$ и $m_1\vdash m_2=f(m_1)m_2$.

Из [1] следует, что любое слово $x_{-m}\dots x_n$ в диалгебре может быть записано в виде $x_{-m}\vdash\dots\vdash x_0\dashv\dots\dashv x_n$, при этом расстановка скобок значения не имеет. Буква x_0 называется *средней*, и для ее нахождения в слове $u\dashv v$ (или $v\vdash u$) достаточно перейти к подслову u и продолжить процесс нахождения уже с этим подсловом. Мы будем обозначать такое слово через $x_{-m}\dots\dot{x}_0\dots x_n$.

Если D — некоторая диалгебра, то, определяя на D новую операцию $[\,,]$ правилом $[x,y]=\dot{x}y-y\dot{x}$, мы получаем алгебру Лейбница $(D,[\,,])$. При этом любая алгебра Лейбница может быть получена как подалгебра в соответствующей $(D,[\,,])$.

Бар-единицей (*ассоциативной бар-единицей*, *ēдиницей*) 0-диалгебры D назовем элемент $e\in D$ такой, что для любого $x\in D$ выполнено $\dot{x}e=x=e\dot{x}$, при этом e лежит в ассоциативном центре $\mathrm{ZAss}(D)$ диалгебры D, т. е.

$$(x,e,y)_{\times}=0,\quad (e,x,y)_{\dashv}=0,\quad (x,y,e)_{\vdash}=0$$

для любых $x,y\in D$. Ēдиница диалгебры не обязательно единственна. Унитальная диалгебра — это диалгебра с выделенной ēдиницей. Заметим, что если диалгебра имеет единицу, т. е. элемент $\epsilon\in D$, который удовлетворяет $\dot{\epsilon}x=x$ для любого $x\in D$, то операции в диалгебре совпадают, что следует из первой аксиомы диалгебры.

Наличие ēдиницы в диалгебре играет существенную роль. Так, например, если D — диалгебра с ēдиницей, то в гомологиях диалгебры $HY_n(D)=0$ для любого $n\geq 0$ [10].

Тензорный квадрат ассоциативной алгебры A наделяется структурой диалгебры:

$$(a\otimes b)\dashv(a'\otimes b')=a\otimes ba'b',\quad (a\otimes b)\vdash(a'\otimes b')=aba'\otimes b'.$$

Легко заметить, что для любого обратимого $x\in A$ элемент $x\otimes x^{-1}$ является ēдиницей.

Если V — векторное пространство над полем F, а ϕ — линейный функционал из V^*, то V наделяется структурой диалгебры (см. [11]) посредством

$$x\dashv y=\phi(y)x,\ \ x\vdash y=\phi(x)y.$$

Как легко видеть, любой элемент $y\notin\operatorname{Ker}\phi$ определяет ēдиницу: $e=\phi(y)^{-1}y$.

Если D — 0-диалгебра с ēдиницей e, то мы можем ввести на D новые операции:

$$x\star y=\mu_1\dot{x}y+\mu_2x\dot{y}+\mu_3\dot{y}x+\mu_4y\dot{x},\tag{5}$$

$$R(x)=\lambda_1x+\lambda_2x\dot{e}+\lambda_3\dot{e}x.\tag{6}$$

Обозначим полученную алгебру через $(D,\star,R)$. Нас интересуют необходимые и достаточные условия, при которых данная операции задает на D структуру алгебры Рота — Бакстера.

Заметим, что простейшим примером алгебры Рота — Бакстера может служить произвольная алгебра, в этом случае достаточно положить $R(x) = -\lambda x$. Обобщением этого примера являются алгебры Рота — Бакстера (неассоциативных) алгебр с левой (правой) единицей. А именно, пусть A — алгебра над Φ с левой (правой) единицей $e \in A$, лежащей в ассоциативном центре алгебры A. Зафиксируем произвольные $\alpha, \beta \in \Phi$ и введем на A новую операцию: $x \star y = \alpha xy + \beta yx$. Рассмотрим два способа определения оператора R:

1) $R(x) = -\lambda xe$ (для правой единицы: $R(x) = -\lambda ex$);

2) $R(x) = \lambda(xe - x)$ (для правой единицы: $R(x) = \lambda(ex - x)$).

Легко проверить, что во всех указанных случаях алгебра $(A, \star, R)$ является алгеброй Рота — Бакстера, которую назовем *алгеброй Рота — Бакстера* алгебры A с левой (правой) единицей первого (соответственно второго) типа.

Замечания. 1. Во втором случае имеем $R(x)R(y) = 0$, а также $R^n(x) = (-1)^{n+1}\lambda^n(xe - x)$.

2. Если A ассоциативна, то получаем примеры ассоциативных, йордановых и лиевых алгебр Рота — Бакстера.

3. Аналогично можно определить и тернарные алгебры Рота — Бакстера:

$$[R(x), R(y), R(z)] = R([R(x), R(y), z] + [R(x), y, R(z)] + [x, R(y), R(z)] - 2\lambda^2[x, y, z]),$$

также примером тернарной алгебры Рота — Бакстера может служить произвольная тернарная алгебра: $R(x) = \lambda x$.

Далее символом $\doteq$ будем обозначать равенство с точностью до некоторого ненулевого множителя из основного поля, а через $\chi(F)$ — характеристику поля F.

Возвращаясь к связи 0-диалгебр и алгебр Рота — Бакстера, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Операции* (5), (6) *задают нетривиальную структуру алгебры Рота — Бакстера веса* $\lambda \neq 0$ *на произвольной* 0*-диалгебре* D *с* $\bar{\text{е}}$*диницей* e *тогда и только тогда, когда* $(D, \star, R)$ *является алгеброй Рота — Бакстера алгебры* $(D, \dashv)$ $((D, \vdash))$ *с левой или правой единицей или операции заданы одним из следующих способов:*

$$x \star y = \alpha(\dot{x}y - x\dot{y}) + \beta(\dot{y}x - y\dot{x}), \quad R(x) \doteq x\dot{e} - \dot{e}x; \tag{7}$$

$$x \star y = \alpha(\dot{x}y - x\dot{y}) + \beta(\dot{y}x - y\dot{x}), \quad R(x) \doteq -\lambda x + \gamma(x\dot{e} - \dot{e}x) \tag{8}$$

для некоторых $\alpha, \beta, \gamma \in F$. *Алгебра* D *относительно операций* (5), (6) *является алгеброй Рота — Бакстера веса* $\lambda = 0$ *тогда и только тогда, когда* (5) *произвольна, а* $R(x) \doteq x\dot{e} - \dot{e}x$.

Доказательство. Обозначим $\bar{\lambda} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\mu_{ij} = \mu_i + \mu_j$. Используя правило умножения в диалгебре и тот факт, что e является $\bar{\text{е}}$диницей, слагаемые из (1) можно записать следующим образом (скобки убираются формальным приписыванием к каждому слагаемому):

$$\begin{aligned} R(x) \star R(y) =& \mu_1\bar{\lambda}(\lambda_1\dot{x} + \lambda_2 x\dot{e} + \lambda_3\dot{e}x)y + \mu_2\bar{\lambda}x(\lambda_1\dot{y} + \lambda_2 y\dot{e} + \lambda_3\dot{e}y) \\ &+ \mu_3\bar{\lambda}(\lambda_1\dot{y} + \lambda_2 y\dot{e} + \lambda_3\dot{e}y)x + \mu_4\bar{\lambda}y(\lambda_1\dot{x} + \lambda_2 x\dot{e} + \lambda_3\dot{e}x); \\ R(R(x) \star y) =& \lambda_1\mu_1(\lambda_1\dot{x} + \lambda_2 x\dot{e} + \lambda_3\dot{e}x)y + \lambda_1\mu_2\bar{\lambda}x\dot{y} + \lambda_1\mu_3\bar{\lambda}\dot{y}x \\ &+ \lambda_1\mu_4 y(\lambda_1\dot{x} + \lambda_2 x\dot{e} + \lambda_3\dot{e}x) + \bar{\lambda}(\lambda_2\mu_1 + \lambda_2\mu_2)(xy)\dot{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\bar\lambda(\lambda_2\mu_3+\lambda_2\mu_4)(yx)\dot e+\bar\lambda(\lambda_3\mu_1+\lambda_3\mu_2)\dot e(xy)+\bar\lambda(\lambda_3\mu_3+\lambda_3\mu_4)\dot e(yx);\\
R(x\star R(y)) =&\lambda_1\mu_1\bar\lambda\dot xy+\lambda_1\mu_2x(\lambda_1\dot y+\lambda_2y\dot e+\lambda_3\dot ey)\\
&+\lambda_1\mu_3(\lambda_1\dot y+\lambda_2y\dot e+\lambda_3\dot ey)x+\lambda_1\mu_4\bar\lambda y\dot x+\bar\lambda(\lambda_2\mu_1+\lambda_2\mu_2)(xy)\dot e\\
&+\bar\lambda(\lambda_2\mu_3+\lambda_2\mu_4)(yx)\dot e+\bar\lambda(\lambda_3\mu_1+\lambda_3\mu_2)\dot e(xy)+\bar\lambda(\lambda_3\mu_3+\lambda_3\mu_4)\dot e(yx);\\
\lambda R(xy) =&\lambda\lambda_1(\mu_1\dot xy+\mu_2x\dot y+\mu_3\dot yx+\mu_4y\dot x)+\lambda\lambda_2(\mu_{12}xy+\mu_{34}yx)\dot e\\
&+\lambda\lambda_3\dot e(\mu_{12}xy+\mu_{34}yx).
\end{aligned}$$

Рассматривая в качестве диалгебры тензорный квадрат свободной ассоциативной алгебры с единицей, замечаем, что в общем случае элементы $\dot xy$, $x\dot y$, $\dot yx$, $y\dot x$, $x\dot ey$, $y\dot ex$, $\dot exy$, $xy\dot e$, $\dot eyx$, $yx\dot e$ линейно независимы. Отсюда, рассматривая коэффициенты при $\dot xy$, $x\dot y$, $\dot yx$, $y\dot x$, имеем

$$\lambda_1\mu_1(\lambda+\lambda_1)=\lambda_1\mu_2(\lambda+\lambda_1)=\lambda_1\mu_3(\lambda+\lambda_1)=\lambda_1\mu_4(\lambda+\lambda_1), \tag{9}$$

а также, анализируя коэффициенты при $x\dot ey$ и т. д., получаем

$$x\dot ey:\bar\lambda(\mu_1\lambda_2+\mu_2\lambda_3)=\lambda_1(\mu_1\lambda_2+\mu_2\lambda_3), \tag{10}$$
$$y\dot ex:\bar\lambda(\mu_3\lambda_2+\mu_4\lambda_3)=\lambda_1(\mu_3\lambda_2+\mu_4\lambda_3), \tag{11}$$
$$\dot exy:0=\lambda_3(\mu_1\lambda_1+2\mu_2\bar\lambda+\mu_1\bar\lambda+\lambda\mu_{12}), \tag{12}$$
$$xy\dot e:0=\lambda_2(\mu_2\lambda_1+2\mu_1\bar\lambda+\mu_2\bar\lambda+\lambda\mu_{12}), \tag{13}$$
$$\dot eyx:0=\lambda_3(\mu_3\lambda_1+2\mu_4\bar\lambda+\mu_3\bar\lambda+\lambda\mu_{34}), \tag{14}$$
$$yx\dot e:0=\lambda_2(\mu_4\lambda_1+2\mu_3\bar\lambda+\mu_4\bar\lambda+\lambda\mu_{34}). \tag{15}$$

Если $\lambda+\lambda_1\neq 0$, то из (9) следует, что $\lambda_1=0$ (так как операции ненулевые). Тогда $\lambda\neq 0$. Если $\bar\lambda=0$, то из (12)–(15) вытекает, что $\mu_{12}=\mu_{34}=0$, и мы приходим к (7).

Если $\bar\lambda\neq 0$, то $\mu_1\lambda_2+\mu_2\lambda_3=\mu_3\lambda_2+\mu_4\lambda_3=0$ (из (10) и (11)). Далее, из (12) и (13) следует, что $\lambda_3((\mu_{12}+\mu_2)\bar\lambda+\lambda\mu_{12})=0$, $\lambda_2((\mu_{12}+\mu_1)\bar\lambda+\lambda\mu_{12})=0$. Складывая, получаем $\bar\lambda\lambda_3\mu_2+\lambda_3\mu_{12}(\lambda+\bar\lambda)+\lambda_2\mu_1\bar\lambda+\lambda_2\mu_{12}(\lambda+\bar\lambda)=\mu_{12}(\lambda+\bar\lambda)\bar\lambda=0$. Аналогично из (14) и (15) имеем $\mu_{34}(\lambda+\bar\lambda)\bar\lambda=0$. Если $\lambda\neq-\bar\lambda$, то $\mu_{12}=\mu_{34}=0$, и далее из (12) и (13) выводим $\lambda_3\mu_2=\lambda_2\mu_1=0$, т. е. $\mu_1=\mu_2=0$, а из (14) и (15) следует, что $\mu_3=\mu_4=0$. Таким образом, приходим к $\lambda=-\bar\lambda$, а также $\lambda_3\mu_2=\lambda_2\mu_1=\lambda_3\mu_4=\lambda_2\mu_3=0$. Итак, если $\lambda_2\neq 0$, то $\lambda_3=0$ и $\mu_1=\mu_3=0,\lambda_2=-\lambda$, а если $\lambda_3\neq 0$, то $\lambda_2=0$ и $\mu_2=\mu_4=0,\lambda_3=-\lambda$. В итоге приходим к алгебре Рота — Бакстера алгебры с левой (правой) единицей первого типа.

Осталось рассмотреть случай $\lambda+\lambda_1=0$. Если $\lambda=\lambda_1=0$ и $\bar\lambda=0$, то приходим к случаю алгебры Рота — Бакстера веса нуль из формулировки теоремы. Если $\lambda=\lambda_1=0$ и $\bar\lambda\neq 0$, то из (10) и (11) получаем $\mu_1\lambda_2+\mu_2\lambda_3=0=\mu_3\lambda_2+\mu_4\lambda_3$ и далее из (12)–(15) выводим тривиальность одной из операций.

Итак, далее считаем $\lambda+\lambda_1=0$, $\lambda,\lambda_1\neq 0$. Если $\bar\lambda=0$, то $\mu_1\lambda_2+\mu_2\lambda_3=0$, $\mu_4\lambda_3+\mu_3\lambda_2=0$, $\lambda_3(\mu_1\lambda_1+\mu_{12}\lambda)=\lambda_3\lambda\mu_2=0$; $\lambda_2(\mu_2\lambda_1+\mu_{12}\lambda)=\lambda_2\lambda\mu_1=0$; $\lambda_3(\mu_3\lambda_1+\mu_{34}\lambda)=\lambda_3\lambda\mu_4=0$; $\lambda_2(\mu_4\lambda_1+\mu_{34}\lambda)=\lambda_2\lambda\mu_3=0$.

Если $\lambda_2\neq 0$, то $\lambda_3=0,\mu_1=0,\mu_3=0$; если $\lambda_3\neq 0$, то $\lambda_2=0,\mu_2=0,\mu_4=0$. В итоге мы приходим к алгебре Рота — Бакстера алгебры с левой (правой) единицей второго типа.

Осталось рассмотреть случай $\lambda + \lambda_1 = 0$, $\lambda, \lambda_1, \bar{\lambda} \neq 0$. В этом случае уравнения (12)–(15) могут быть переписаны в виде

$$\begin{gathered}\lambda_3(\mu_1\bar{\lambda} + \mu_2(2\bar{\lambda} + \lambda)) = 0, \lambda_2(\mu_2\bar{\lambda} + \mu_1(2\bar{\lambda} + \lambda)) = 0,\\ \lambda_3(\mu_3\bar{\lambda} + \mu_4(2\bar{\lambda} + \lambda)) = 0, \lambda_2(\mu_4\bar{\lambda} + \mu_3(2\bar{\lambda} + \lambda)) = 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Так как $(\lambda_2, \lambda_3) \neq 0$, возможны следующие случаи.

I. $\lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$. Из (10) следует $\bar{\lambda}\mu_2 = \lambda_1\mu_2$. Тогда $\mu_1\bar{\lambda} + \mu_2\bar{\lambda} = 0$ и $\mu_1 = -\mu_2$; $\bar{\lambda}\mu_4 = \lambda_1\mu_4$ и $\mu_3 = -\mu_4$. Более того, $\bar{\lambda} = \lambda_1$, т. е. $\lambda_3 = 0$; противоречие.

II. $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$. Из (10) и (11) следует, что $\bar{\lambda}\mu_1 = \lambda_1\mu_1$, $\bar{\lambda}\mu_3 = \lambda_1\mu_3$. Поэтому $\bar{\lambda} = \lambda_1$ и $\lambda_2 = 0$; противоречие.

III. $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$. Из (16) получаем, что либо $3\bar{\lambda} = -\lambda$, либо $\bar{\lambda} = -\lambda$. Если $3\bar{\lambda} = -\lambda$, то $\chi(F) \neq 3$, и из (16) выводим $\mu_1 = \mu_2, \mu_3 = \mu_4$, а из (10), (11) теперь следует $\bar{\lambda} = \lambda_1 = -\lambda$, откуда $2\bar{\lambda} = 0$ и $\chi(F) = 2$. Если $\bar{\lambda} = -\lambda$, то $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\mu_1 = -\mu_2$, $\mu_3 = -\mu_4$, и мы приходим к операциям (8). $\square$

Замечания. 1. Если в качестве D взять ассоциативную диалгебру, то получаем алгебры Рота — Бакстера ассоциативных алгебр с односторонней единицей.

2. Полагая в (7) и (8) $\alpha = \beta$ или $\alpha = -\beta$, получаем примеры (анти)коммутативных алгебр Рота — Бакстера. Заметим также, что если задать на 0-диалгебре операцию

$$xy = \dot{x}y + y\dot{x} + a(x\dot{y} + \dot{y}x),$$

то в полученной алгебре выполняется тождество

$$a((xy)z - (yx)z) = (1-a)(z(xy) - z(yx)).$$

Благодаря результатам работы [2] мы можем построить алгебру Рота — Бакстера на произвольной унитальной конформной ассоциативной алгебре.

Конформной алгеброй называется векторное пространство C над полем характеристики 0 с линейным отображением $D : C \mapsto C$ и семейством линейных бинарных операций (n-произведений) $(\cdot_{(n)}\cdot) : C \otimes C \mapsto C$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ таких, что

(C1) для любых $a, b \in C$ существует только конечное число элементов $n \in \mathbb{Z}^+$ таких, что $a_{(n)}b \neq 0$;

(C2) $(Da_{(n)}b) = -n(a_{(n-1)}b)$;

(C3) $(a_{(n)}Db) = D(a_{(n)}b) + n(a_{(n-1)}b)$.

Конформная алгебра называется *ассоциативной*, если

$$(a_{(n)}b)_{(m)}c = \sum_{s\geq 0}(-1)^s \binom{n}{s} a_{(n-s)}(b_{(m+s)}c).$$

Как замечено в [2], если C — ассоциативная конформная алгебра, то пространство C можно наделить структурой диалгебры, полагая

$$a \vdash b = a_{(0)}b, \quad a \dashv b = \sum_{s\geq 0}(-1)^s \frac{D^s}{s!}(a_{(s)}b).$$

Теперь мы можем использовать теорему 1 для введения на унитальной конформной алгебре структуры алгебры Рота — Бакстера.

§ 2. Присоединение бар-единицы

В связи с теоремой 1 представляет большой интерес вопрос о том, всегда ли произвольную ассоциативную диалгебру можно вложить в ассоциативную диалгебру с $\bar{\text{е}}$диницей. До недавнего времени это был открытый вопрос. Следующая теорема дает положительный ответ на данный вопрос в случае свободных ассоциативных диалгебр. Заметим, что доказательство теоремы может быть дано очень кратко (не принимая во внимание проверку аксиом диалгебры), однако данное изложение дает подход к присоединению $\bar{\text{е}}$диницы в общем случае. Теорема 3 далее дает положительный ответ в общем случае. Отметим, что теорема 2 и предложение 1 дают другие способы присоединения $\bar{\text{е}}$диницы, чем теорема 3. Теорема 2 излагает внутренний подход к присоединению единицы, что может быть полезно и для других алгебраических структур типа Лодея.

Пусть D — диалгебра, определим *бар-аннулятор*: $\bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, D = \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}_{\dashv} D \cap \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}_{\vdash} D$, где

$$\bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}_{\dashv} D := \{x \in D : D \dashv x = 0\}, \quad \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}_{\vdash} D := \{x \in D : x \vdash D = 0\}.$$

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{FD}$ — свободная диалгебра. Тогда существует диалгебра D с $\bar{\text{е}}$диницей, содержащая $\mathcal{FD}$ в качестве поддиалгебры.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{FD}$ — свободная диалгебра от множества порождающих $\mathcal{X}$, D — искомая диалгебра и e — $\bar{\text{е}}$диница в D. Из аксиом диалгебры следует, что $y - (y \vdash e), y - (e \dashv y) \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, D$ для любого $y \in D$. Пусть $y \vdash e = y + a_y$, $e \dashv y = y + a^y$, где $a_y, a^y \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, D$. Из аксиом диалгебры получаем $y \vdash a, a \dashv y \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, D$ для любых $a \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, D$, $y \in D$, а также $e \dashv a_y = 0$, $a_y \vdash e = 0$. Таким образом, $\bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, D$ — это идеал в D. Из ассоциативности операций следует

$$a^y \dashv z = a^{y \dashv z}, \quad x \vdash a_y = a_{x \vdash y}, \tag{17}$$

а из дистрибутивности получаем $a_{x+y} = a_x + a_y$, $a^{x+y} = a^x + a^y$. Из (4) вытекает

$$(x \dashv z) + (a_x \dashv z) = (x \vdash z) + (x \vdash a^z) \tag{18}$$

для любых $x, z \in \mathcal{FD}$. Обозначим через $e\mathcal{FD}$ следующее пространство: $\mathcal{FD} \oplus \langle e \rangle \oplus \langle a_x, a^x : x \in \mathcal{FD} \rangle$. Таким образом, достаточно задать только левые умножения $a_x \dashv z$ на элементы a_x из $e\mathcal{FD}$ и $z \in \mathcal{FD}$. Из (2) и ассоциативности операции $\vdash$ выводим

$$a \dashv b = a \dashv (b \vdash e) = 0, \quad a \vdash b = (a \vdash e) \vdash b = 0$$

для любых $a, b \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, D$, т. е. умножение в $\bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, D$ нулевое.

Далее, из соотношений $e \dashv (x \dashv y - x \vdash y) = 0 = (x \dashv y - x \vdash y) \vdash e$ следует

$$(x \dashv y) - (x \vdash y) + (a^{x \dashv y}) - (a^{x \vdash y} = 0), \quad (x \dashv y) - (x \vdash y) + (a_{x \dashv y}) - (a_{x \vdash y} = 0) \tag{19}$$

для любых $x, y \in \mathcal{FD}$. Таким образом, необходимо только определить умножение на слова $a_{\dot{x}_1 \dots x_n}$, где $x_i \in \mathcal{X}$. Из (2) и (4) вытекает

$$a_x \dashv (y \dashv z - y \vdash z) = 0, \quad (y \dashv z - y \vdash z) \vdash a^x = 0, \tag{20}$$

т. е. достаточно определить только умножения $a_x \dashv \dot{x}_1 \dots x_n$. Из (19) следуют равенства

$$a^{x_1 \dots \dot{x}_i \dots x_n} = a^{\dot{x}_1 \dots x_n} + \dot{x}_1 \dots x_n - x_1 \dots \dot{x}_i \dots x_n,$$
$$a_{x_1 \dots \dot{x}_i \dots x_n} = a_{\dot{x}_1 \dots x_n} + \dot{x}_1 \dots x_n - x_1 \dots \dot{x}_i \dots x_n.$$

Из (20) получаем

$$a_x \dashv y_1 \dots \dot{y}_j \dots y_k = a_x \dashv \dot{y}_1 \dots y_k, \quad x_1 \dots \dot{x}_i \dots x_n \vdash a^y = \dot{x}_1 \dots x_n \vdash a^y.$$

Если определим

$$\dot{x}_1 \dots x_n \vdash a^{\dot{y}_1 \dots y_k} = a_{\dot{x}_1 \dots x_n} \dashv \dot{y}_1 \dots y_k - x_1 \dots x_n \dot{y}_1 \dots y_k + \dot{x}_1 \dots x_n y_1 \dots y_k,$$

то формула (18) справедлива для любых $x, z \in \mathcal{FD}$.

Если положим $a^{\dot{x}_1 \dots x_n}$ все нулевыми, то получим, что алфавит достаточно расширить буквами $\{e, a_{\dot{x}_1 \dots x_n}\}$. Итак, добавляя данный алфавит и определяя умножение, как выше, получаем алгебраическую систему, на которой выполняются все аксиомы диалгебры.

Введем следующее обозначение: если $x = x_1 \dots \dot{x}_i \dots x_n \in \mathcal{FD}$, то через $\dot{x}$ будем обозначать элемент $\dot{x}_1 \dots x_i \dots x_n \in \mathcal{FD}$. В итоге в качестве D можем взять пространство $\mathcal{FD} \oplus \langle e \rangle \oplus \langle a_{\dot{x}} : x \in \mathcal{FD} \rangle$, положить, что a_x принадлежит $\bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, D$ и e действует как $\bar{\text{e}}$диница, и определить (ненулевые) операции следующим образом:

$$e \dashv x = \dot{x}, \quad x \vdash e = \dot{x} + a_{\dot{x}}, \quad a_x \dashv y = x\dot{y} - \dot{x}y, \quad y \vdash a_x = a_{\dot{y}x} + \dot{y}x - y\dot{x}.$$

Заметим, что мы всегда можем считать $x = \dot{x}$, $y = \dot{y}$. Легко проверить, что относительно данных операций D становится диалгеброй с $\bar{\text{e}}$диницей, содержащей $\mathcal{FD}$ в качестве поддиалгебры. $\square$

Теорему о присоединении $\bar{\text{e}}$диницы к свободной диалгебре можно обобщить следующим образом.

Предложение 1. *Пусть $\mathscr{A}$ — диалгебра, $\phi : \mathcal{FD}(X) \mapsto \mathscr{A}$ — гомоморфизм свободной диалгебры на $\mathscr{A}$ и $\theta : \mathcal{FD}(X) \mapsto \mathscr{F}\{X\}$ — стандартный гомоморфизм в свободную ассоциативную алгебру ($\theta(x) = \dot{x}$). Если $\theta(\ker \phi) \subseteq \ker \phi$, то к $\mathscr{A}$ можно присоединить $\bar{\text{e}}$диницу.*

Доказательство. Добавим к $\mathscr{A}$ следующие независимые базисные элементы: $\{e, a_{(\dot{x})} : x \in \mathcal{FD}(X)\}$, где $(\dot{x})$ обозначает смежный класс $\dot{x} + \ker \phi$, а $\dot{x} = \theta(x)$. Положим $\mathscr{A}^e = \mathscr{A} \oplus \langle e, a_{(\dot{x})} : x \in \mathcal{FD}(X) \rangle_F$ и определим на $\mathscr{A}^e$ операции $\dashv$ и $\vdash$ так, чтобы $\mathscr{A}$ являлась поддиалгеброй в $\mathscr{A}^e$, $a_{(\dot{x})} \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, \mathscr{A}^e$, e была $\bar{\text{e}}$диницей и, кроме того,

$$e \dashv \phi(x) = \phi(\dot{x}), \ \phi(x) \vdash e = \phi(\dot{x}) + a_{(\dot{x})},$$

$$a_y \dashv \phi(x) = \phi(y\dot{x} - \dot{y}x), \ \phi(x) \vdash a_{(\dot{x})} = a_{\dot{x}y} + \phi(\dot{x}y - x\dot{y}).$$

Из условия следует, что $x - y \in \ker \phi \Leftrightarrow \dot{x} - \dot{y} \in \ker \phi$, откуда вытекает корректность определения операций. Аксиомы диалгебры достаточно проверить только для случаев, когда один из элементов равен e. Поскольку операции заданы аналогично тому, как это было в теореме 2, доказательство может быть основано на доказательстве теоремы 2. $\square$

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{A}$ — диалгебра. Тогда существует диалгебра $\overline{\mathscr{A}}$ с $\bar{\text{e}}$диницей, содержащая $\mathscr{A}$ в качестве поддиалгебры.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{S}$ — подпространство в $\mathscr{A}$ такое, что $\mathscr{A} = \mathscr{S} \oplus \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, \mathscr{A}$. Пусть $\{e_i : i \in I\}$ — некоторая база $\mathscr{S}$. Введем множество символов $\{a_x : x = e_i, \, i \in I\}$. Для любого $x \in \mathscr{S}$ положим $a_x = \sum \alpha_i a_{e_i}$, если $x = \sum \alpha_i e_i$. Для произвольного $x \in \mathscr{A}$ определим $a_x = a_{x_1} - x_0$, если $x = x_1 + x_0$, $x_1 \in \mathscr{S}$,

$x_0 \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\,\mathscr{A}$. Добавим к алгебре $\mathscr{A}$ как новые базисные элементы символы $\{a_{e_i} : i \in I\}$ и символ e. Полученное векторное пространство обозначим через $\overline{\mathscr{A}}$. Определим на $\overline{\mathscr{A}}$ операции $\dashv$ и $\vdash$ так, чтобы $\mathscr{A}$ являлась поддиалгеброй в $\overline{\mathscr{A}}$, для e выполнялись аксиомы ēдиницы, $a_{e_i} \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\,\overline{\mathscr{A}}$ и, кроме того, положим

$$x \vdash a_{e_i} = a_{x \vdash e_i},\ a_{e_i} \dashv x = a_{e_i \dashv x},\ e \dashv x = x \vdash e = a_x + x, \tag{21}$$

что далее продолжим по дистрибутивности (все неуказанные произведения считаются нулевыми). Из определения a_x следует, что $a_{\alpha x + \beta y} = \alpha a_x + \beta a_y$, откуда получаем справедливость (21) для произвольных элементов a_y:

$$x \vdash a_y = a_{x \vdash y},\ a_y \dashv x = a_{y \dashv x}. \tag{22}$$

Проверим, что относительно данных операций $\overline{\mathscr{A}}$ становится диалгеброй. Заметим, что если $x \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\,\mathscr{A}$, то $x \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\,\overline{\mathscr{A}}$, поэтому $a_x \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\,\overline{\mathscr{A}}$ для любого $x \in \mathscr{A}$. Следовательно, если символ a_x появляется в аксиоме диалгебры вместе с a_y, то аксиомы верны. Более того, из (22) следует, что достаточно проверить аксиомы диалгебры только в том случае, когда в них входит e. Имеем

$$(e \dashv y) \dashv z = (y + a_y) \dashv z = y \dashv z + a_{y \dashv z} = e \dashv (y \dashv z),$$

$$(x \dashv e) \dashv z = x \dashv z = x \dashv (e \dashv z), \quad (x \dashv y) \dashv e = x \dashv y = x \dashv (y \dashv e),$$

$$(e \dashv e) \dashv z = e \dashv z = e \dashv (e \dashv z), \quad (e \dashv y) \dashv e = e \dashv y = e \dashv (y \dashv e),$$

$$(x \dashv e) \dashv e = x \dashv e = x \dashv (e \dashv e).$$

Проверим, к примеру, еще аксиому $(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z)$:

$$(e \dashv y) \dashv z = y \dashv z + a_{y \dashv z} = e \dashv (y \vdash z) = a_{y \vdash z} + y \vdash z,$$

что верно, поскольку $a_{y \dashv z - y \vdash z} = -(y \dashv z - y \vdash z)$ и $y \dashv z - y \vdash z \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\,\overline{\mathscr{A}}$. Далее,

$$(x \dashv e) \dashv z = x \dashv z = x \dashv (e \vdash z),\ (x \dashv y) \dashv e = x \dashv y = x \dashv (y \vdash e) = x \dashv (y + a_y),$$

$$(e \dashv y) \dashv e = e \dashv y = e \dashv (y \vdash e) = e \dashv (y + a_y).$$

Остальные аксиомы проверяются аналогично. Таким образом, $\overline{\mathscr{A}}$ — диалгебра с ēдиницей, содержащая $\mathscr{A}$ в качестве поддиалгебры. $\square$

Отметим некоторые частные случаи. Рассмотрим случай, когда диалгебра представима в виде $A = A_0 \oplus \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\,A$, где A_0 — поддиалгебра. В этом случае на A_0 операции совпадают и A_0 является ассоциативной алгеброй. Поэтому к A_0 можно присоединить единицу e. Продолжим действие e на A правилом: $e \dashv a = a_0 = a \vdash e$, если $a = a_0 + \bar{a}$, где $a_0 \in A_0$, $\bar{a} \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\,A$. Легко видеть, что $A^e = A \oplus Fe$ является ассоциативной диалгеброй с ēдиницей e.

Отметим, что в общем случае такая подалгебра A_0 не выделяется в A. В качестве примера можно рассмотреть тензорный квадрат алгебры усеченных многочленов: $A = F_3[x] \otimes F_3[x]$. Ясно, что

$$\bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\,A = \langle 1 \otimes x - x \otimes 1,\ 1 \otimes x^2 - x^2 \otimes 1,\ 1 \otimes x^2 - x \otimes x,\ x \otimes x^2,\ x^2 \otimes x,\ x^2 \otimes x^2 \rangle.$$

Базис e_1, e_2, e_3 в A_0 можно выбрать так, что для некоторых $a_i \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\,A$

$$e_1 = 1 \otimes 1 + a_1, \quad e_2 = 1 \otimes x + a_2, \quad e_3 = 1 \otimes x^2 + a_3.$$

Тогда

$$e_2 \vdash e_1 = x \otimes 1 + ((1 \otimes x) \vdash a_1), \quad e_1 \dashv e_2 = 1 \otimes x + (a_1 \dashv (1 \otimes x)),$$

что невозможно при любом выборе $a_1 \in \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, A$.

Рассмотрим еще случай, когда $A = \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, A$. В этом случае операции на A нулевые, т. е. A является ассоциативной алгеброй и к ней можно присоединить единицу.

Таким образом, в некоторых вырожденных случаях к диалгебре можно присоединить $\bar{\text{е}}$диницу, добавив, как и в случае ассоциативных алгебр, лишь одномерное подпространство. Однако в общем случае мы должны добавить вырожденную часть, равномощную исходной диалгебре.

Отметим еще, что в свободной диалгебре $\bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, \mathcal{FD} = \langle \dot{x}y - x\dot{y} \rangle$. Однако в общем случае это не так. В качестве примера достаточно рассмотреть прямую сумму свободной диалгебры $\mathcal{FD}$ и диалгебры с нулевым умножением.

§ 3. Многообразия диалгебр в смысле Эйленберга

В этом параграфе рассмотрим понятие многообразия диалгебр [2] и определим эквивалентное понятие многообразия диалгебр в смысле Эйленберга. Пусть Var — однородное многообразие, определенное семейством $\Sigma := \{t(x_1, \dots, x_n)\}$ полилинейных тождеств от переменных $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. П. С. Колесников [2], используя язык операд, определил понятие Var-диалгебры. В той же статье он показал, что на языке тождеств определение Var-диалгебры может быть дано следующим образом.

Определим линейное отображение Ψ_n^i из множества полилинейных тождеств алгебры в множество тождеств диалгебры (дитождеств) следующим образом: если $v = (x_{i_1} \dots x_i \dots x_{i_n})$ — моном с некоторой расстановкой скобок, то $\Psi_n^i(v) = (x_{i_1} \vdash \dots x_i \dots \dashv x_{i_n})$ — димоном с той же расстановкой скобок.

Теорема [2]. *Диалгебра A принадлежит многообразию* Var *тогда и только тогда, когда она является* 0*-диалгеброй и удовлетворяет дитождествам* $\Psi_n^i(t)$, $t \in \Sigma$, $n = \deg t$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим некоторые примеры Var-диалгебр [2].

Ассоциативные диалгебры: $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3)\}$. Тогда

$$\Psi_3^1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)_\dashv, \quad \Psi_3^2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)_\times,$$

$$\Psi_3^3(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)_\vdash,$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ и $(x_1, x_2, x_3)_\times = (x_1 \vdash x_2) \dashv x_3 - x_1 \vdash (x_2 \dashv x_3)$.

Коммутативные диалгебры: $\Sigma = \{x_1 x_2 - x_2 x_1\}$. В диалгебрах получаем

$$x_1 \vdash x_2 - x_2 \dashv x_1.$$

Следовательно, коммутативная диалгебра A может быть рассмотрена как обычная алгебра относительно операции $ab = a \vdash b$, $a, b \in A$. В этом случае мы получаем алгебру с тождеством

$$[x_1, x_2] x_3 = 0.$$

Альтернативные диалгебры:

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) + (x_2, x_1, x_3),\ (x_1, x_2, x_3) + (x_1, x_3, x_2)\}.$$

Определяющие тождества приводят к следующим дитождествам:

$$(x_1, x_2, x_3)_{\dashv} + (x_2, x_1, x_3)_{\times}, \quad (x_1, x_2, x_3)_{\vdash} + (x_2, x_1, x_3)_{\vdash},$$

$$(x_1, x_2, x_3)_{\dashv} + (x_1, x_3, x_2)_{\dashv}, \quad (x_1, x_2, x_3)_{\times} + (x_1, x_3, x_2)_{\vdash},$$

которые эквивалентны дитождествам из [12].

Диалгебры Ли: $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) - x_2(x_1x_3), x_1x_2 + x_2x_1\}$.

Соответствующие дитождества диалгебры включают $x_1 \dashv x_2 + x_2 \vdash x_1$. Диалгебра Ли, рассмотренная как обычная алгебра относительно $[a, b] = a \dashv b$, является в точности правой алгеброй Лейбница.

Йордановы диалгебры: $\Sigma=\{xy-yx,\ x_1(x_2(x_3x_4))+(x_2(x_1x_3))x_4+x_3(x_2(x_1x_4)) = (x_1x_2)(x_3x_4) + (x_1x_3)(x_2x_4) + (x_3x_2)(x_1x_4)\}$.

Получаем, что йорданова диалгебра удовлетворяет соотношению $x_1 \dashv x_2 = x_2 \vdash x_1$ и четырем дитождествам. Если мы перепишем эти дитождества, используя операцию $xy = x \dashv y$, то получим тождества (оставим нахождение их явного вида в качестве упражнения), которые определяют многообразие алгебр, связанное с многообразием йордановых алгебр точно так же, как и алгебры Лейбница с алгебрами Ли. Отметим, что можно доказать эквивалентность (см. [13]) полученной системы тождеств следующим тождествам:

$$a(bc) = a(cb), \quad (ba)a^2 = (ba^2)a, \quad (a, b^2, c) = 2(a, b, c)b,$$

определяющим квазийордановы алгебры [11].

Напомним определение бимодуля в смысле Эйленберга. Пусть Var — некоторое многообразие (супер)алгебр, $A \in \mathrm{Var}$. Var-*бимодулем в смысле Эйленберга* называется векторное пространство M, на котором определены действия $am, ma \in M$ элементов из A таким образом, что расщепляемое нулевое расширение $E = A \oplus M$ является Var-(супер)алгеброй относительно стандартного произведения

$$(a, m)(b, n) = (ab, an + mb).$$

Пусть D — 0-диалгебра, $\widetilde{D}$ — изоморфная копия D как векторного пространства, $I = \mathrm{id}\langle x \dashv y - x \vdash y : x, y \in D\rangle$. Тогда правило

$$\bar{d_1} \cdot \tilde{d_2} = \widetilde{d_1 \vdash d_2}, \quad \tilde{d_2} \cdot \bar{d_1} = \widetilde{d_2 \dashv d_1}, \quad d_1, d_2 \in D, \tag{23}$$

корректно определяет бимодульное действие $\overline{D}$ на $\widetilde{D}$. Действительно, для всех $a, b, m \in D$ имеем

$$(a \dashv b - a \vdash b) \vdash m = 0, \quad m \dashv (a \dashv b - a \vdash b) = 0. \tag{24}$$

Обратно, предполагая действие (23) корректно заданным, приходим к аксиомам 0-диалгебры.

Определение. 0-Диалгебра D называется Var-*диалгеброй в смысле Эйленберга*, если $\overline{D} := D/I \in \mathrm{Var}$ и $\widetilde{D}$ относительно операций (23) является $\overline{D}$-бимодулем многообразия Var в смысле Эйленберга.

Теорема 4. *0-Диалгебра D является Var-диалгеброй в смысле Колесникова тогда и только тогда, когда D является Var-диалгеброй в смысле Эйленберга.*

Доказательство. Покажем, что $I \subseteq \bar{\mathrm{Ann}}\, D$. Используя равенства

$$\begin{aligned}(a \dashv b - a \vdash b) \dashv m =&(a \dashv b) \dashv m - (a \dashv b) \vdash m + (a \dashv b) \vdash m - (a \vdash b) \dashv m\\ =&(a \dashv b) \dashv m - (a \dashv b) \vdash m + (a \vdash b) \vdash m - (a \vdash b) \dashv m,\\ m \vdash (a \dashv b - a \vdash b) =&m \vdash (a \dashv b) - m \dashv (a \dashv b) + m \dashv (a \vdash b) - m \vdash (a \vdash b)\end{aligned}$$

и (24), получаем, что I является линейной оболочкой элементов вида $x \dashv y - x \vdash y$, $x, y \in D$, и $I \subseteq \bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, D$.

Если Var задано полилинейными тождествами Σ, то для любого тождества $t(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma$ и для любых $a_1, \dots, a_n \in D$ рассмотрим $b = \Psi_n^i(t)(a_1, \dots, a_n) \in D$ и $q = t(\bar{a}_1, \dots, \tilde{a}_i, \dots, \bar{a}_n) \in \widetilde{D}$. Согласно определению оператора Ψ_n^i и бимодульного действия (24) имеем равенство $\tilde{b} = q$. Заметим также, что $t(b_1, \dots, b_n) = 0$ для $b_i \in \overline{D} \oplus \widetilde{D}$ при условии, что более одного аргумента лежат в $\widetilde{D}$. Отсюда вытекает искомая эквивалентность. $\square$

Замечания. 1. Если $I = 0$, то $x \dashv y = y \vdash x$ для любых $x, y \in D$ и $D \in \mathrm{Var}$.

2. Если $I = D$, то $\bar{\mathrm{A}}\mathrm{nn}\, D = D$ и $x \dashv y = y \vdash x = 0$ для любых $x, y \in D$.

3. Если некоторая Var-диалгебра обладает единицей, то операции в ней совпадают и она является Var-алгеброй.

Отметим, что понятие многообразия диалгебр в смысле Эйленберга позволяет определять не только классы диалгебр, заданные тождествами. Например, можно определить класс структуризуемых диалгебр (отличие от обычных — наличие инволюции, а также тождества заданы на (косо)симметрических элементах).

Структуризуемые диалгебры. Напомним определения структуризуемой алгебры и структуризуемого бимодуля в смысле Эйленберга.

Пусть A — алгебра с инволюцией $\bar{\ }$ над полем F характеристики $\neq 2, 3$. Тогда $A = H \oplus S$, где $H = \{a \in A : \bar{a} = a\}$ и $S = \{s \in A : \bar{s} = -s\}$.

Алгебра $(A, \bar{\ })$ называется *структуризуемой*, если для любых $s \in S$, $x, y \in A$ и $a, b, c, d \in H$ выполняется

$$(s, x, y) = -(x, s, y), \quad (a, b, c) - (c, a, b) = (b, a, c) - (c, b, a), \quad \Sigma_{a,b,c} f(a, b, c, d) = 0,$$

где $f(a, b, c, d) = \frac{2}{3}[d, [ab, c]] + (d, ab, c) + (d, a, bc)$ и оператор $\Sigma_{a,b,c}$ действует подстановками (учитывая знаки) из S_3 на a, b, c.

Пусть M — векторное пространство с унарной операцией $\bar{\ }$ (инволюцией) такой, что $\bar{\bar{m}} = m$ для любого $m \in M$. Пространство M называется *бимодулем над структуризуемой алгеброй* $(A, \bar{\ })$ *в смысле Эйленберга*, если задано двустороннее линейное действие A на M, т. е. линейные отображения $A \otimes M \mapsto M$ и $M \otimes A \mapsto M$, такое, что $\overline{ma} = \bar{a}\overline{m}$, $\overline{am} = \overline{m}\bar{a}$ и алгебра $(E, \bar{\ }) = (A, \bar{\ }) \oplus (M, \bar{\ })$ является структуризуемой относительно операций:

$$(a, m)(b, n) = (ab, an + mb), \quad \overline{(a, m)} = (\bar{a}, \overline{m}).$$

Пусть D — диалгебра с инволюцией, т. е., в частности, $\bar{\bar{a}} = a$ для любого $a \in D$ и $D = H \oplus S$, где $H = \{a \in D : \bar{a} = a\}$, $S = \{s \in D : \bar{s} = -s\}$. Будем говорить, что инволюция является *инволюцией первого рода*, если $\overline{a \dashv b} = \bar{b} \dashv \bar{a}$, $\overline{a \vdash b} = \bar{b} \vdash \bar{a}$ для любых $a, b \in D$, и *второго рода*, если $\overline{a \dashv b} = \bar{b} \vdash \bar{a}$, $\overline{a \vdash b} = \bar{b} \dashv \bar{a}$ для любых $a, b \in D$.

Если D — это 0-диалгебра с инволюцией, то идеал I из теоремы 4 инвариантен относительно инволюции и потому фактор-диалгебра $\overline{D} = D/I$ также имеет индуцированную инволюцию. Более того, $\widetilde{D}$ с индуцированной инволюцией является структуризуемым $\overline{D}$-бимодулем тогда и только тогда, когда для любых $s \in S$ и $a, b, c, d \in H$ выполнены дитождества

$$(s, x, y)_{\dashv} = -(x, s, y)_{\times}, \quad (s, x, y)_{\times} = -(x, s, y)_{\dashv}, \quad (s, x, y)_{\vdash} = -(x, s, y)_{\vdash},$$

$$(a, b, c)_{\dashv} - (c, a, b)_{\times} = (b, a, c)_{\times} - (c, b, a)_{\vdash},$$

$$(a,b,c)_\times-(c,a,b)_\vdash=(b,a,c)_\dashv-(c,b,a)_\times,$$

$$\Psi_4^i\Sigma_{a,b,c}f(a,b,c,d)=0,\quad i=1,2,3,4.$$

Выпишем явно, к примеру, $\Psi_4^1\Sigma_{a,b,c}f(a,b,c,d)$:

$$\Sigma_{b,c}\biggl(\frac{2}{3}[[\dot ab,c]_\dashv,d]_\dashv-(d,\dot ab,c)_\times-(d,a,\dot bc)_\times+\frac{2}{3}[[b\dot c,a]_\vdash,d]_\dashv-(d,b\dot c,a)_\vdash-(d,b,c\dot a)_\vdash$$
$$+\frac{2}{3}[[c\dot a,b]_\dashv,d]_\dashv-(d,c\dot a,b)_\times-(d,c,\dot ab)_\vdash\biggr),$$

где оператор $\Sigma_{b,c}$ действует подстановками (учитывая знаки) из S_2 на b,c, $[x,y]_\vdash=x\vdash y-y\dashv x$, $[x,y]_\dashv=x\dashv y-y\vdash x$.

Аналогично мы можем ввести понятие *супердиалгебры* многообразия. Пусть D — $\mathbb{Z}_2$-градуированное пространство с операциями $\dashv$ и $\vdash$ (супердиалгебра). Предположим, что I и $\widetilde D$ определены, как и раньше, и Var — некоторое однородное многообразие супералгебр. Тогда будем говорить, что D является Var-*супердиалгеброй* тогда и только тогда, когда $\overline D=D/I\in\mathrm{Var}$ и $\widetilde D$ является $\overline D$-бимодулем многообразия Var в смысле Эйленберга, где

$$\bar d_1\cdot\tilde d_2=\widetilde{d_1\vdash d_2},\quad \tilde d_2\cdot\bar d_1=\widetilde{d_2\dashv d_1}.$$

Пусть Γ — алгебра Грассмана, D — произвольная Var-супердиалгебра и $\Gamma(D)=(D_{\bar 0}\otimes\Gamma_{\bar 0})\oplus(D_{\bar 1}\otimes\Gamma_{\bar 1})$ — грассманова оболочка D, т. е.

$$(d_1\otimes\xi_1)\star(d_2\otimes\xi_2)=(-1)^{p(d_1)p(d_2)}(d_1\star d_2)\otimes(\xi_1\xi_2),$$

где $d_i\in D$, $\xi_i\in\Gamma$, $p(d_i)$ — четность d_i ($p(d_i)=j$, если $d_i\in D_{\bar j}$), $\star\in\{\vdash,\dashv\}$. Тогда непосредственно из определений вытекает следующее

Предложение 2. *D является* Var-*супердиалгеброй тогда и только тогда, когда $\Gamma(D)$ является* Var-*диалгеброй.*

Аналогично присоединению ēдиницы к ассоциативной диалгебре мы можем поступить с альтернативными диалгебрами D. Заметим, что по определению $e\in\mathrm{ZAss}(D)$. В этом случае доказательство полностью повторяет доказательство в ассоциативном случае.

Как и в случае обычных алгебр, будем говорить, что многообразие диалгебр Var является *унитальным*, если любая диалгебра из Var является поддиалгеброй некоторой диалгебры из Var с ēдиницей. Тогда окончательно полученные результаты о присоединении ēдиницы можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 5. *Многообразие альтернативных диалгебр является унитальным.*

В заключение я хочу поблагодарить П. С. Колесникова за полезное обсуждение полученных результатов, рецензента — за множество ценных замечаний, а Л. А. Бокутя, В. Н. Желябина и И. П. Шестакова — за внимание к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Loday J.-L.* Dialgebras // J.-L. Loday, A. Frabetti, F. Chapoton, F. Goichot. Dialgebras and related operads. Berlin: Springer-Verl., 2001. P. 7–66. (Lect. Notes Math.; 1763).

2. *Колесников П. С.* Многообразия диалгебр и конформные алгебры // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 322–329.

3. *Baxter G.* An analitic problem whose solution follows from a simple algebraic identity // Pacific J. Math. 1960. V. 10. P. 731–742.

4. *Rota G. C.* Baxter algebras and combinatorial identities. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. V. 75. P. 325–329.

5. *Rota G. C.* Gian-Carlo Rota on combinatorics, introductory papers and commentaries. Boston: Birkhäuser, 1995.

6. *Guo L., Ebrahimi-Fard K.* Rota–Baxter algebras and dendriform algebras // J. Pure Appl. Algebra. 2000. V. 212. P. 320–339.

7. *Aguiar M.* Pre-Poisson algebras // Lett. Math. Phys. 2000. V. 54, N 4. P. 263–277.

8. *Ebrahimi-Fard K.* Loday-type algebras and the Rota–Baxter relation // Lett. Math. Phys. 2002. V. 61, N 2. P. 139–147.

9. *Пожидаев А. П.* Диалгебры и связанные с ними тройные системы // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 870–885.

10. *Frabetti A.* Dialgebra (co)homology with coefficients // J.-L. Loday, A. Frabetti, F. Chapoton, F. Goichot. Dialgebras and related operads. Berlin: Springer-Verl., 2001 . P. 67–103. (Lect. Notes Math.; 1763).

11. *Velásquez R., Felipe R.* Quasi-Jordan algebras // Commun. Algebra. 2000. V. 36, N 4. P. 1580–1602.

12. *Liu D.* Steinberg-Leibniz algebras and superalgebras // J. Algebra. 2005. V. 283, N 1. P. 199–221.

13. *Bremner M. R., Peresi L. A.* Special identities for quasi-Jordan algebras. Saskatchevan, 2009. (Preprint / Univ. of Saskatchevan).

Статья поступила 28 декабря 2008 г., окончательный вариант — 7 июля 2009 г.

Пожидаев Александр Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
app@math.nsc.ru