*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6*

*УДК 512.545*

# О МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ $m$–ГРУПП

**А. В. Зенков**

**Аннотация.** Изучается решетка многообразий $m$-групп. Основным результатом является описание накрытий наименьшего нетривиального многообразия $m$-групп.

**Ключевые слова:** $m$-группа, многообразие, накрытие, решетка.

## 1. Введение

Напомним, что *$m$-группой* называется алгебраическая система $G$ сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, _* \rangle$, где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является $\ell$-группой и одноместная операция $_*$ — автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т. е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения

$$(xy)_* = x_* y_*, (x_*)_* = x, (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

Класс $\mathscr{M}$ всех $m$-групп образует многообразие сигнатуры $m$. Множество всех многообразий $m$-групп $M$ является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, $M$ есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий $m$-групп. Тривиальное многообразие $m$-групп $\mathscr{E}_m$ является наименьшим элементом $M$. Будем говорить, что многообразие $m$-групп $\mathscr{X}$ является *накрытием* многообразия $m$-групп $\mathscr{Y}$ ($\mathscr{X}$ накрывает $\mathscr{Y}$), если $\mathscr{Y} \subsetneqq \mathscr{X}$ и для любого многообразия $m$-групп $\mathscr{Z}$ такого, что $\mathscr{Y} \subseteqq \mathscr{Z} \subseteqq \mathscr{X}$, выполнено $\mathscr{Z} = \mathscr{Y}$ либо $\mathscr{Z} = \mathscr{X}$. В [1], в частности, доказано, что многообразие $m$-групп $\mathscr{I}$, определяемое тождеством $x_* = x^{-1}$, является накрытием $\mathscr{E}_m$ и что многообразие всех абелевых $m$-групп $\mathscr{A}_m$ накрывает $\mathscr{I}$. В работе [2] построено неабелево накрытие $\mathscr{S}$ многообразия $\mathscr{I}$. В данной работе доказано, что многообразия $\mathscr{A}_m$ и $\mathscr{S}$ являются единственными накрытиями $\mathscr{I}$ (теорема 2.10).

Все необходимые сведения по теории групп и решеточно упорядоченных групп можно найти в книгах [3, 4] соответственно.

## 2. Основной результат

В дальнейшем $m$-группу $G$ с отмеченным автоморфизмом $_*$ будем записывать как пару $(G, {}_*)$. Рассмотрим группу

$$S_2 = \big\langle a_0, a_1, b \mid [a_0, a_1] = e, a_0^b = a_1, a_1^b = a_0 \big\rangle.$$

Если $g \in S_2$, то $g$ представим, причем единственным способом, в виде $g = b^k a_0^m a_1^n$, $k, m, n \in \mathbf{Z}$. Относительно лексикографического порядка, т. е. $g \geq e \Leftrightarrow k > 0$ или $k = 0, m \geq 0, n \geq 0$, $S_2$ является $\ell$-группой. Определим отображение $_* : S_2 \to S_2$ по правилу

$$(g)_* = b^{-k} a_0^{-m} a_1^{-n}.$$

Тогда $(S_2, {}_*)$ будет $m$-группой. Пусть $\mathscr{S} = \mathrm{var}_m((S_2, {}_*))$. В [2] доказано, что $\mathscr{S}$ является накрытием $\mathscr{I}$.

Пусть $(G, \geq)$ — некоторая $\ell$-группа. Через $G^*$ обозначим $\ell$-группу, полученную из $G$ путем обращения порядка. Относительно координатного порядка прямое произведение $G \times G^*$ является $\ell$-группой. Пусть $(x, y) \in G \times G^*$. Определим отображение $\mathrm{Exch} : G \times G^* \to G \times G^*$ по правилу $(x, y)\,\mathrm{Exch} = (y, x)$. Тогда пара $(G \times G^*, \mathrm{Exch})$ будет $m$-группой. Хорошо известно (см., например, [1]), что многообразие всех абелевых $m$-групп $\mathscr{A}_m$ порождается $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*, \mathrm{Exch})$, где $\mathbf{Z}$ — естественно упорядоченная аддитивная группа целых чисел. Здесь же отметим, что многообразие $m$-групп $\mathscr{I}$ порождается $m$-группой $(\mathbf{Z}, \mathrm{Inv})$, где $(z)\,\mathrm{Inv} = -z,\ z \in \mathbf{Z}$.

**Лемма 2.1.** *Пусть $(G, {}_*)$ — произвольная $m$-группа. Предположим, что существует неединичный $g \in (G, {}_*)$ такой, что $g_* = g$. Тогда $(G, {}_*)$ содержит $m$-подгруппу, $m$-изоморфную $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \mathrm{Exch})$.*

Доказательство. Так как $g_* = g$, то $g$ не сравним с $e$. Поэтому $g^+ = g \vee e > e$ и $(g^-)^{-1} = g^{-1} \vee e > e$. Далее, $(g^+)_* = (g \vee e)_* = g \wedge e = g^-$. Следовательно, $m$-подгруппа, порожденная элементом $g^+$, будет $m$-изоморфна $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \mathrm{Exch})$. $\square$

Через $\mathscr{C}$ обозначим многообразие $m$-групп, определяемое тождеством $[x, x_*] = e$.

**Лемма 2.2.** *Пусть $m$-группа $(G, {}_*)$ принадлежит $\mathscr{C} \setminus \mathscr{I}$. Тогда $(G, {}_*)$ содержит $m$-подгруппу, $m$-изоморфную $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \mathrm{Exch})$.*

Доказательство. Так как $(G, {}_*) \notin \mathscr{I}$, существует $x \in (G, {}_*)$ такой, что $x_* \neq x^{-1}$. Поэтому $g = x_* x \neq e$ и $g_* = (x_* x)_* = x x_* = x_* x = g$. Применение леммы 2.1 завершает доказательство. $\square$

Замечание. Всякий элемент $x_* x \neq e$ не сравним с $e$.

Действительно, если, например, $x_* x > e$, то $(x_* x)^{x^*} = x x_* > e$. С другой стороны, $(x_* x)_* = x x_* < e$; противоречие. Из замечания получаем

**Следствие 2.3** [5]. *Всякая упорядоченная $m$-группа содержится в многообразии $\mathscr{I}$.*

Напомним, что два строго положительных элемента $x, y$ произвольной $\ell$-группы $G$ называются *ортогональными*, если $x \wedge y = e$. В этом случае пишем $x \perp y$. Отметим здесь же, что ортогональные элементы перестановочны.

**Лемма 2.4.** *Пусть $(G, {}_*)$ — произвольная $m$-группа. Предположим, что существует $g > e \in (G, {}_*)$ такой, что $g_*^{-1} \perp g$. Тогда $(G, {}_*)$ содержит $m$-подгруппу, $m$-изоморфную $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \mathrm{Exch})$.*

Доказательство. Так как $g \perp g_*^{-1}$, во-первых, $x = g g_* \neq e$ и, во-вторых, $x_* = x$. Далее применяем лемму 2.1. $\square$

В работе [6] на решетке многообразий $\ell$-групп $L$ определен автоморфизм второго порядка $\phi$. Напомним его определение. Пусть $V = \{G_i \mid i \in I\}$ — произвольное многообразие $\ell$-групп. Тогда $\phi(V) = \{G_i^* \mid i \in I\}$. Если $V = \phi(V)$, то многообразие $\ell$-групп $V$ называется *реверсивным*. Хорошо известно (см., например, [6]), что многообразие всех $o$-аппроксимируемых $\ell$-групп $\mathscr{R}$ реверсивно.

В [1] отмечено, что система тождеств, определяющая реверсивное многообразие $\ell$-групп, задает некоторое многообразие $m$-групп. Следовательно, тождество $(y^{-1} x^{-1} y \wedge x) \vee e = e$, определяющее $\mathscr{R}$, задает и многообразие $\mathscr{R}_m$

всех $o$-аппроксимируемых $m$-групп. Всякую $m$-группу из $\mathscr{R}_m$ будем называть *$o$-аппроксимируемой.*

**Предложение 2.5.** *Всякая $o$-аппроксимируемая $m$-группа, не лежащая в $\mathscr{I}$, содержит $m$-подгруппу, $m$-изоморфную* $(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}, \mathrm{Exch})$.

Доказательство. Пусть $(G, {}_*\,)$ $o$-аппроксимируема и $(G, {}_*\,) \notin \mathscr{I}$. Тогда существует $g > e \in (G, {}_*\,)$ такой, что $a = gg_* \neq e$. Так как $(G, {}_*\,)$ $o$-аппроксимируема, в ней верно тождество $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$. Положим $x = a$, $y = g_*^{-1}$. Тогда $(gg_* \wedge (g_*^{-1}g^{-1})^{g_*^{-1}}) \vee e = e$. Следовательно, $gg_* \vee e \perp g^{-1}g_*^{-1} \vee e$. Применение леммы 2.4 завершает доказательство. $\square$

Назовем многообразие $m$-групп $\mathscr{X}$ *$o$-аппроксимируемым*, если $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{R}_m$.

**Следствие 2.6.** *Многообразие всех абелевых $m$-групп $\mathscr{A}_m$ — единственное $o$-аппроксимируемое накрытие $\mathscr{I}$.*

Пусть $\mathscr{V}$ — неабелево накрытие $\mathscr{I}$ и $m$-группа $(G, {}_*\,)$ принадлежит $\mathscr{V} \setminus \mathscr{I}$. Тогда в $m$-группе $(G, {}_*\,)$ найдется элемент $g > e$ такой, что $g_* \neq g^{-1}$ и $t = g \wedge g_*^{-1} > e$. Отметим, что $t_* = t^{-1}$. Далее,

$$gg_*^t = t^{-1}gg_*t = (g^{-1} \vee g_*)gg_*(g \wedge g_*^{-1}) = (e \vee g_*g)(g_*g \wedge e) = g_*g. \tag{1}$$

Определим элемент

$$r = (g_*^{-1}g^{-1} \wedge gg_*^t) \vee e.$$

Из (1) следует, что $r = (g_*^{-1}g^{-1} \vee e) \wedge (g_*g \vee e)$. Как и при доказательстве предложения 2.5, получаем, что $r = a_*^{-1} \wedge a$, где $a = g_*g \vee e$. Следовательно, $r > e$ и $r_* = r^{-1}$. Далее,

$$r^{t^{-1}} \wedge r = (g_*^{-1}g^{-1} \vee e)^{t^{-1}} \wedge (gg_* \vee e) \wedge (g_*^{-1}g^{-1} \vee e) \wedge (g_*g \vee e).$$

Заметим, что $gg_* \vee e = (gg_*)^+$, а $g_*^{-1}g^{-1} \vee e = ((gg_*)^-)^{-1}$. Так как положительная и отрицательная части одного и того же элемента ортогональны, имеем $r \perp r^{t^{-1}}$. Таким образом, в $m$-группе $(G, {}_*\,)$ существуют элементы $r, t$ такие, что

$$r_* = r^{-1}, \quad t_* = t^{-1}, \quad r^t \perp r.$$

Пусть $x, y$ — элементы произвольной $m$-группы такие, что $x_* = x^{-1}, y_* = y^{-1}$. Тогда их коммутатор $[x, y]$ либо равен $e$, либо не сравним с $e$. Действительно, если, например, $[x, y] > e$, то $[x, y]_* = [x_*, y_*] = [x^{-1}, y^{-1}] = [x, y]^{x^{-1}y^{-1}} < e$, что ведет к противоречию.

Таким образом, коммутатор $[r, t^2]$ либо равен $e$, либо не сравним с $e$. В первом случае $r^t = r^{t^{-1}}$ и тогда $m$-группа, порожденная $r$ и $t$, будет $m$-изоморфна $(S_2, {}_*\,)$, что означает $\mathscr{V} = \mathscr{S}$. Во втором случае, очевидно, элементы $r^t$, $r^{t^{-1}}$ несравнимы.

Напомним, что строго положительные элементы $x, y$ произвольной $\ell$-группы $G$ являются *архимедово эквивалентными*, если существуют натуральные $m, n$ такие, что $x^m \leq y$ и $y^n \leq x$. Этот факт будем обозначать через $x \sim y$.

**Лемма 2.7.** *Если элементы $r^t$ и $r^{t^{-1}}$ архимедово эквивалентны, то многообразие $\mathscr{V}$ совпадает с многообразием $\mathscr{S}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathscr{V}$ содержит $m$-подгруппу, $m$-изоморфную $(S_2, {}_*\,)$. Так как элементы $r^t$ и $r^{t^{-1}}$ архимедово эквивалентны, существует натуральное $n \geq 2$ такое, что $(r^n)^{t^{-1}} \geq r^t$. Сопрягая последнее неравенство $t$, получаем $r^n \geq r^{t^2}$. Рассмотрим декартово произведение

$H = \overline{\prod\limits_{i\in\mathbf{N}}}(G,\,_*\,)_i$ и элементы $T = (t, t, \dots, t, \dots)$, $R = (r, r^n, r^{n^2}, \dots, r^{n^n}, \dots)$, принадлежащие $H$. Из свойств элементов $r$ и $t$ следует, что $T_* = T^{-1}$, $R_* = R^{-1}$ и $R^T \perp R$. Обозначим $H_0 = \{h \in H \mid \operatorname{supp}(h) < \infty\}$. Тогда $H_0$ является $m$-идеалом $H$ и образы $\overline{T}$, $\overline{R}$ элементов $R$ и $T$ в фактор-группе $H/H_0$ неединичны. По построению $\overline{R} \geq \overline{R}^{\overline{T}^2}$. Следовательно, $[\overline{R}, \overline{T}^2] = e$, и поэтому $m$-группа, порожденная $\overline{T}$, $\overline{R}$, $m$-изоморфна $(S_2,\,_*\,)$. $\square$

Следуя [7], назовем $m$-группу $(F,\,_*\,)$ *разложимой*, если она является прямым произведением своих $\ell$-подгрупп $A, B$, причем $A_* = B$. Так как для любого строго положительного элемента $a \in A$ элемент $f = (a, a_*) \in (F,\,_*\,)$ обладает свойством $f_* = f$, по лемме 2.1 $m$-группа $(F,\,_*\,)$ содержит $m$-подгруппу, $m$-изоморфную $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \mathrm{Exch})$. Поэтому многообразие $\mathscr{V}$ не может содержать разложимых групп.

Как обычно, через $R(G : V)$ обозначим множество правых смежных классов $\ell$-группы $G$ по ее выпуклой $\ell$-подгруппе $V$ с порядком: $Vx \leq Vy$ тогда и только тогда, когда $vx \leq y$ для некоторого $v \in V$. Если данный порядок линеен, то $V$ называется *спрямляющей*.

**Лемма 2.8** [7, лемма 1]. *Пусть $V$ — спрямляющая $\ell$-подгруппа $m$-группы $G$, которая не является $m$-подгруппой. Тогда в $G$ имеется выпуклая $\ell$-подгруппа $H$, являющаяся разложимой $m$-группой.*

Напомним, что *значением неединичного элемента* $a$ произвольной $\ell$-группы $G$ называется всякая выпуклая $\ell$-подгруппа $V_a$, не содержащая $a$ и максимальная с этим свойством. Всякое значение является спрямляющей подгруппой. Множество всех значений элемента $a$ в группе $G$ обозначим через $\Gamma_G(a)$. Известно (см., например, [8, предложение 12.6]), что $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_G(a) = \Gamma_G(b)$.

Возвращаемся к доказательству основного результата.

**Лемма 2.9.** *Элементы $r^t$ и $r^{t^{-1}}$ архимедово эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\Gamma_G(r^t) = \Gamma_G(r^{t^{-1}})$. Пусть $V$ — произвольное значение элемента $r^t$. Предположим, что $r^{t^{-1}} \in V$. Тогда $V$ не может быть $m$-подгруппой, так как в этом случае $(r^{t^{-1}})_* = (r^{-1})^t \in V$, что противоречит определению $V$. Но если $V$ не является $m$-подгруппой, то по лемме 2.8 $m$-группа $(G,\,_*\,) \in \mathscr{V} \setminus \mathscr{I}$ содержит разложимую $m$-подгруппу, что также невозможно.

Таким образом, $r^{t^{-1}} \notin V$. Для элемента $r^{t^{-1}}$ существует $W \in \Gamma_G(r^{t^{-1}})$ такое, что $V \subseteq W$. Как и выше, можно показать, что $r^t \notin W$. По максимальности $V$ получаем, что $V = W$, т. е. $\Gamma_G(r^t) \subseteq \Gamma_G(r^{t^{-1}})$. Аналогично доказывается обратное включение. $\square$

Таким образом, доказана

**Теорема 2.10.** *Многообразие всех абелевых $m$-групп $\mathscr{A}_m$ и многообразие $m$-групп $\mathscr{S} = \mathrm{var}_m((S_{2,*}))$ — единственные накрытия $\mathscr{I}$.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Giraudet M., Rachunek J.* Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. 1999. V. 49, N 124. P. 743–766.
2. *Зенков А. В.* Накрытия в решетке многообразий $m$-групп // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 73–80.

3. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
4. *Kopytov V. M.* The theory of lattice-ordered groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994.
5. *Баянова Н. В., Никонова О. В.* Реверсивные автоморфизмы решеточно упорядоченных групп // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 4. С. 763–768.
6. *Huss M. E., Reily N. R.* On reversing the order of lattice-ordered group // J. Algebra. 1984. V. 91. P. 176–191.
7. *Копытов В. М., Рхунек Й.* Наибольшее собственное многообразие $m$-групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 5. С. 624–635.
8. *Darnel M.* Theory of lattice-ordered groups. New York: Marcel Dekker, 1995.

*Статья поступила 29 сентября 2008 г.*

Зенков Алексей Владимирович
Алтайский гос. аграрный университет, кафедра математики,
пр. Красноармейский, Барнаул 656049
alexey_zenkov@yahoo.com