Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 517.98

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЖАТИЙ В РЕШЕТКАХ ОРЛИЧА — КАНТОРОВИЧА

Б. С. Закиров, В. И. Чилин

Аннотация. Устанавливаются различные варианты эргодических теорем для положительных сжатий решеток Орлича — Канторовича $L_M(m)$, ассоциированных с мерой m, принимающей значения в алгебре измеримых действительных функций. Доказательство проводится с помощью представления решеток $L_M(m)$ в виде измеримых расслоений классических функциональных пространств Орлича.

Ключевые слова: решетка Орлича — Канторовича, измеримое банахово расслоение, положительное сжатие, эргодическая теорема.

Известная доминантная эргодическая теорема для положительных сжатий T в L_p, $1 < p < \infty$, утверждает, что средние Чезаро

$$S_n(|f|) = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} T^i(|f|)$$

ограничены сверху в L_p для каждого $f \in L_p$ [1]. В работе [2] этот результат расширен на класс симметричных пространств, обладающих свойством Харди — Литтлвуда. В частности, дано условие на N-функцию M, обеспечивающее справедливость доминантной эргодической теоремы в функциональных пространствах Орлича L_M.

Естественно ожидать, что аналогичные варианты эргодических теорем сохранятся для положительных сжатий L_p-пространств $L_p(m)$ и пространств Орлича $L_M(m)$, ассоциированных с мерой m, принимающей значения в алгебре измеримых действительных функций. В случае, когда мера m модулярна [3, 6.1.9], пространства $L_p(m)$ и $L_M(m)$ являются решетками Банаха — Канторовича. Теория пространств Банаха — Канторовича в настоящее время достаточно хорошо разработана (см., например, [3–5]). Важное место в построении этой теории занимают методы булевозначного анализа, позволяющие в соответствующей булевозначной модели теории множеств интерпретировать решетки Банаха — Канторовича и их ограниченные гомоморфизмы как банаховы решетки и ограниченные линейные отображения соответственно [5, XI]. Такой подход к теории решеток Банаха — Канторовича дает возможность с помощью принципа переноса [5, 4.4] получать различные свойства этих решеток, аналогичные соответствующим свойствам классических банаховых решеток. Естественно, что использование этого метода требует дополнительных исследований в установлении «нужных» взаимосвязей между объектами **2**-значной и булевозначной моделей теории множеств.

Другим важным подходом к изучению пространств Банаха — Канторовича является теория непрерывных и измеримых банаховых расслоений [3, 6]. Представление решетки Банаха — Канторовича в виде пространства измеримых сечений измеримых банаховых расслоений позволяет получить нужные свойства этих решеток с помощью соответствующей послойной их проверки. Этим способом получен вариант доминантной эргодической теоремы для положительных сжатий пространств Банаха — Канторовича $L_p(m)$ [7]. Именно такой подход используется в настоящей работе. Вначале показывается, что решетку Банаха — Канторовича $L_M(m)$ можно представить в виде измеримого расслоения пространств Орлича, ассоциированных с числовыми мерами. Затем с помощью этого представления и известных эргодических теорем для сжатий пространств Орлича устанавливаются различные варианты эргодических теорем для сжатий решеток Орлича — Канторовича.

Используются терминология и обозначения теории булевых алгебр, векторных решеток, векторного интегрирования, решеточно нормированных пространств из [3], а также терминология для измеримых расслоений булевых алгебр и банаховых решеток из [8].

1. Предварительные сведения

Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с полной мерой, обладающей свойством прямой суммы [3, 1.1.8]. Обозначим через $\mathscr{M}(\Omega)$ (соответственно $\mathscr{L}_\infty(\Omega)$) множество всех действительных (соответственно существенно ограниченных действительных) измеримых функций, определенных п. в. на Ω. Введем в $\mathscr{M}(\Omega)$ отношение эквивалентности, полагая $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ п. в. Множество $L_0 = L_0(\Omega)$ всех классов эквивалентности $f^\sim = \{g \in \mathscr{M}(\Omega) : f \sim g\}$ относительно естественных алгебраических операций является алгеброй с единицей $\mathbf{1}(\omega) \equiv 1$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Кроме того, относительно частичного порядка $f^\sim \leq g^\sim \Leftrightarrow f \leq g$ п. в. алгебра L_0 есть условно полная векторная решетка со слабой единицей $\mathbf{1}$, а множество $B(\Omega) := B(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех идемпотентов в L_0 образует полную булеву алгебру. При этом $L_\infty(\Omega) = \{f^\sim : f \in \mathscr{L}_\infty(\Omega)\}$ является порядковым идеалом в $L_0(\Omega)$, порожденным элементом $\mathbf{1}$.

В дальнейшем вместо записи $f^\sim \in L_0(\Omega)$ будет использоваться также запись $f \in L_0(\Omega)$, которая подразумевает, что рассматривается класс эквивалентности с представителем f.

Для элемента $f \in L_0(\Omega)$ через $s(f)$ обозначается его носитель, т. е. $s(f) = \sup\limits_{n \geq 1}\{|f| > n^{-1}\}$, где $\{|f| > \lambda\}$ — идемпотент, являющийся классом эквивалентности характеристической функции χ_{A_λ} множества $A_\lambda = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Для любого $f \in L_0(\Omega)$ определим элемент f_s^{-1}, обратный к f на его носителе, т. е.

$$f_s^{-1}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{f(\omega)}, & \text{если } f(\omega) \neq 0, \\ 0, & \text{если } f(\omega) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_s^{-1} \in L_0(\Omega)$ и $f_s^{-1} f = s(f)$.

Отображение $p : L_\infty(\Omega) \to \mathscr{L}_\infty(\Omega)$ называется *лифтингом* $L_\infty(\Omega)$, если для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in L_\infty(\Omega)$ выполнены следующие условия:

(a) $p(f) \in f$ и $\operatorname{dom} p(f) = \Omega$, где $\operatorname{dom} g$ — область определения функции $g \in \mathscr{L}_\infty(\Omega)$;

(b) если $f \leq g$, то $p(f) \leq p(g)$ всюду на Ω;

(c) $p(\alpha f + \beta g) = \alpha p(f) + \beta p(g)$, $p(fg) = p(f)p(g)$, $p(f \vee g) = p(f) \vee p(g)$;

(d) $p(\mathbf{0}) = 0$ и $p(\mathbf{1}) = 1$ всюду на Ω.

Лифтинг p переводит элементы из $B(\Omega)$ в характеристические функции χ_A, $A \in \Sigma$. Поэтому можно определить отображение $\tilde{p} : B(\Omega) \to \Sigma$ по правилу $p(\tilde{\chi}_A) = \chi_{\tilde{p}(\widetilde{A})}$ (здесь булева алгебра $B(\Omega)$ отождествляется с полной булевой алгеброй классов равных почти всюду множеств из Σ). Отображение $\tilde{p}$ является лифтингом булевой алгебры $B(\Omega)$, т. е. для всех $A, B \in \Sigma$ имеют место следующие соотношения:

(a) $\tilde{p}(\widetilde{A}) \in \widetilde{A}$;

(b) если $A \subset B$, то $\tilde{p}(\widetilde{A}) \subset \tilde{p}(\widetilde{B})$;

(c) $\tilde{p}(\widetilde{A} \vee \widetilde{B}) = \tilde{p}(\widetilde{A}) \cup \tilde{p}(\widetilde{B})$, $\tilde{p}(\widetilde{\Omega} - \widetilde{A}) = \Omega \setminus \tilde{p}(\widetilde{A})$;

(d) $\tilde{p}(\widetilde{\varnothing}) = \varnothing$ и $\tilde{p}(\widetilde{\Omega}) = \Omega$.

Пусть B — произвольная полная булева алгебра, содержащая $B(\Omega)$ как правильную подалгебру, $X(B)$ — стоуновский компакт, соответствующий B, и $L_0(B) := C_\infty(X(B))$ — алгебра всех непрерывных функций $x : X(B) \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, принимающих значение $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $X(B)$, $C(X(B))$ — подалгебра всех непрерывных числовых функций на $X(B)$. Поскольку $B(\Omega)$ — правильная подалгебра в B, то $L_0(\Omega)$ отождествляется с подалгеброй в $L_0(B)$, при этом $L_0(\Omega)$ является правильной подрешеткой в $L_0(B)$, т. е. точные верхние и нижние грани для подмножества из $L_0(\Omega)$, взятые в $L_0(\Omega)$ и $L_0(B)$, совпадают.

Пусть $m : B \to L_0(\Omega)$ — строго положительная L_0-значная мера на B, обладающая свойством модульности, т. е. $m(ge) = gm(e)$ для всех $e \in B$, $g \in B(\Omega)$ [3, п. 6.1.9]. Из свойства модульности и строгой положительности меры m вытекает, что $s(m(\mathbf{1})) = \mathbf{1}$.

Обозначим через $L_1(B, m)$ пространство всех функций из $L_0(B)$, интегрируемых по L_0-значной мере m. Для любого $x \in L_1(B, m)$ отображение $\|x\|_1 = \int |x| \, dm$ определяет L_0-значную норму в $L_1(B, m)$, относительно которой $L_1(B, m)$ является пространством Банаха — Канторовича (см. [3, п. 6.1.10]).

Непрерывная выпуклая четная функция $M : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ называется *N-функцией*, если $\lim\limits_{t \to 0} \frac{M(t)}{t} = 0$ и $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{M(t)}{t} = \infty$. Всякая N-функция M имеет вид $M(t) = \int\limits_0^{|t|} p(s) ds$, где $p(t)$ — положительная при $t > 0$ непрерывная справа при $t \geq 0$ неубывающая функция, для которой $p(0) = 0$ и $\lim\limits_{t \to \infty} p(t) = \infty$ [9]. Положим $q(s) := \sup\{t : p(t) \leq s\}$, $s \geq 0$. Функция $N(t) := \int\limits_0^{|t|} q(s) ds$ является N-функцией и называется *дополнительной N-функцией к M* [9].

Пусть M — произвольная N-функция, $x \in L_0(B)$. Множество $G = \{t \in X(B) : -\infty < x(t) < +\infty\}$ всюду плотно и открыто в $X(B)$. Положим $y(t) = M(x(t))$, $t \in G$. Так как $y = y(t)$ — непрерывная функция на G, существует единственное непрерывное продолжение функции $y(t)$ на все $X(B)$. Обозначим это продолжение через $M(x)$. Множество

$$L_M^0 := L_M^0(B, m) := \{x \in L_0(B) : M(x) \in L_1(B, m)\}$$

называется *L_0-классом Орлича*, а линейное пространство

$$L_M := L_M(B, m) := \left\{x \in L_0(B) : xy \in L_1(B, m) \text{ для всех } y \in L_N^0\right\}$$

— *L_0-пространством Орлича*, где N — дополнительная N-функция к M. Если m является числовой мерой (т. е. $L_0(\Omega)=\mathbb{R}$), то приведенные выше определения совпадают с известными определениями класса и пространства Орлича измеримых функций (см., например, [9]).

Имеют место следующие вложения:

$$C(X(B))\subset L_M^0(B,m)\subset L_M(B,m)\subset L_1(B,m).$$

На $L_M(B,m)$ определим L_0-значную норму Орлича, полагая

$$\|x\|_M:=\sup\left\{\left|\int xy\,dm\right|:y\in A(N)\right\},\quad x\in L_M(B,m),$$

где $A(N)=\bigl\{y\in L_N^0:\int N(y)\,dm\le\mathbf{1}\bigr\}$. Пара $(L_M(B,m),\|\cdot\|_M)$ является решеткой Банаха — Канторовича, называемой *решеткой Орлича — Канторовича, ассоциированной с L_0-значной мерой* [10].

Как и в случае классических пространствах Орлича, наряду с нормой Орлича $\|\cdot\|_M$ в $L_M(B,m)$ можно рассматривать L_0-значную норму Люксембурга: $\|x\|_{(M)}:=\inf\bigl\{\lambda\in L_0(\Omega):\int M(\lambda^{-1}x)\,dm\le\mathbf{1},\ \lambda$ — обратимый положительный элемент$\bigr\}$, при этом пара $(L_M(B,m),\|\cdot\|_{(M)})$ также является решеткой Банаха — Канторовича [11].

Отметим следующее полезное свойство нормы Люксембурга [11]: для каждого $x\in L_M(B,m)$ верно неравенство

$$\int M\bigl((\|x\|_{(M)})_s^{-1}x\bigr)\,dm\le s(\|x\|_{(M)}),$$

в частности, элемент $(\|x\|_{(M)})_s^{-1}x$ принадлежит классу Орлича $L_M^0(B,m)$.

Пусть $\mathscr{X}$ — банахово расслоение над Ω, т. е. отображение $\omega\mapsto\mathscr{X}(\omega)$ из Ω в класс банаховых пространств. Через $S_\sim(\Omega,\mathscr{X})$ обозначается множество всех сечений расслоения $\mathscr{X}$, определенных п. в. на Ω. Пусть $\mathscr{C}\subset S_\sim(\Omega,\mathscr{X})$ — измеримая структура на $\mathscr{X}$, т. е.

(a) $\alpha_1c_1+\alpha_2c_2\in\mathscr{C}$ для всех $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ и $c_1,c_2\in\mathscr{C}$;

(b) поточечная норма $|\!|\!|c|\!|\!|:\Omega\to\mathbb{R}$ каждого элемента $c\in\mathscr{C}$, определяемая по правилу $|\!|\!|c|\!|\!|(\omega)=\|c(\omega)\|_{\mathscr{X}(\omega)}$, измерима;

(c) множество $\mathscr{C}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$, т. е. множество $\{c(\omega):c\in\mathscr{C}\}$ плотно в пространстве $\mathscr{X}(\omega)$ для каждого $\omega\in\Omega$.

Пару $(\mathscr{X},\mathscr{C})$ принято называть *измеримым банаховым расслоением над* Ω. Обозначим через $\mathscr{M}(\Omega,\mathscr{X})$ множество всех $\mathscr{C}$-измеримых сечений расслоения $\mathscr{X}$, а через $L_0(\Omega,\mathscr{X})$ — факторизацию $\mathscr{M}(\Omega,\mathscr{X})$ по отношению равенства почти всюду. Известно, что относительно естественных алгебраических операций $L_0(\Omega,\mathscr{X})$ с нормой $\|u\|:=|\!|\!|u|\!|\!|^\sim\in L_0(\Omega)$ является пространством Банаха — Канторовича над $L_0(\Omega)$ [6].

Положим $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mathscr{X})=\{u\in\mathscr{M}(\Omega,\mathscr{X}):|\!|\!|u|\!|\!|\in\mathscr{L}_\infty(\Omega)\}$ и $L_\infty(\Omega,\mathscr{X})=\{\tilde u:u\in\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mathscr{X})\}$. Отображение $l_{\mathscr{X}}:L_\infty(\Omega,\mathscr{X})\to\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mathscr{X})$ называется *векторнозначным лифтингом пространства $L_\infty(\Omega,\mathscr{X})$, ассоциированным с лифтингом* $p:L_\infty(\Omega)\to\mathscr{L}_\infty(\Omega)$, если для всех $u,v\in L_\infty(\Omega,\mathscr{X})$ и $a\in L_\infty(\Omega)$ имеют место следующие соотношения:

(1) $l_{\mathscr{X}}(u)\in u$ и $\mathrm{dom}(l_{\mathscr{X}}(u))=\Omega$;

(2) $|\!|\!|l_{\mathscr{X}}(u)|\!|\!|=p(\|u\|)$;

(3) $l_{\mathscr{X}}(u+v)=l_{\mathscr{X}}(u)+l_{\mathscr{X}}(v)$;

(4) $l_{\mathscr{X}}(au)=p(a)l_{\mathscr{X}}(u)$;

(5) множество $\{l_{\mathscr{X}}(u) : u \in L_\infty(\Omega, \mathscr{X})\}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$.

В [6] показано, что для любого пространства Банаха — Канторовича X над $L_0(\Omega)$ существует единственное с точностью до изометрии измеримое банахово расслоение $\mathscr{X}$ над Ω, допускающее векторнозначный лифтинг, такое, что пространства Банаха — Канторовича X и $L_0(\Omega, \mathscr{X})$ изометрически изоморфны. В частности, X является L_0-модулем, и $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ для всех $\lambda \in L_0$, $x \in X$.

Измеримое банахово расслоение $(\mathscr{X}, \mathscr{C})$ над Ω называется *измеримым расслоением банаховых решеток над* Ω, если $\mathscr{X}(\omega)$ — банахова решетка для каждого $\omega \in \Omega$, и $c_1 \vee c_2 \in \mathscr{C}$ для всех $c_1, c_2 \in \mathscr{C}$. В этом случае пространство $L_0(\Omega, \mathscr{X})$ относительно естественного частичного порядка $\tilde{u} \leq \tilde{v} \Leftrightarrow u(\omega) \leq v(\omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$ становится решеткой Банаха — Канторовича над $L_0(\Omega)$ [8].

Согласно [8] для каждой решетки Банаха — Канторовича X существует измеримое расслоение банаховых решеток $\mathscr{X}$, допускающее векторнозначный лифтинг $l_{\mathscr{X}}$, с дополнительным свойством $l_{\mathscr{X}}(u \vee v) = l_{\mathscr{X}}(u) \vee l_{\mathscr{X}}(v)$ такое, что X можно отождествить с $L_0(\Omega, \mathscr{X})$.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — решетка Банаха — Канторовича над L_0. Отображение $T : X \to X$ называется *L_0-линейным*, если $T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in L_0$; *положительным*, если $Tx \geq 0$ для всех $x \geq 0$; *L_0-ограниченным*, если существует такой элемент $0 \leq c \in L_0$, что $\|Tx\|_X \leq c\|x\|_X$ для всех $x \in X$ (в этом случае полагают $\|T\| := \|T\|_{X \to X} = \sup\{\|Tx\|_X : \|x\|_X \leq \mathbf{1}\}$).

Предложение 1.1 [12]. *Пусть $X = L_0(\Omega, \mathscr{X})$ — решетка Банаха — Канторовича и $T : L_0(\Omega, \mathscr{X}) \to L_0(\Omega, \mathscr{X})$ — L_0-линейное L_0-ограниченное положительное отображение, для которого $\|T\| \leq \mathbf{1}$ (в этом случае $T(L_\infty(\Omega, \mathscr{X})) \subset L_\infty(\Omega, \mathscr{X})$). Тогда существует семейство линейных ограниченных положительных операторов $\{T_\omega : \mathscr{X}(\omega) \to \mathscr{X}(\omega)\}$ такое, что для всякого $u \in L_0(\Omega, \mathscr{X})$ справедливо равенство $(Tu)(\omega) = T_\omega u(\omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$, при этом $\|T_\omega\|_{\mathscr{X}(\omega) \to \mathscr{X}(\omega)} \leq 1$ и $l_{\mathscr{X}}(Tu)(\omega) = T_\omega(l_{\mathscr{X}}(u)(\omega))$ для всех $u \in L_\infty(\Omega, \mathscr{X})$, $\omega \in \Omega$.*

Пусть B — произвольная полная булева алгебра, m — строго положительная $L_0(\Omega)$-значная мера на B, причем $B(\Omega)$ является правильной подалгеброй в B и m обладает свойством модульности (считаем, что $m(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$; в противном случае рассматриваем меру $m_1(e) = m(e)m(\mathbf{1})_s^{-1}$, для которой $m_1(\mathbf{1}) = s(m(\mathbf{1})) = \mathbf{1}$).

Пусть p — лифтинг в $L_\infty(\Omega)$. Определим числовую квазимеру на B равенством $m_\omega^0(e) = p(m(e))(\omega)$. Для каждого $\omega \in \Omega$ рассмотрим идеал $I_\omega^0 = \{e \in B : m_\omega^0(e) = 0\}$ в B. Обозначим через B_ω^0 фактор-булеву алгебру B/I_ω^0. Ясно, что B_ω^0 — булева алгебра со строго положительной квазимерой $m_\omega^0([e]) = m_\omega^0(e)$, где $[e]$ — класс эквивалентности в B_ω^0 с представителем $e \in B$. Рассмотрим в B_ω^0 метрику $\rho_\omega([e],[g]) = m_\omega^0(e \triangle g)$ и через B_ω обозначим пополнение метрического пространства $(B_\omega^0, \rho_\omega)$. Известно, что B_ω — полная булева алгебра со строго положительной числовой мерой m_ω, являющейся продолжением m_ω^0 (см. [13, III, § 5]).

Пусть $\pi_\omega : B \to B_\omega^0$ — фактор-гомоморфизм, $i_\omega : B_\omega^0 \to B_\omega$ — естественное вложение, $\gamma_\omega = i_\omega \circ \pi_\omega$. Тогда γ_ω — гомоморфизм из булевой алгебры B в булеву алгебру B_ω для всех $\omega \in \Omega$.

Рассмотрим расслоение $\mathscr{B}$ над Ω, для которого $\mathscr{B}(\omega) = (B_\omega, m_\omega)$ при всех $\omega \in \Omega$ и $\mathscr{C} = \{e(\omega) = \gamma_\omega(e) : e \in B\}$. Известно [8], что $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ — измеримое расслоение булевых алгебр над Ω такое, что булевы алгебры B и $L_0(\Omega, \mathscr{B})$

изометрически изоморфны, при этом $p(m(e))(\omega) = m_\omega(\gamma_\omega(e))$ для всех $e \in B$, $\omega \in \Omega$.

2. Измеримые расслоения пространств Орлича

Пусть $B, B(\Omega), m$ те же, что и в п. 1, $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ — измеримое расслоение булевых алгебр, порожденное семейством $(B_\omega, m_\omega)_{\omega\in\Omega}$, для которого булевы алгебры B и $L_0(\Omega, \mathscr{B})$ изометрически изоморфны.

Рассмотрим банахову решетку $L_1(B_\omega, m_\omega)$ и решетку Банаха — Канторовича $L_1(B, m)$. Пусть $(\mathscr{Y}, \mathscr{E})$ — измеримое банахово расслоение над Ω, для которого $\mathscr{Y}(\omega) = L_1(B_\omega, m_\omega)$ при всех $\omega \in \Omega$ и

$$\mathscr{E} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i : \alpha_i \in \mathbb{R},\ e_i \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{B}),\ i = \overline{1,n},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

В [8] показано,что $L_1(B, m)$ изометрически изоморфно $L_0(\Omega, \mathscr{Y})$.

Положим

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i : \alpha_i \in \mathbb{R},\ e_i \in B,\ i = \overline{1,n},\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$l\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_\omega(e_i), \quad \omega \in \Omega.$$

Известно [8], что l — линейное отображение из Γ в $\mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{Y})$, при этом для любых $u, v \in \Gamma$, $\omega \in \Omega$, выполняются соотношения:

(1) $l(u) \in u$ и $\operatorname{dom}(l(u)) = \Omega$;

(2) $\|l(u)(\omega)\|_{L_1(B_\omega, m_\omega)} = p(\|u\|_{L_1(B,m)})(\omega)$;

(3) $l(u)(\omega) \geq 0$, если $u \geq 0$;

(4) $l(hu)(\omega) = p(h)(\omega) l(u)(\omega)$ для любого $h = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \in L_0(\Omega)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \Sigma$, $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}$;

(5) множество $\{l(u)(\omega) : u \in \Gamma\}$ плотно в $L_1(B_\omega, m_\omega)$;

(6) $l(u \vee v)(\omega) = l(u)(\omega) \vee l(v)(\omega)$.

Рассмотрим решетку Орлича — Канторовича $L_M(B, m)$ и классические пространства Орлича $L_M(B_\omega, m_\omega)$, построенные по числовой мере m_ω на B_ω. Через $\|\cdot\|_M$ и $\|\cdot\|_M^\omega$ обозначим нормы Орлича соответственно в $L_M(B, m)$ и $L_M(B_\omega, m_\omega)$.

Для каждого $\omega \in \Omega$ положим

$$\Gamma(\omega) = \{l(u)(\omega) : u \in \Gamma\}, \quad \Gamma_\omega = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i : \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad g_i \in B_\omega,\ i = \overline{1,n},\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$(\Gamma A)(\omega) = \{l(u)(\omega) : u \in \Gamma A\},$$

где $\Gamma A = \left\{ u \in \Gamma : \int N(u)\, dm \leq \mathbf{1} \right\}$.

Нам понадобится следующая лемма для вычисления нормы Орлича $\|\cdot\|_M^\omega$ в $L_M(B_\omega, m_\omega)$.

Лемма 2.1. *Для любого элемента $a \in L_M(B_\omega, m_\omega)$ верно равенство*

$$\|a\|_M^\omega = \sup\left\{\int |a||y|\,dm_\omega : y \in (\Gamma A)(\omega)\right\}.$$

Доказательство. Пусть

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ e_i \in B,\ e_i \wedge e_j = 0,\ i \neq j,\ i,j = \overline{1,n},\ \int N(u)\,dm \leq \mathbf{1}.$$

Ясно, что

$$\int N(u)\,dm = \sum_{i=1}^n N(\alpha_i)m(e_i) = \|N(u)\|_{L_1(B,m)}.$$

Из свойств отображений p и l имеем

$$1 = p(\mathbf{1})(\omega) \geq p\left(\int N(u)\,dm\right)(\omega) = p(\|N(u)\|_{L_1(B,m)})(\omega)$$
$$= \|l(N(u))(\omega)\|_{L_1(B_\omega,m_\omega)} = \int N(l(u)(\omega))\,dm_\omega,$$

т. е. $\int N(l(u)(\omega))\,dm_\omega \leq 1$ для всех $\omega \in \Omega$. Следовательно,

$$\|a\|_M^\omega \geq \sup\left\{\int |a||y|\,dm_\omega : y \in (\Gamma A)(\omega)\right\}.$$

Зафиксируем $\omega \in \Omega$, $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$\|a\|_M^\omega = \sup\left\{\int |a|b\,dm_\omega : 0 \leq b \in L_N^0(B_\omega, m_\omega),\ \int N(b)\,dm_\omega \leq 1\right\},$$

найдется такое $0 \leq b \in L_N^0(B_\omega, m_\omega)$, что $\int N(b)\,dm_\omega \leq 1$ и $\int |a|b\,dm_\omega > \|a\|_M^\omega - \varepsilon$. Выберем последовательность $0 \leq y_n \in \Gamma_\omega$, для которой $y_n \uparrow b$. Тогда

$$0 \leq \int N(y_n)\,dm_\omega \leq 1, \quad \int |a|y_n\,dm_\omega \uparrow \int |a|b\,dm_\omega.$$

Поэтому в силу непрерывности N-функции N найдется такое $0 \leq y = \sum_{i=1}^k \alpha_i g_i \in \Gamma_\omega$, что

$$\int N(y)\,dm_\omega < 1 \quad \text{и} \quad \int |a|y\,dm_\omega > \|a\|_M^\omega - \varepsilon.$$

Так как $\{\gamma_\omega(e) : e \in B\}$ плотно в B_ω в топологии сходимости по мере, существуют такие последовательности $\{e_n^{(i)}\}_{n=1}^\infty \subset B$, $i = 1,\dots,k$, что

$$\gamma_\omega(e_n^{(i)}) \xrightarrow{m_\omega} g_i$$

при $n \to \infty$ для каждого $i = 1,\dots,k$. Положим $u_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_n^{(i)}$. Тогда $u_n \in \Gamma$ и

$$l(u_n)(\omega) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \gamma_\omega(e_n^{(i)}) \xrightarrow{m_\omega} \sum_{i=1}^k \alpha_i g_i = y$$

при $n \to \infty$. Поскольку

$$|l(u_n)(\omega)| \le \max_{1\le i\le k} |\alpha_i| = \alpha < \infty, \quad N(l(u_n)(\omega)) \le N(\alpha),$$

имеем

$$\int N(l(u_n)(\omega))\, dm_\omega \to \int N(y)\, dm_\omega < 1.$$

Аналогично

$$\int |a| l(u_n)(\omega)\, dm_\omega \to \int |a| y\, dm_\omega > \|a\|_M^\omega - \varepsilon.$$

Следовательно, можно выбрать такое $u = u_{n_0}$, что

$$\int N(l(u)(\omega))\, dm_\omega < 1 \quad \text{и} \quad \int |a| l(u)(\omega)\, dm_\omega > \|a\|_M^\omega - \varepsilon.$$

Положим

$$r = \left\{\int N(u)\, dm \ge \mathbf{1}\right\} \in B(\Omega) \quad \text{и} \quad A = \tilde{p}(r) \in \Sigma.$$

Для всех $t \in \Omega$ имеем

$$\chi_A(t) = p(r)(t) \le p(r)(t) p\left(\int N(u)\, dm\right)(t) = \chi_A(t) \int N(l(u)(t))\, dm_t.$$

Следовательно, $1 \le \int N(l(u)(t))\, dm_t$ для любого $t \in A$, откуда $\omega \notin A$. Используя непрерывность N и равенство $N(0) = 0$, выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\sum_{i=1}^{k} N(\delta\alpha_i) < 1$. Положим $v = r\delta u + (\mathbf{1} - r)u$. Ясно, что $0 \le v \in \Gamma$, при этом

$$\begin{aligned} l(v)(\omega) &= p(r)(\omega) l(\delta u)(\omega) + p(\mathbf{1} - r)(\omega) l(u)(\omega) \\ &= \chi_A(\omega) l(\delta u)(\omega) + \chi_{\Omega\setminus A}(\omega) l(u)(\omega) = l(u)(\omega), \end{aligned}$$

в частности,

$$\int |a| l(v)(\omega)\, dm_\omega > \|a\|_M^\omega - \varepsilon.$$

Кроме того, из неравенства $m(e) \le m(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, $e \in B$, имеем

$$\int N(v)\, dm = \int r N(\delta u)\, dm + \int (\mathbf{1} - r) N(u)\, dm \le (\mathbf{1} - r) + r \sum_{i=1}^{k} N(\delta\alpha_i) \le \mathbf{1}.$$

Следовательно, $v \in \Gamma A$, поэтому

$$\|a\|_M^\omega \ge \sup\left\{\int |a||y|\, dm_\omega : y \in (\Gamma A)(\omega)\right\} \ge \|a\|_M^\omega - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем утверждение леммы 2.1. $\square$

Нам понадобятся также следующие свойства нормы Орлича $\|\cdot\|_M$.

Предложение 2.2. (i) *Для каждого* $x \in L_M(B,m)$ *верно равенство*

$$\|x\|_M = \sup\left\{\int |x||y|\,dm : y \in \Gamma A\right\}.$$

(ii) *Если* $0 \leq x_n \in L_M(B,m), x_n \uparrow x \in L_M(B,m)$, *то* $\|x_n\|_M \uparrow \|x\|_M$.

Доказательство. (i) Ясно, что

$$\|x\|_M \geq \sup\left\{\int |x||y|\,dm : y \in \Gamma A\right\} := \lambda.$$

Если $\|x\|_M \neq \lambda$, то найдутся такие $\varepsilon > 0$, $0 \neq e \in B(\Omega)$, что

$$(\lambda + 3\varepsilon\mathbf{1})e \leq e\|x\|_M = \sup\left\{e\int |x||y|\,dm : y \in A(N)\right\}.$$

Выберем $y \in A(N)$ и $0 \neq g \in B(\Omega)$ так, что $g \leq e$ и $(\lambda + 2\varepsilon\mathbf{1})g \leq g\int |x||y|\,dm$.

Пусть $0 \leq y_n \in \Gamma$ и $y_n \uparrow |y|$. Так же, как и при доказательстве леммы 2.1, получаем, что $y_n \in \Gamma A$ и $g\int |x|y_n\,dm \uparrow g\int |x||y|\,dm$. Поэтому существуют такие y_{n_0} и $0 \neq q \leq g$, $q \in B(\Omega)$, что

$$\lambda q \geq q\int |x|y_{n_0}\,dm \geq (\lambda + \varepsilon\mathbf{1})q.$$

Из полученного противоречия вытекает равенство $\|x\|_M = \lambda$.

П. (ii) следует из определения нормы $\|\cdot\|_M$. $\square$

Как уже отмечалось, $L_M(B,m) \subset L_1(B,m) = L_0(\Omega, \mathscr{Y})$. Поэтому каждый элемент $x \in L_M(B,m)$ имеет «послойное» разложение $x = \{x(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$, где $x(\omega) \in L_1(B_\omega, m_\omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$, при этом если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in \Gamma$, то

$$x(\omega) = l(x)(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_\omega(e_i).$$

Предложение 2.3. *Если* $x \in L_1(B,m)$, *то* $x \in L_M(B,m)$ *в том и только в том случае, когда* $x(\omega) \in L_M(B_\omega, m_\omega)$ *для п. в.* $\omega \in \Omega$, *при этом* $\|x\|_M(\omega) = \|x(\omega)\|_M^\omega$ *п. в. на* Ω.

Доказательство. Пусть $x \in L_M(B,m)$, $y = (\|x\|_{(M)})_s^{-1}|x|$. Тогда

$$0 \leq y \in L_M^0(B,m), \qquad \int M(y)\,dm \leq s(\|x\|_{(M)}) \leq \mathbf{1}.$$

Выберем последовательность $0 \leq y_n \in \Gamma$, для которой $y_n \uparrow y$. Ясно, что $M(y_n) \in \Gamma$ и $M(y_n) \uparrow M(y) \in L_1(B,m)$, при этом $M(y_n)(\omega) = M(y_n(\omega))$, $\omega \in \Omega$. Согласно теореме 4.1 из [8] $y_n(\omega) \uparrow y(\omega)$ и $M(y_n)(\omega) \uparrow M(y)(\omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$. Поэтому

$$M(y)(\omega) = \lim_n M(y_n(\omega)) = M(y(\omega)) \quad \text{для п. в. } \omega \in \Omega.$$

Так как $M(y) \in L_1(B,m)$, то $M(y(\omega)) = M(y)(\omega) \in L_1(B_\omega, m_\omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$. Следовательно, $y(\omega) \in L_M^0(B_\omega, m_\omega)$, тем самым

$$|x(\omega)| = \|x\|_{(M)}(\omega)y(\omega) \in L_M(B_\omega, m_\omega) \quad \text{для п. в. } \omega \in \Omega.$$

Предположим теперь, что $\{x(\omega)\}_{\omega\in\Omega} = x \in L_1(B,m)$ и $x(\omega) \in L_M(B_\omega, m_\omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$. Покажем, что $x \in L_M(B,m)$. Возьмем произвольное $\{y(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$

$= y \in L_N^0(B,m)$ и через A обозначим множество всех тех $\omega \in \Omega$, для которых $x(\omega) \in L_M(B_\omega, m_\omega)$ и $y(\omega) \in L_N^0(B_\omega, m_\omega)$. Ясно, что $\mu(\Omega \setminus A) = 0$. Невозрастающая перестановка $(x(\omega))^*(t)$ для $x(\omega)$, $\omega \in A$, $t \in [0, m_\omega(\mathbf{1}_\omega)]$, принадлежит функциональному пространству Орлича $L_M([0, m_\omega(\mathbf{1}_\omega)], \nu)$, где ν — линейная мера Лебега на отрезке $[0, m_\omega(\mathbf{1})]$. Кроме того, в силу равенства

$$(N(y(\omega)))^*(t) = N((y(\omega))^*(t)), \quad t \geq 0$$

(см., например, [14]), имеем

$$\int_0^{m_\omega(\mathbf{1}_\omega)} N((y(\omega))^*(t))\,dt = \int_0^{m_\omega(\mathbf{1}_\omega)} (N(y(\omega)))^*(t)\,dt = \int N(y(\omega))\,dm_\omega < \infty,$$

т. е. $(y(\omega))^* \in L_N^0([0, m_\omega(\mathbf{1}_\omega)], \nu)$ для всех $\omega \in A$. Поэтому из [15, II, § 2, п. 2] следует, что

$$\int x(\omega)y(\omega)\,dm_\omega \leq \int_0^{m_\omega(\mathbf{1}_\omega)} (x(\omega))^*(t)(y(\omega))^*(t)\,dt < \infty.$$

Следовательно, $x(\omega)y(\omega) \in L_1(B_\omega, m_\omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$. Поскольку $(xy)(\omega) = x(\omega)y(\omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$ [8, теорема 3.2], имеем $xy \in L_1(B,m)$ [8, теорема 3.3], т. е. $x \in L_M(B,m)$.

Покажем теперь, что $\|x\|_M(\omega) = \|x(\omega)\|_M^\omega$ п. в. на Ω. Так как мера μ обладает свойством прямой суммы, последнее равенство достаточно проверить для тех множеств из Σ, которые имеют конечную меру. Пусть $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$, $e = \chi_A^\sim$, $L_0(A) = \{\lambda e : \lambda \in L_0(\Omega)\}$. Поскольку $L_0(A)$ имеет счетный тип (т. е. любое семейство ненулевых попарно дизъюнктных идемпотентов из $L_0(A)$ не более чем счетно), в силу предложения 2.2(i) найдется такая последовательность $0 \leq y_n \in \Gamma A$, для которой $e\|x\|_M = \sup\limits_{n\geq 1}\{\int e|x|y_n\,dm\}$. Отсюда, из [8, теорема 4.1] и леммы 2.1 получим, что

$$\chi_A(\omega)\|x\|_M(\omega) = \sup_{n\geq 1}\left[\left(\int e|x|y_n\,dm\right)(\omega)\right]$$
$$= \sup_{n\geq 1}\left(\int \chi_A(\omega)|x(\omega)|y_n(\omega)\,dm_\omega\right) \leq \|\chi_A(\omega)x(\omega)\|_M^\omega$$

для п. в. $\omega \in \Omega$, т. е. $\|x\|_M(\omega) \leq \|x(\omega)\|_M^\omega$ для п. в. $\omega \in A$.

Предположим теперь, что $x \in \Gamma$. Тогда $|x| \leq \alpha\mathbf{1}$ для некоторого положительного числа α, тем самым

$$\|x\|_M(\omega) \leq \alpha\|\mathbf{1}\|_M(\omega) \leq \alpha\|\mathbf{1}(\omega)\|_M^\omega \quad \text{для п. в. } \omega \in \Omega.$$

Так как $m_\omega(\mathbf{1}(\omega)) = 1$ для п. в. $\omega \in \Omega$, то (см. [9, II, § 5])

$$\|\mathbf{1}(\omega)\|_M^\omega = m_\omega(\mathbf{1}_\omega)(N)^{-1}(1/m_\omega(\mathbf{1}_\omega)) = (N)^{-1}(1).$$

Поэтому $\|x\|_M(\omega) \leq \alpha(N)^{-1}(1)$ для п. в. $\omega \in \Omega$, т. е. $\|x\|_M \in L_\infty(\Omega)$. Из свойств лифтинга p и предложения 2.2(i) вытекает, что

$$p(\|x\|_M)(\omega) \geq p\left(\int |x||y|\,dm\right)(\omega) = p(\|xy\|_{L_1(B,m)})(\omega) = \int |x(\omega)||y(\omega)|\,dm_\omega$$

для всех $y \in \Gamma A$. Отсюда в силу леммы 2.1 получим, что $p(\|x\|_M)(\omega) \geq \|x(\omega)\|_M^\omega$. Следовательно, $\|x\|_M(\omega) \geq \|x(\omega)\|_M^\omega$ для п. в. $\omega \in \Omega$, т. е. $\|x\|_M(\omega) = \|x(\omega)\|_M^\omega$ для п. в. $\omega \in A$.

Пусть теперь $x \in L_M(B,m)$ и x_n — последовательность из Γ такая, что $0 \leq x_n \uparrow |x|$. Поскольку $\|x\|_M = \||x|\|_M = \sup\limits_{n\geq 1} \|x_n\|_M$ (предложение 2.2(ii)), $x_n(\omega) \uparrow |x(\omega)|$ для п. в. $\omega \in \Omega$ [8, теорема 4.1] и $\|x_n\|_M(\omega) = \|x_n(\omega)\|_M^\omega \uparrow \||x(\omega)|\|_M^\omega = \|x(\omega)\|_M^\omega$ для п. в. $\omega \in A$, то $\|x\|_M(\omega) = \|x(\omega)\|_M^\omega$ п. в. на A. $\square$

В случае, когда N-функция M удовлетворяет Δ_2-условию, т. е. $M(2t) \leq kM(t)$ для всех $t \geq t_0 \geq 0$ при некоторых $k > 0$ и $t_0 \geq 0$, предложение 2.3 допускает следующее уточнение.

Теорема 2.4. *Если N-функция M удовлетворяет Δ_2-условию, то решетка Орлича — Канторовича $L_M(B,m)$ изометрически и порядково изоморфна $L_0(\Omega, \mathscr{X})$, где $(\mathscr{X}, \mathscr{E})$ — измеримое банахово расслоение над Ω, для которого $\mathscr{X}(\omega) = L_M(B_\omega, m_\omega)$ и*

$$\mathscr{E} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i : \alpha_i \in \mathbb{R},\ e_i \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{B}),\ i = \overline{1,n},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Доказательство. Ясно, что $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$, $c_1 \vee c_2 \in \mathscr{E}$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathscr{E}$, при этом $\|c_1(\omega)\|_M^\omega$ — измеримая функция на Ω (предложение 2.3). Так как M удовлетворяет Δ_2-условию, норма $\|\cdot\|_M^\omega$ порядково непрерывна, поэтому Γ_ω плотно в $L_M(B_\omega, m_\omega)$. С другой стороны, $\Gamma(\omega)$ плотно в Γ_ω (см. доказательство леммы 2.1). Следовательно, $\mathscr{E}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$. Таким образом, $\mathscr{E}$ — измеримая структура на $\mathscr{X}$, тем самым определена решетка Банаха — Канторовича $L_0(\Omega, \mathscr{X})$.

Рассмотрим в $L_0(\Omega, \mathscr{X})$ L_0-подмодуль $\widetilde{\mathscr{E}} = \{\tilde{u} : u \in \mathscr{E}\}$ и зададим отображение $\Phi_0 : \widetilde{\mathscr{E}} \mapsto L_M(B,m)$, полагая

$$\Phi_0(\tilde{u}) = \upsilon = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad \text{где } u(\omega) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i(\omega).$$

Тогда (см. предложение 2.3)

$$\|\Phi_0(u)\|_M = [\|\upsilon(\omega)\|_M^\omega]^\sim = \|\tilde{u}\|_{L_0(\Omega,\mathscr{X})}.$$

При этом Φ_0 линейно и $\Phi_0(e\tilde{u}) = e\Phi_0(\tilde{u})$ для всех $e \in B(\Omega)$, $u \in \mathscr{E}$. Кроме того, $\Phi_0(\tilde{u}) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{u} \geq 0$.

Так как M удовлетворяет Δ_2-условию, Γ (bo)-плотно в $L_M(B,m)$ [11]. Отсюда и из (bo)-плотности $\widetilde{\mathscr{E}}$ в $L_0(\Omega, \mathscr{X})$ получим, что Φ_0 продолжается до порядкового изометрического изоморфизма решетки Банаха — Канторовича $L_0(\Omega, \mathscr{X})$ на $L_M(B,m)$. $\square$

3. Эргодические теоремы в решетках Орлича — Канторовича

Положительное L_0-ограниченное L_0-линейное отображение $T : L_1(B,m) \to L_1(B,m)$ назовем L_1-L_∞-*сжатием*, если $T\mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ и $\|T\|_{L_1(B,m)\to L_1(B,m)} \leq \mathbf{1}$. Множество всех L_1-L_∞-сжатий обозначим через $PC(B,m)$.

Приведем примеры L_1-L_∞-сжатий. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ — измеримое пространство с полной числовой мерой μ, обладающей свойством прямой суммы, Σ —

σ-подалгебра в $\mathscr{A}$ такая, что сужение μ_0 меры μ на Σ также обладает свойством прямой суммы. Обозначим через $E(\cdot|\Sigma)$ условное математическое ожидание из $L_1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ на $L_1(\Omega, \Sigma, \mu_0)$. Ясно, что $m(e) = E(e|\Sigma)$ является строго положительной $L_0(\Omega, \Sigma, \mu_0)$-значной мерой на $B(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, обладающей свойством модульности.

Пусть Σ_1 — другая σ-подалгебра в $\mathscr{A}$, $\Sigma_1 \supset \Sigma$. Согласно [4, п. 4.2.9] существует оператор условного математического ожидания

$$T : L_1(B(\Omega, \mathscr{A}, \mu), m) \to L_1(B(\Omega, \Sigma_1, \mu), m).$$

Этот оператор T положителен, при этом $\|Tx\|_{L_1} \leq \|x\|_{L_1}$ для любого $x \in L_1(B(\Omega, \mathscr{A}, \mu), m)$ и $T\mathbf{1} = \mathbf{1}$, в частности, $T \in PC(B(\Omega, \mathscr{A}, \mu), m)$.

Следующее предложение описывает действие $T \in PC(B, m)$ как послойное L_1-L_∞-сжатие.

Предложение 3.1. *Пусть $T \in PC(B, m)$. Тогда*

(i) *для каждого $\omega \in \Omega$ существует такое $T_\omega \in PC(B_\omega, m_\omega)$, что $T_\omega(x(\omega)) = (Tx)(\omega)$ для любого $x \in L_1(B, m)$ и для п. в. $\omega \in \Omega$;*

(ii) *$T(L_M(B, m)) \subset L_M(B, m)$.*

Доказательство. (i) Вытекает непосредственно из предложения 1.1.

(ii) Если $\{x(\omega)\}_{\omega\in\Omega} = x \in L_M(B, m)$, то $x(\omega) \in L_M(B_\omega, m_\omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$ (предложение 2.3). Так как $T_\omega \in PC(B_\omega, m_\omega)$ и пространство Орлича $L_M(B_\omega, m_\omega)$ интерполяционно с интерполяционной константой единица (см. [15, II, § 4, п. 6]), то $T_\omega(L_M(B_\omega, m_\omega)) \subset L_M(B_\omega, m_\omega)$, в частности, $(Tx)(\omega) = T_\omega(x(\omega)) \in L_M(B_\omega, m_\omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$. Отсюда в силу предложения 2.3 следует, что $Tx \in L_M(B, m)$. $\square$

Для каждого $T \in PC(B, m)$ положим $S_n(T) = n^{-1} \sum\limits_{i=0}^{n-1} T^i$.

Теорема 3.2. *Пусть $T \in PC(B, m)$. Тогда*

(i) *для каждого $x \in L_1(B, m)$ последовательность $S_n(T)(x)$ (bo)-сходится в $L_1(B, m)$ и (o)-сходится в $L_0(B)$;*

(ii) *если N-функция M удовлетворяет Δ_2-условию, то последовательность $S_n(T)(x)$ (bo)-сходится в $L_M(B, m)$ для каждого $x \in L_M(B, m)$.*

Доказательство. (i) Из предложения 3.1(i) следует, что

$$(Tx)(\omega) = T_\omega(x(\omega)) \quad \text{для п. в. } \omega \in \Omega, \text{ где } T_\omega \in PC(B_\omega, m_\omega).$$

Согласно известной статистической теореме для $L_1(B_\omega, m_\omega)$ (см., например, [16, VIII, п. 5])

$$S_n(T_\omega)(x(\omega)) = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} T_\omega^i x(\omega)$$

сходится по норме $\|\cdot\|_{L_1(B_\omega, m_\omega)}$. Поскольку $\|x\|_{L_1(B,m)}(\omega) = \|x(\omega)\|_{L_1(B_\omega, m_\omega)}$ для п. в. $\omega \in \Omega$ (см. [8, теорема 3.3]), то $S_n(T)(x)$ (bo)-сходится в $(L_1(B, m), \|\cdot\|_{L_1(B,m)})$ для каждого $x \in L_1(B, m)$.

В силу индивидуальной эргодической теоремы для $T_\omega \in PC(B_\omega, m_\omega)$ средние Чезаро

$$S_n(T_\omega)(x(\omega)) = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} T_\omega^i x(\omega)$$

сходятся m_ω-п. в. для любого $x(\omega) \in L_1(B_\omega, m_\omega)$ (см., например, [1, § 3.3]). Поскольку сходимость m_ω-п. в. для последовательностей из $L_0(B_\omega)$ совпадает с (o)-сходимостью в $L_0(B_\omega)$, последовательность $S_n(T_\omega)(x(\omega))$ (o)-сходится в $L_0(B_\omega)$. Отсюда в силу теоремы 4.1 из [8] вытекает, что $S_n(T)(x)$ (o)-сходится в $L_0(B)$.

(ii) Так как N-функция M удовлетворяет Δ_2-условию, норма пространства Орлича $L_M(B_\omega, m_\omega)$ порядково непрерывна. Поэтому в $L_M(B_\omega, m_\omega)$ справедлива статистическая эргодическая теорема для T_ω [17], т. е. $S_n(T_\omega)(x(\omega))$ сходится по норме Орлича $\|\cdot\|_M^\omega$. Отсюда в силу равенства $\|x\|_M(\omega) = \|x(\omega)\|_M^\omega$ для п. в. $\omega \in \Omega$ получим, что последовательность $S_n(T)(x)$ (bo)-сходится в $L_M(B, m)$ для каждого $x \in L_M(B, m)$. $\square$

Следующая теорема является «L_0-вариантом» доминантной эргодической теоремы для L_1-L_∞-сжатий в пространствах Орлича из [2].

Теорема 3.3. *Пусть $L_M(B, m)$ — решетка Орлича — Канторовича, ассоциированная с N-функцией M, обладающей свойством*

$$\sup_{s \geq 1} \frac{\int_1^s M(t^{-1}s)\,dt}{M(s)} < \infty.$$

Тогда последовательность $S_n(T)(|x|)$ ограничена сверху в $L_M(B, m)$ для любых $T \in PC(B, m)$, $x \in L_M(B, m)$ и $S_n(T)(x)$ (o)-сходится в $L_M(B, m)$.

Доказательство. Пусть $x \in L_M(B, m)$, $T \in PC(B, m)$, $T_\omega \in PC(B_\omega, m_\omega)$, $\omega \in \Omega$, $T_\omega(x(\omega)) = (Tx)(\omega)$ п. в. По доминантной эргодической теореме для пространства Орлича $L_M(B_\omega, m_\omega)$ [2] в $L_M(B_\omega, m_\omega)$ существует $\sup\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} T_\omega^i(|x(\omega)|)$. Поэтому из [8, теорема 4.1] и предложения 2.3 вытекает, что в $L_M(B, m)$ существует $\sup\limits_{n \geq 1} n^{-1} \sum\limits_{i=0}^{n-1} T^i(|x|)$.

Осталось использовать теорему 3.2(i), в силу которой последовательность $S_n(T)(x)$ (o)-сходится в $L_M(B, m)$. $\square$

Авторы выражают глубокую признательность рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Krengel U.* Ergodic theorems. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1985.
2. *Braverman M., Rubstein B., Veksler A.* Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces // Studia Math. 1998. V. 128, N 2. P. 145–157.
3. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
4. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1985.
5. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
6. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995. С. 63–211.
7. *Чилин В. И., Ганиев И. Г.* Индивидуальная эргодическая теорема для сжатий в решетке $L_p(\widehat{\nabla}, \hat{\mu})$ Банаха — Канторовича // Изв. вузов. Математика. 2000. № 7. С. 81–83.
8. *Ганиев И. Г.* Измеримые расслоения решеток и их приложения // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. М.: Наука, 2006. С. 9–49.
9. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.

10. *Закиров Б. С.* Решетки Орлича — Канторовича, ассоциированные с L_0-значной мерой // Узб. мат. журн. 2007. № 4. С. 18–34.
11. *Закиров Б. С.* Норма Люксембурга в решетке Орлича — Канторовича // Узб. мат. журн. 2007. № 2. С. 32–44.
12. *Ганиев И. Г.* Решеточные гомоморфизмы в решетках Банаха — Канторовича // Владикавказск. мат. журн. 2004. Т. 6, № 1. С. 37–41.
13. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры. М.: Наука, 1969.
14. *Fack T., Kosaki H.* Generalised s-numbers of τ-measurable operators // Pacif. J. Math. 1986. V. 123, N 2. P. 269–300.
15. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
16. *Dunford N., Schwartz J.* Linear operators.. New York: Interscience, 1958. Part I.
17. *Векслер А. С.* Эргодическая теорема в симметричных пространствах // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 24, № 4. С. 189–191.

Статья поступила 11 марта 2008 г.

Закиров Ботир Сабитович
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта,
ул. Адылходжаева, 1, Ташкент 100167, Узбекистан
botirzakirov@list.ru

Чилин Владимир Иванович
Национальный университет Узбекистана, Вузгородок, Ташкент 100174, Узбекистан
chilin@ucd.uz