Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 512.554

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОБЕРТЫВАЮЩИЕ АЛГЕБР МАЛЬЦЕВА. ПУНКТИРОВАННЫЕ БИАЛГЕБРЫ МУФАНГ

В. Н. Желябин

Аннотация. Изучаются унитальные коассоциативные кокоммутативные пунктированные H-биалгебры Муфанг. Доказан аналог теоремы Картье — Костанта — Милнора — Мура для слабо ассоциативных H-биалгебр Муфанг. В частности, доказано, что H-биалгебра Муфанг, у которой примитивные элементы коммутируют с групповыми, изоморфна тензорному произведению универсальной обертывающей алгебры Мальцева и луповой алгебры, построенной по лупе Муфанг.

Ключевые слова: алгебры Хопфа, неассоциативные алгебры, лупы, алгебры Ли, алгебры Мальцева.

В теории алгебр Хопфа важным примером алгебр Хопфа являются универсальные обертывающие алгебр Ли. В силу критерия Фридрихса над полем характеристики 0 пространство примитивных элементов универсальной обертывающей совпадает с исходной алгеброй Ли. Милнор и Мур в [1] показали, что алгебра Хопфа над полем нулевой характеристики, порожденная примитивными элементами, изоморфна универсальной обертывающей алгебре Ли примитивных элементов. Другим важным примером алгебр Хопфа являются групповые алгебры.

Хорошо известно, что групповые алгебры являются кокоммутативными пунктированными, а универсальные обертывающие алгебр Ли — кокоммутативными связны́ми алгебрами Хопфа. Этими алгебрами Хопфа исчерпывается структура кокоммутативных пунктированных алгебр Хопфа [2]. А именно, в силу результата Картье — Костанта — Милнора — Мура любая кокоммутативная пунктированная алгебра Хопфа над полем характеристики нуль изоморфна смеш-произведению универсальной обертывающей алгебры Ли и групповой алгебры, где действие групповых элементов на универсальной обертывающей алгебре определяется сопряжением. В случае, когда примитивные элементы коммутируют с групповыми элементами, это смеш-произведение является обычным тензорным произведением алгебр Хопфа.

Аналогами неассоциативных алгебр Хопфа являются H-биалгебры, введенные в работе [3]. Примерами H-биалгебр могут служить квазигрупповая алгебра, построенная по некоторой квазигруппе, а также универсальная обертывающая гиперsucceeding алгебры [3]. Эти H-биалгебры являются примерами коассоциативных кокоммутативных пунктированных и связны́х H-биалгебр.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–09–00157), гранта FAPESP (05/60142–7), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–344.2008.1), и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419).

H-биалгебра, построенная по лупе Муфанг, удовлетворяет тождествам Муфанг для групповых элементов. Эти тождества можно записать в обозначениях Свидлера и рассматривать как тождества H-биалгебры [3]. Другим примером таких H-биалгебр являются универсальные обертывающие алгебр Мальцева.

Алгебры Мальцева введены А. И. Мальцевым [4] как касательные алгебры локальных аналитических луп Муфанг. Они являются обобщением алгебр Ли, и их теория достаточно хорошо развита [5]. Важным примером нелиевой алгебры Мальцева является векторное пространство элементов с нулевым следом алгебры Кэли — Диксона относительно операции коммутирования в качестве умножения [6, 7]. Более того, для любой альтернативной алгебры A коммутаторная алгебра A^- является алгеброй Мальцева.

В связи с известной проблемой А. И. Мальцева о вложении алгебры Мальцева в коммутаторную алгебру некоторой альтернативной алгебры, универсальные обертывающие алгебры Мальцева вначале развивались в классе альтернативных алгебр [9].

Однако, как показано в [10], обобщенный альтернативный центр произвольной алгебры является алгеброй Мальцева относительно операции коммутирования. В [11] показано, что любая алгебра Мальцева является подалгеброй коммутаторной алгебры обобщенного альтернативного центра некоторой неассоциативной алгебры. Среди этих неассоциативных обертывающих алгебр Мальцева, как и в случае алгебр Ли, существует универсальная обертывающая алгебра. Во многом свойства этих универсальных обертывающих близки к свойствам универсальных обертывающих алгебр Ли. Так, например, в [12] установлено, что центр универсальной обертывающей полупростой конечномерной алгебры Мальцева над полем характеристики нуль является кольцом многочленов от конечного числа переменных. Универсальные обертывающие алгебр Мальцева являются коассоциативными кокоммутативными пунктированными связны́ми H-биалгебрами. Как биалгебры они удовлетворяют тождествам Муфанг для H-биалгебр [3].

H-биалгебры, которые удовлетворяют тождествам Муфанг для H-биалгебр, естественно называть *H-биалгебрами Муфанг* или *альтернативными H-биалгебрами*.

В данной работе доказано, что над полем характеристики нуль унитальная коассоциативная кокоммутативная неприводимая (связная) биалгебра Муфанг изоморфна универсальной обертывающей алгебры Мальцева. В работе также изучаются слабо ассоциативные H-биалгебры Муфанг, т. е. H-биалгебры, у которых каждый примитивный элемент ассоциирует с групповыми, а каждый групповой элемент — с примитивными. Доказан аналог теоремы Картье — Костанта — Милнора — Мура для унитальных коассоциативных кокоммутативных пунктированных слабо ассоциативных H-биалгебр Муфанг. В случае, когда примитивные элементы коммутируют с групповыми, такие H-биалгебры Муфанг изоморфны тензорному произведению универсальной обертывающей алгебры Мальцева и луповой H-биалгебры Муфанг. Изучаются H-биалгебры Муфанг, у которых существует групповой элемент, антикоммутирующий с примитивными элементами. Показано, что в таких H-биалгебрах множество примитивных элементов образуют алгебру Ли и они содержат H-биалгебру, полученную аналогично процессу Кэлли — Диксона из универсальной обертывающей алгебры Ли примитивных элементов.

1. Определения и предварительные результаты

Пусть V — линейное пространство над полем Φ. Через V^* обозначим дуальное пространство для V. Для линейных пространств V и U над полем Φ через $V \otimes U$ обозначим их тензорное произведение над Φ.

Определение. Пара (C, Δ), где C — линейное пространство, а $\Delta : C \mapsto C \otimes C$ — линейное отображение, называется *коалгеброй*. Отображение Δ называется *коумножением*. Для элемента a коалгебры (C, Δ) если $\Delta(a) = \sum\limits_i a_{1i} \otimes a_{2i}$, то будем писать $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

В данном определении не предполагается, что коалгебра (C, Δ) коассоциативна.

Коединицей коалгебры (C, Δ) называется такой функционал ϵ из C^*, что для произвольного элемента a из C имеет место

$$a = \sum \epsilon(a_{(1)})a_{(2)} = \sum \epsilon(a_{(2)})a_{(1)}.$$

Ненулевой элемент g коалгебры (C, Δ) называется *групповым*, если $\Delta(g) = g \otimes g$. Элемент a коалгебры (C, Δ) называется *примитивным*, если для некоторого группового элемента g

$$\Delta(a) = a \otimes g + g \otimes a.$$

Через $P(C)$ обозначим множество примитивных элементов коалгебры (C, Δ).

Пусть (C, Δ) — коалгебра. Тогда дуальное пространство C^* является алгеброй относительно операции умножения

$$(f * g)(a) = \sum f(a_{(1)})g(a_{(2)}).$$

Алгебра C^* называется *дуальной алгеброй* коалгебры (C, Δ). Коединица ϵ коалгебры (C, Δ) является единицей для дуальной алгебры C^*. Дуальная алгебра C^* задает на пространстве C левое $(\rightharpoonup)$ и правое $(\leftharpoonup)$ бимодульные действия:

$$f \rightharpoonup a = \sum a_{(1)} f(a_{(2)}) \quad \text{и} \quad a \leftharpoonup f = \sum f(a_{(1)})a_{(2)},$$

где $f \in C^*$ и $a \in C$.

Определение. Линейное подпространство B коалгебры (C, Δ) называется *подкоалгеброй*, если $\Delta(B) \subseteq B \otimes B$.

Коалгебра (C, Δ) называется *локально конечномерной*, если любой элемент коалгебры (C, Δ) содержится в конечномерной подкоалгебре.

Коалгебра (C, Δ) называется *простой*, если она имеет только две подкоалгебры: нулевую и саму коалгебру (C, Δ).

Коалгебра (C, Δ) называется *пунктированной*, если все ее простые подкоалгебры одномерны.

Коалгебра (C, Δ) называется *неприводимой* (*связной*), если любые ее две ненулевые подкоалгебры имеют ненулевое пересечение.

Так же, как в ассоциативном случае, справедливо

Предложение 1. *Пусть (C, Δ) — локально конечномерная коалгебра. В этом случае (C, Δ) является неприводимой коалгеброй тогда и только тогда, когда (C, Δ) содержит единственную простую подкоалгебру.*

Подкоалгебра D коалгебры (C, Δ) называется *неприводимой компонентой*, если D — максимальная неприводимая подкоалгебра в (C, Δ).

Коалгебра (C, Δ) называется *коассоциативной*, если

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta,$$

и кокоммутативной, если

$$\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} = \sum a_{(2)} \otimes a_{(1)}.$$

Известно, что любая коассоциативная коалгебра локально конечномерна.

Теорема 1 [2, с. 163]. *Пусть (C, Δ, ϵ) — коассоциативная кокоммутативная коалгебра. Тогда (C, Δ, ϵ) — прямая сумма своих неприводимых компонент.*

Определение. Четверка $(B, \cdot, \Delta, \epsilon)$, где $(B, \cdot)$ — алгебра (не обязательно ассоциативная) и (B, Δ) — коалгебра с коединицей ϵ, называется *биалгеброй*, если для любых элементов $a, b \in B$ имеют место равенства

$$\Delta(ab) = \sum a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)} \quad \text{и} \quad \epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b).$$

Нетрудно видеть, что $(B, \cdot, \Delta, \epsilon)$ — биалгебра тогда и только тогда, когда умножение $(\cdot) : B \otimes B \mapsto B$ является гомоморфизмом коалгебр или коумножение $\Delta : B \mapsto B \otimes B$ является гомоморфизмом алгебр.

Пусть $(B, \cdot, u)$ — унитальная алгебра, т. е. $u : \Phi \mapsto B$ — линейное отображение, удовлетворяющее условиям $u(\alpha)a = \alpha a$ и $au(\alpha) = \alpha a$ для любых $a \in B$, $\alpha \in \Phi$. Тогда $u(1)$ — единица алгебры B, которую мы также обозначим через 1. Если $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ и $\epsilon(1) = 1$, то $(B, \cdot, \Delta, \epsilon, u)$ называется *унитальной биалгеброй*.

Определение. Биалгебра $(B, \cdot, \Delta, \epsilon)$ с двумя билинейными отображениями — левым и правым делениями

$$\backslash : B \otimes B \mapsto B \quad \text{и} \quad / : B \otimes B \mapsto B,$$

для которых выполняются равенства

$$\begin{aligned} \sum a_{(1)}\backslash(a_{(2)}b) = \epsilon(a)b = \sum a_{(1)}(a_{(2)}\backslash b), \\ \sum (ba_{(1)})/a_{(2)} = \epsilon(a)b = \sum (b/a_{(1)})a_{(2)}, \end{aligned} \tag{1}$$

называется *H-биалгеброй*. Унитальная H-биалгебра $(B, \cdot, \Delta, \epsilon, u, \backslash, /)$ — это унитальная биалгебра $(B, \cdot, \Delta, \epsilon, u)$ такая, что $(B, \cdot, \Delta, \epsilon, \backslash, /)$ — H-биалгебра.

Примером H-биалгебры служит любая алгебра Хопфа H, если левое и правое деления на H определить следующим образом:

$$a\backslash b = S(a)b, \quad a/b = aS(b),$$

где S — антипод алгебры Хопфа H.

Биалгебру $(B, \cdot, \Delta, \epsilon)$, для которой коалгебра (B, Δ) коассоциативна, будем называть *коассоциативной биалгеброй*.

Как показано в [3], каждая ассоциативная коассоциативная унитальная H-биалгебра является алгеброй Хопфа. Примером неассоциативной H-биалгебры служит алгебра, построенная по квазигруппе.

Непустое множество Q с тремя бинарными операциями $(\cdot)$, $\backslash$ и $/$ называется *квазигруппой*, если выполняются тождества $a(a\backslash b) = a\backslash(ab) = b$ и $(b/a)a = (ba)/a = b$. Рассмотрим линейное пространство $\Phi(Q)$, базисом которого является множество Q. Операции $\cdot$, $\backslash$ и $/$ продолжаются на $\Phi(Q)$ по линейности. Для

$a \in Q$ коумножение определяется так: $\Delta(a) = a \otimes a$, коединица $\epsilon(a) = 1$. Тогда $(\Phi(Q), \Delta, \epsilon, \backslash, /)$ — H-биалгебра.

Пусть (C, Δ) — коалгебра и A — ассоциативная алгебра. Тогда $\mathrm{Conv}(C, A) = (\mathrm{Hom}(C, A), *)$ — конволютивная алгебра с конволютивным умножением

$$(\phi * \psi)(c) = \sum \phi(c_{(1)})\phi(c_{(2)}).$$

Если ϵ — коединица коалгебры (C, Δ), то для любого $\phi \in \mathrm{Hom}(C, A)$ имеем $\phi * \epsilon = \epsilon * \phi = \phi$, т. е. ϵ — единица алгебры $\mathrm{Conv}(C, A)$.

Пусть B — произвольная алгебра. Обозначим через L_x, R_x операторы левого и правого умножений на элемент $x \in B$. Тогда определены линейные операторы

$$L : B \mapsto \mathrm{End}(B),\ L : x \mapsto L_x \quad \text{и} \quad R : B \mapsto \mathrm{End}(B),\ R : x \mapsto R_x.$$

Предложение 2 [3]. *Пусть $(B, \cdot, \Delta, \epsilon)$ — коассоциативная биалгебра. Тогда $(B, \cdot, \Delta, \epsilon)$ допускает единственную структуру H-биалгебры в том и только в том случае, когда L, R — обратимые элементы в алгебре* $\mathrm{Conv}(B, \mathrm{End}(B))$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что все рассматриваемые коалгебры являются коассоциативными коалгебрами с коединицей.

Критерий обратимости элементов $\phi \in \mathrm{Conv}(C, A)$ для некоторых коалгебр (C, Δ, ϵ) дает следующее

Предложение 3 [2, с. 195]. *Пусть (C, Δ, ϵ) — коалгебра и A — ассоциативная унитальная алгебра. Предположим, что C — прямая сумма пунктированных неприводимых подкоалгебр (C_i, Δ, ϵ) с групповыми элементами g_i. Тогда элемент $\phi \in \mathrm{Conv}(C, A)$ обратим в алгебре $\mathrm{Conv}(C, A)$ в том и только в том случае, когда для любого индекса i элемент $\phi(g_i)$ обратим в алгебре A.*

Из предложений 2 и 3 следует

Предложение 4. *Пусть $(B, \cdot, \Delta, \epsilon, u)$ — унитальная коассоциативная биалгебра. Если (B, Δ, ϵ) — неприводимая коалгебра, то на $(B, \cdot, \Delta, \epsilon, u)$ можно определить единственным образом структуру H-биалгебры.*

Для неассоциативных биалгебр справедлива

Теорема 2. *Пусть $(B, \cdot, \Delta, \epsilon, u)$ — унитальная коассоциативная биалгебра и C — неприводимая подкоалгебра коалгебры (B, Δ, ϵ), содержащая $\Phi 1$. Предположим, что C порождает алгебру B. Тогда (B, Δ, ϵ) — неприводимая коалгебра. В частности, если пространство $\Phi 1 + P(B)$ порождает алгебру B, то (B, Δ, ϵ) — неприводимая коалгебра с единственной простой подкоалгеброй $\Phi 1$.*

Доказательство аналогично доказательству утверждений 5.1.9, 5.2.12 из [13].

Пусть V — произвольное линейное пространство над Φ. Положим $TV(0) = \Phi$, $TV(1) = V$, $TV(n) = V \otimes \ldots \otimes V$ — тензорное произведение n сомножителей и $TV = \bigoplus_{n=0} TV(n)$. Зададим на пространстве TV структуру ассоциативной коалгебры, полагая

$$\underline{\Delta}(1) = 1 \otimes 1, \quad \underline{\Delta}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes \ldots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_n),$$

$$\underline{\epsilon}(1) = 1, \quad \underline{\epsilon}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = 0 \ \text{ для } \ n \geq 1.$$

Тогда $(TV, \underline{\Delta}, \underline{\epsilon})$ — пунктированная неприводимая коалгебра.

Пусть S_n — симметрическая группа перестановок n-элементного множества. Перестановка $\pi \in S_n$ называется *i-перестановкой* для $1 \leq i < n$, если она сохраняет порядок элементов в множествах $\{1, \dots, i\}$ и $\{i+1, \dots, n\}$, т. е. если $\pi r < \pi s \leq i$ или $i < \pi r < \pi s$, то $r < s$.

Определим на пространстве TV операцию умножения $\bullet$, полагая

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_i) \bullet (v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_n) = \sum_{\pi\, -\, i\text{-перестановка}} v_{\pi 1} \otimes \ldots v_{\pi n},$$

$$1 \bullet (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n = (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) \bullet 1,$$

$$u : \Phi \mapsto TV, \quad u(\alpha) = \alpha 1.$$

Тогда $(TV, \bullet, u)$ — унитальная ассоциативно-коммутативная алгебра. Алгебра $(TV, \bullet, u)$ называется *перестановочной* алгеброй на пространстве V и обозначается через $\mathrm{Sh}(V)$. Более того, $(\mathrm{Sh}(V), \bullet, \underline{\Delta}, \underline{\epsilon}, u)$ является биалгеброй. Биалгебра $(\mathrm{Sh}(V), \bullet, \underline{\Delta}, \underline{\epsilon}, u)$ является ассоциативной строго градуированной биалгеброй, т. е. $\mathrm{Sh}(V)(0) = \Phi$, $\mathrm{Sh}(V)(1) = P(\mathrm{Sh}(V))$.

Обозначим через $K(V)$ наибольшую кокоммутативную подкоалгебру в коалгебре $(\mathrm{Sh}(V), \underline{\Delta}, \underline{\epsilon})$. Тогда $K(V)$ — градуированная подбиалгебра в $(\mathrm{Sh}(V), \bullet, \underline{\Delta}, \underline{\epsilon}, u)$, причем $K(V)(0) = \Phi$, $K(V)(1) = V$. Так как $\mathrm{Sh}(0) + \mathrm{Sh}(1) \subseteq K(V)$, то $K(V)(1) = P(K(V))$.

Теорема 3 [2, с. 263]. *Пусть C — кокоммутативная пунктированная неприводимая коалгебра и $F : K(V) \mapsto C$ — гомоморфизм коалгебр. Тогда F является инъективным (сюръективным или биективным) гомоморфизмом всякий раз, когда сужение F на $P(K(V))$ является инъективным (сюръективным или биективным) отображением пространства $P(K(V))$ в $P(C)$.*

Пусть Λ — вполне упорядоченное множество и N^Λ — множество функций из Λ в $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ с конечным носителем. На N^Λ определена операция $+$: если $f, g \in N^\Lambda$, то $(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$.

Пусть V — линейное пространство с базисом $\{v_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$, где Λ — вполне упорядоченное множество. Пусть $v_{\alpha(0)} = 1$ и $v_{\alpha(n)} = v_\alpha \otimes \ldots \otimes v_\alpha$ — произведение n тензоров. Для функции $f \in N^\Lambda$ через $v_{(f)}$ обозначим упорядоченное произведение $\prod\limits_{\alpha \in \Lambda} v_{\alpha(f(\alpha))}$ элементов $v_{\alpha(f(\alpha))}$ в алгебре $K(V)$. Тогда имеют место равенства

$$\underline{\Delta}(v_{(f)}) = \sum_{g+h=f} v_{(g)} \otimes v_{(h)}, \quad \underline{\epsilon}(v_{(f)}) = \delta_{0,f}.$$

Теорема 4 [2, с. 270]. *Элементы $\{v_{(f)} \mid f \in N^\Lambda\}$ образуют базис пространства $K(V)$.*

2. Неприводимые коассоциативные кокоммутативные биалгебры Муфанг

В этом разделе описаны унитальные коассоциативные кокоммутативные неприводимые биалгебры Муфанг.

Квазигруппа $(Q, \cdot, \backslash, /)$, в которой выполняется тождество $x \backslash y = x/y$, называется *лупой*. Лупа $(Q, \cdot, \backslash, /)$ называется *лупой Муфанг*, если в ней выполняется одно из эквивалентных тождеств:

$$x(y(xz)) = ((xy)x)z, \quad ((zx)y)x = z(x(yx)),$$

$$x((yz)x) = (xy)(zx), \quad (x(yz))x = (xy)(zx).$$

Определение. Биалгебра $(B, \cdot, \Delta)$ называется *биалгеброй Муфанг*, если в ней выполняются следующие тождества:

$$\begin{gathered}\sum x_{(1)}(y(x_{(2)}z)) = \sum((x_{(1)}y)x_{(2)})z, \quad \sum((zx_{(1)})y)x_{(2)} = \sum z(x_{(1)}(yx_{(2)})), \\ \sum x_{(1)}((yz)x_{(2)}) = \sum(x_{(1)}y)(zx_{(2)}), \quad \sum(x_{(1)}(yz))x_{(2)} = \sum(x_{(1)}y)(zx_{(2)}).\end{gathered} \tag{2}$$

Данные тождества получаются процессом линеаризации [3] тождеств Муфанг. Как показано в [3], все тождества из (2) эквивалентны между собой.

Пусть $\Phi(Q)$ — H-биалгебра, построенная по лупе Муфанг Q. Тогда в $\Phi(Q)$ имеют место тождества (2). Приведем пример биалгебры Муфанг, связанный с алгеброй Мальцева.

Алгебра M над полем Φ с бинарной антикоммутативной операцией $[\,,]$ называется *алгеброй Мальцева*, если в ней выполняется тождество

$$[J(x, y, z), x] = J(x, y, [x, z]),$$

где $J(x, y, z) = [[x, y], z] - [[x, z], y] - [x, [y, z]]$ — якобиан от x, y, z.

Пусть характеристика поля Φ не равна 2 и A — произвольная алгебра над Φ. Определим обобщенный альтернативный центр алгебры A, полагая

$$N_{\mathrm{alt}}(A) = \{a \in A \mid (a, x, y) = -(x, a, y) = (x, y, a) \text{ для любых } x, y \in A\},$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$. Пространство $N_{\mathrm{alt}}(A)$ замкнуто относительно операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$. Более того, $(N_{\mathrm{alt}}(A), [\,,])$ — алгебра Мальцева [10].

В любой алгебре справедливо тождество

$$(xy, z, t) = (x, yz, t) - (x, y, zt) + x(y, z, t) + (x, y, z)t. \tag{3}$$

Для элемента $a \in A$ положим $a^1 = a$, $a^2 = aa$, $a^{k+1} = aa^k$.

Предложение 5. *Пусть a — произвольный элемент из $N_{\mathrm{alt}}(A)$. Тогда для любого $x \in A$ и любых целых положительных чисел k, n имеют место равенства*

$$(a^n, a^k, x) = (a^n, x, a^k) = (x, a^n, a^k) = 0.$$

Доказательство. Сначала индукцией по k докажем, что $(a, a^k, x) = 0$ для любого целого числа $k \geq 0$. Так как $a \in N_{\mathrm{alt}}(A)$, то $(a, a, x) = -(a, a, x)$. Следовательно, $2(a, a, x) = 0$. Поэтому $(a, x, a) = -(a, a, x) = 0$. Предположим, что для всех $i \leq k$ выполняется $(a, a^i, x) = 0$. Тогда $(a^i, x, a) = 0$. Поскольку $(a, a^{k+1}, x) = (a^{k+1}, x, a)$, в силу (3) имеем

$$(a, a^{k+1}, x) = (aa^k, x, a) = (a, a^k x, a) - (a, a^k, xa) + a(a^k, x, a) + (a, a^k, x)a = 0.$$

Теперь индукцией по n докажем, что $(a^n, a^k, x) = 0$ для любого целого k. Для $n = 1$ все доказано. Пусть для всех $i \leq n$ выполняется $(a^i, a^k, x) = 0$. Тогда по (3)

$$\begin{aligned}(aa^n, a^k, x) &= (a, a^n a^k, x) - (a, a^n, a^k x) + a(a^n, a^k, x) + (a, a^n, a^k)x = (a, a^n a^k, x) \\ &= (a^n a^k, x, a) = (a^n, a^k x, a) - (a^n, a^k, xa) + a^n(a^k, x, a) + (a^n, a^k, x)a = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $(a^n, a^k, x) = 0$ для любых целых положительных k, n.

Остальные равенства доказываются аналогично.

Следствие 1. *Пусть a — произвольный элемент из $N_{\mathrm{alt}}(A)$ и $x \in A$. Рассмотрим элемент $a(a\dots(ax)\dots)$, где элемент a имеет k вхождений. Тогда*

$$a(a\dots(ax)\dots) = a^k x.$$

Следствие 2. *Пусть a — произвольный элемент из $N_{\mathrm{alt}}(A)$. Тогда подалгебра в A, порожденная элементом a, ассоциативна.*

Если x — примитивный элемент биалгебры Муфанг B, то из (2) получаем, что $x \in N_{\mathrm{alt}}(B)$. Поэтому $(P(B), [\,,])$ — подалгебра в алгебре Мальцева $N_{\mathrm{alt}}(B)^-$. Напомним, что элемент x биалгебры B является примитивным, если

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

Пусть $(M, [\,,])$ — алгебра Мальцева и $\Phi(M)$ — свободная унитальная неассоциативная алгебра, порожденная элементами базиса пространства M. На $\Phi(M)$ зададим структуру коассоциативной кокоммутативной биалгебры, полагая для элемента a из M

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a, \quad \epsilon(1) = 1, \quad \epsilon(a) = 0.$$

Рассмотрим идеал $I(M)$ алгебры $\Phi(M)$, порожденный множеством

$$\{ab - ba - [a,b], (a,x,y) + (x,a,y), (x,a,y) + (x,y,a) \mid a, b \in M \text{ и } x, y \in \Phi(M)\}.$$

Очевидно, что $\epsilon(I(M)) = 0$. Идеал $I(M)$ является коидеалом коалгебры $(\Phi(M), \Delta, \epsilon)$, т. е.

$$\Delta(I(M)) \subseteq I(M) \otimes \Phi(M) + \Phi(M) \otimes I(M).$$

Действительно, легко видеть, что для $a, b \in M$

$$\Delta(ab - ba - [a,b]) = (ab - ba - [a,b]) \otimes 1 + 1 \otimes (ab - ba - [a,b]).$$

Если $x, y \in \Phi(M)$, то по лемме 3.1 из [14]

$$\Delta((x,y,a)) = \sum (x_{(1)}, y_{(1)}, a) \otimes x_{(2)}y_{(2)} + x_{(2)}y_{(2)} \otimes (x_{(1)}, y_{(1)}, a),$$

$$\Delta((x,a,y)) = \sum (x_{(1)}, a, y_{(1)}) \otimes x_{(2)}y_{(2)} + x_{(2)}y_{(2)} \otimes (x_{(1)}, a, y_{(1)}).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\Delta((x,y,a) + (x,a,y)) = \sum &((x_{(1)}, y_{(1)}, a) + (x_{(1)}, a, y_{(1)})) \\ &\otimes x_{(2)}y_{(2)} + x_{(2)}y_{(2)} \otimes ((x_{(1)}, y_{(1)}, a) + (x_{(1)}, a, y_{(1)})).\end{aligned}$$

Поэтому $\Delta((x,y,a) + (x,a,y)) \in I(M) \otimes \Phi(M) + \Phi(M) \otimes I(M)$. Аналогично

$$\Delta((a,x,y) + (x,a,y)) \in I(M) \otimes \Phi(M) + \Phi(M) \otimes I(M).$$

Следовательно, $I(M)$ — коидеал.

Пусть $U(M) = \Phi(M)/I$ и

$$i : M \mapsto N_{\mathrm{alt}}(U(M)) \subseteq U(M), \quad a \in M \mapsto i(a) = \bar{a} = a + I(M).$$

Тогда $U(M)$ — коассоциативная кокоммутативная биалгебра с коумножением

$$\overline{\Delta} : x + I(M) \mapsto \sum (x_{(1)} + I(M)) \otimes (x_{(2)} + I(M))$$

и коединицей $\overline{\epsilon}(x + I(M)) = \epsilon(x)$. Поскольку $\Phi 1 + i(M)$ — неприводимая подкоалгебра в $(U(M), \overline{\Delta}, \overline{\epsilon})$ и пространство $\Phi 1 + i(M)$ порождает алгебру $U(M)$, по теореме 2 коалгебра $U(M)$ неприводима и $\Phi 1$ — ее единственная простая подкоалгебра. В силу предложения 4 биалгебра $(U(M), \cdot, \overline{\Delta}, \overline{\epsilon})$ допускает структуру H-биалгебры.

В [11] показано, что если характеристика поля не равна 2, 3, то M изоморфно вкладывается в алгебру $N_{\mathrm{alt}}(U(M))^{(-)}$ и $U(M)$ — универсальная алгебра, обладающая этим свойством. В дальнейшем мы будем использовать из [11] только следующий факт.

Пусть $\{a_i \mid i \in \Lambda\}$ — базис M, где Λ — вполне упорядоченное множество. Тогда множество $\{\bar{a}_{i_1}(\bar{a}_{i_2}(\dots(\bar{a}_{i_{n-1}}\bar{a}_{i_n})\dots)), i_1 \le i_2 \le \dots \le i_n\}$ линейно порождает пространство $U(M)$.

В силу следствия 1 получаем, что множество

$$\big\{\bar{a}_{i_1}^{k_1}\big(\bar{a}_{i_2}^{k_2}\big(\dots\big(\bar{a}_{i_n}^{k_n}\dots\big)\dots\big)\big), i_1 < i_2 < \dots < i_n\big\}$$

линейно порождает пространство $U(M)$.

Если характеристика поля не равна 2, 3, то, как показано в [3, теорема 15], алгебра $U(M)$ является H-биалгеброй Муфанг. Другие примеры H-биалгебр Муфанг дает

Предложение 6. *Пусть $(B_1, \Delta_1, \epsilon_1, \backslash_1, /_1)$ и $(B_2, \Delta_2, \epsilon_2, \backslash_2, /_2)$ — две H-биалгебры Муфанг, $(B_1 \otimes B_2, \Delta, \epsilon)$ — тензорное произведение биалгебр $(B_1, \Delta_1, \epsilon_1)$ и $(B_2, \Delta_2, \epsilon_2)$. Тогда $(B_1 \otimes B_2, \Delta, \epsilon, \backslash, /)$, где*

$$(a \otimes b)\backslash(c \otimes d) = a\backslash_1 c \otimes b\backslash_2 d \quad \text{и} \quad (a \otimes b)/(c \otimes d) = a/_1 c \otimes b/_2 d,$$

является H-биалгеброй Муфанг.

Доказательство теоремы проводится непосредственной проверкой свойств H-биалгебры и тождеств (2).

Также отметим [3], что множество $G(B)$ групповых элементов H-биалгебры Муфанг $(B, \Delta, \epsilon, \backslash, /)$ является лупой Муфанг.

Пусть Φ — поле характеристики нуль и $(B, \cdot, \Delta, \epsilon, u)$ — унитальная биалгебра. Предположим, что $P(B) \subseteq N_{\mathrm{alt}}(B)$. Пусть $\{a_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ — базис $P(B)$. Для функции $f \in N^\Lambda$ с ненулевыми значениями на элементах $\alpha_1 \le \dots \le \alpha_n$ положим

$$a^{(f)} = \frac{a_{\alpha_1}^{f(\alpha_1)}}{f(\alpha_1)!}\left(\frac{a_{\alpha_2}^{f(\alpha_2)}}{f(\alpha_2)!}\left(\dots\left(\frac{a_{\alpha_{n-1}}^{f(\alpha_{n-1})}}{f(\alpha_{n-1})!}\frac{a_{\alpha_n}^{f(\alpha_n)}}{f(\alpha_n)!}\right)\dots\right)\right).$$

Предложение 7. *Для любой функции $f \in N^\Lambda$ имеет место*

$$\Delta(a^{(f)}) = \sum_{g+h=f} a^{(g)} \otimes a^{(h)}.$$

Доказательство. Докажем равенство индукцией по числу $|\operatorname{supp}(f)|$ элементов носителя функции f. Если $|\operatorname{supp}(f)| = 1$ и $f(\alpha_1) = n$, то $a^{(f)} = \frac{a_{\alpha_1}^n}{n!}$. Тогда ввиду следствия 2

$$\Delta(a^{(f)}) = \frac{1}{n!}\Delta(a_{\alpha_1}^n) = \frac{1}{n!}(a_{\alpha_1} \otimes 1 + 1 \otimes a_{\alpha_1})^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\frac{1}{(n-i)!}a_{\alpha_1}^i \otimes a_{\alpha_1}^{(n-i)}.$$

Пусть $1 \leq i \leq n$. Тогда положим $g(\alpha_1) = i$, $h(\alpha_1) = n - i$ и $g(\beta) = h(\beta) = 0$ для всех $\beta \neq \alpha_1$. Отсюда получаем

$$\Delta(a^{(f)}) = \sum_{g+h=f} a^{(g)} \otimes a^{(h)}.$$

Предположим, что для функций $g \in N^{\Lambda}$, у которых $|\operatorname{supp}(g)| < |\operatorname{supp}(f)|$, все доказано.

Пусть $\operatorname{supp}(f) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Определим функции $f_1 \in N^{\Lambda}$ и $\bar{f} \in N^{\Lambda}$, полагая $f_1(\alpha_1) = f(\alpha_1)$, $f_1(\beta) = 0$ для всех $\beta \neq \alpha_1$ и $\bar{f}(\alpha_2) = f(\alpha_2), \dots, \bar{f}(\alpha_n) = f(\alpha_n)$, для остальных $\beta \in \Lambda$ — $\bar{f}(\beta) = 0$. Тогда $a^{(f)} = a^{(f_1)} a^{(\bar{f})}$ и

$$\Delta(a^{(f)}) = \Delta(a^{(f_1)})\Delta(a^{(\bar{f})}) = \sum_{g_1+h_1=f_1} a^{(g_1)} \otimes a^{(h_1)} \sum_{\bar{g}+\bar{h}=\bar{f}} a^{(\bar{g})} \otimes a^{(\bar{h})}$$
$$= \sum_{g_1+h_1=f_1,\ \bar{g}+\bar{h}=\bar{f}} a^{(g_1)} a^{(\bar{g})} \otimes a^{(h_1)} a^{(\bar{h})}.$$

Зафиксируем два разложения $g_1 + h_1 = f_1$ и $\bar{g} + \bar{h} = \bar{f}$. Определим функции $g \in N^{\Lambda}$ и $h \in N^{\Lambda}$, полагая $g(\alpha_1) = g_1(\alpha_1), g(\alpha_2) = \bar{g}(\alpha_2), \dots, g(\alpha_n) = \bar{g}(\alpha_n)$ и $h(\alpha_1) = h_1(\alpha_1), h(\alpha_2) = \bar{h}(\alpha_2), \dots, h(\alpha_n) = \bar{h}(\alpha_n)$, а для остальных $\beta \in \Lambda$ — $g(\beta) = h(\beta) = 0$. Тогда $f = g + h$. Поэтому

$$\Delta(a^{(f)}) = \sum_{g_1+h_1=f_1,\ \bar{g}+\bar{h}=\bar{f}} a^{(g_1)} a^{(\bar{g})} \otimes a^{(h_1)} a^{(\bar{h})} = \sum_{g+h=f} a^{(g)} \otimes a^{(h)}.$$

Теорема 5. *Пусть $(B, \cdot, \Delta, \epsilon, u)$ — унитальная коассоциативная кокоммутативная неприводимая биалгебра Муфанг над полем характеристики нуль. Тогда B — H-биалгебра и как H-биалгебра она изоморфна H-биалгебре $U(P(B))$.*

Доказательство. Ввиду предложения 4 на B можно задать единственную структуру H-биалгебры. Поскольку B — биалгебра Муфанг, то $P(B) \subseteq N_{\mathrm{alt}}(B)$.

Пусть $\{a_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ — базис пространства $P(B)$, где Λ — вполне упорядоченное множество, и $f \in N^{\Lambda}$. Тогда $\epsilon(a^{(f)}) = \delta_{0,f}$. Рассмотрим коалгебру $(K(P(B)), \underline{\Delta}, \underline{\epsilon})$. По теореме 4 множество элементов $\{a_{(f)} \mid f \in N^{\Lambda}\}$ образуют базис пространства $K(P(B))$. В силу предложения 7 отображение

$$\phi : K(P(B)) \mapsto B,$$

заданное правилом $\phi : a_{(f)} \mapsto a^{(f)}$, является гомоморфизмом коалгебр. Ясно, что на пространстве $P(B)$ отображение ϕ действует тождественно. Поскольку B — неприводимая коалгебра и $\Phi 1$ — простая подкоалгебра в B, то $\Phi 1$ — единственная простая подкоалгебра в B. Поэтому B — пунктированная неприводимая коалгебра. В силу теоремы 3 получаем, что ϕ — изоморфизм коалгебр. Следовательно, множество элементов $\{a^{(f)} \mid f \in N^{\Lambda}\}$ образует базис пространства B. Так как $P(B) \subseteq N_{\mathrm{alt}}(B)$, существует гомоморфизм алгебр $\psi : U(P(B)) \mapsto B$ такой, что $\psi(1) = 1$ и $\psi \circ i$ — тождественное отображение на $P(B)$. Ясно, что

$$\psi\big(\bar{a}_{i_1}^{k_1}\big(\bar{a}_{i_2}^{k_2}\big(\dots\big(\bar{a}_{i_n}^{k_n}\big)\dots\big)\big)\big) = k_1! \dots k_n! a^{(f)}$$

для некоторой функции $f \in N^{\Lambda}$. Поэтому гомоморфизм ψ является изоморфизмом. Нетрудно понять, что ψ — изоморфизм H-биалгебр.

Из теорем 2 и 5 вытекает

Следствие 3. *Пусть Φ — поле характеристики нуль и $(B,\cdot,\Delta,\epsilon,u)$ — унитальная биалгебра Муфанг, которая порождается как алгебра единицей 1 и пространством $P(B)$. Тогда B как H-биалгебра изоморфна H-биалгебре $U(P(B))$.*

3. Коассоциативные кокоммутативные пунктированные слабо ассоциативные *H*-биалгебры Муфанг

Напомним, что подпространство

$$Z_{\mathrm{Lie}}(M)=\{x\in M\mid J(x,y,z)=0 \text{ для любых } y,z\in M\}$$

называется *лиевым центром* алгебры Мальцева M. Как известно, $Z_{\mathrm{Lie}}(M)$ — идеал алгебры M.

Пусть $G(B)$ — множество групповых элементов и $P(B)$ — множество примитивных элементов биалгебры Муфанг B. Тогда биалгебру B назовем *слабо ассоциативной*, если $(x,y,g)=(x,g,h)=0$ для любых $x,y\in P(B)$, $g,h\in G(B)$.

Пусть M — алгебра Мальцева и G — лупа Муфанг. Тогда в силу предложения 6 тензорное произведение $U(M)\otimes\Phi(G)$ — биалгебра Муфанг. Ясно, что $P(U(M)\otimes\Phi(G))=M\otimes 1$, а $G(U(M)\otimes\Phi(G))=1\otimes G$. Нетрудно видеть, что биалгебра $U(M)\otimes\Phi(G)$ слабо ассоциативна. Однако алгебра $U(M)\otimes\Phi(G)$, вообще говоря, не является ассоциативной.

Основным результатом данного раздела является

Теорема 6. *Пусть $(B,\cdot,\Delta,\epsilon,u,\backslash,/)$ — унитальная коассоциативная кокоммутативная пунктированная слабо ассоциативная H-биалгебра Муфанг над полем Φ характеристики нуль. Предположим, что $U(P(B))$ — универсальная обертывающая алгебры $(P(B),[\,,])$, а $\Phi(G(B))$ — луповая алгебра, построенная по лупе Муфанг $G(B)$. Тогда алгебра $U(P(B))$ является подалгеброй B и для любых $a\in U(P(B))$, $g\in G(B)$ имеет место $gag^{-1}\in U(P(B))$. Кроме того, H-биалгебра B изоморфна H-биалгебре $U(P(B))\otimes\Phi(G(B))$, в которой умножение, левое и правое деления задаются равенствами*

$$(a\otimes g)(b\otimes h)=a(gbg^{-1})\otimes gh,$$
$$(a\otimes g)\backslash(b\otimes h)=g^{-1}ag\backslash g^{-1}bg\otimes g\backslash h,$$
$$(a\otimes g)/(b\otimes h)=a/(gh^{-1})b(gh^{-1})^{-1}\otimes g/h.$$

При этом для любого $x\in P(B)$ и любого $g\in G(B)$ справедливо $gxg^{-1}-x\in Z_{\mathrm{Lie}}(P(B))$.

Следуя теории алгебр Хопфа, обозначим полученную таким образом H-биалгебру через $U(P(B))\sharp\Phi(G(B))$.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений. Для этого нам понадобятся следующие тождества, которые выполняются в любой алгебре:

$$[xy,z]=x[y,z]+[x,z]y+(x,y,z)-(x,z,y)+(z,x,y),\tag{4}$$

$$[[x,y],z]-[[x,z],y]-[x,[y,z]]=(x,y,z)-(x,z,y)+(z,x,y)-(y,x,z)+(y,z,x)-(z,y,x).\tag{5}$$

Пусть M — алгебра Мальцева над полем Φ характеристики нуль и $U=U(M)$. Будем предполагать, что $M\subseteq U$. Пусть $\{a_i\mid i\in\Lambda\}$ — базис пространства M. Для каждого числа n пусть U_n — пространство, порожденное элементами $a_{i_1}(a_{i_2}\dots(a_{i_{k-1}}a_{i_k})\dots))$, где $k\le n$. Тогда $U_1=\Phi 1+M$ и $U=\bigcup\limits_n U_n$. Заметим, что, как и в случае алгебр Ли, подпространства U_n образуют фильтрацию алгебры U.

Предложение 8. *Для любого числа n и любых $x, y \in M$ справедливы включения $[U_n, x] \subseteq U_n$ и $(U_n, x, y) \subseteq U_n$.*

Доказательство. Поскольку $U_1 = \Phi 1 + M$ и $M \subseteq N_{\mathrm{alt}}(U(M))$, то $[U_1, x] \subseteq M \subseteq U_1$ и в силу (5) $(U_1, x, y) \subseteq M \subseteq U_1$. Предположим, что для всех $i < n$ предложение доказано. Пусть $u \in U_n$. Тогда $u = zv$, где $z \in M$ и $v \in U_{n-1}$. Так как $M \subseteq N_{\mathrm{alt}}(U(M))$, в силу (4) имеем $[zv, x] = z[v, x] + [z, x]v - 3(v, z, x)$ и по предположению получаем, что $[zv, x] \in U_n$. Следовательно, $[[U_n, x], y] \in U_n$ для любого числа n и любых $x, y \in M$. Поэтому в силу (5) $(U_n, x, y) \in U_n$.

Пусть теперь B — произвольная унитальная H-биалгебра Муфанг, содержащая H-биалгебру U.

Лемма 1. *Пусть $\phi : U \mapsto B$ — линейное отображение и n — натуральное число. Предположим, что $\phi(U_{n-1}) = 0$. Тогда функция $\xi : \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n} \mapsto U$, заданная правилом*

$$\xi(x_1, \ldots, x_n) = \phi(x_1(x_2(\ldots(x_{n-1}x_n)\ldots))),$$

является полилинейной симметрической функцией.

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in M$, и пусть $z = x_{i+2}(\ldots(x_{n-1}x_n)\ldots)$ и $w = x_1(x_2\ldots(x_i(x_{i+1}z))\ldots)$. Ввиду предложения 8

$$\begin{aligned} w &= x_1(x_2(\ldots(x_i, x_{i+1}, z)\ldots)) + x_1(x_2(\ldots((x_ix_{i+1})z)\ldots)) \\ &\equiv x_1(x_2(\ldots((x_ix_{i+1})z)\ldots)) \bmod U_{n-2} \equiv x_1(x_2(\ldots((x_{i+1}x_i)z)\ldots)) \bmod U_{n-1} \\ &\equiv x_1(x_2(\ldots(x_{i+1}(x_iz))\ldots)) + x_1(x_2(\ldots(x_{i+1}, x_i, z)\ldots)) \\ &\equiv x_1(x_2(\ldots(x_{i+1}(x_iz))\ldots)) \bmod U_{n-1}. \end{aligned}$$

Так как $\phi(U_{n-1}) = 0$, то $\xi(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \xi(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)$.

Следующая лемма доказывается аналогично предложению 2 из [12].

Лемма 2. *Для любого $a \in B$ верно включение*

$$(a, U, U) + (U, a, U) + (U, U, a) \subseteq \mathrm{id}_B\langle(M, M, a)\rangle,$$

где $\mathrm{id}_B\langle S\rangle$ обозначает идеал алгебры B, порожденный множеством S.

Отсюда следует

Лемма 3. *Пусть $a \in B$ и в алгебре B справедливо равенство $(x, y, a) = 0$ для любых $x, y \in M$. Тогда для любых элементов $u, v \in U$ имеют место равенства $(u, v, a) = (u, a, v) = (a, u, , v) = 0$.*

Лемма 4. *Пусть n — целое число такое, что для любого $i \le n$ в алгебре B справедливы равенства $(x^i, g, h) = (g, x^i, h) = (g, h, x^i) = 0$ для любого $x \in U_1$ и любых $g, h \in G(B)$. Тогда для любых элементов $x \in U_1$ и $g, h \in G(B)$ имеют место равенства*

$$(x^{n+1}, g, h) = (-1)^n(g, h, x^{n+1}) \ \text{ и } \ (x^{n+1}, g, h) = (-1)^{n+1}(g, x^{n+1}, h).$$

Доказательство. Пусть $x \in U_1$, $g, h \in G(B)$. Сначала докажем, что для любых чисел k, j таких, что $k + j \le n$, имеем $(g, hx^k, x^j) = (x^k, g, hx^j) = 0$.

По (3) и предложению 5 $(g, hx^k, x^j) = -(g, h, x^k)x^j = 0$.

Второе равенство докажем индукцией по j. Для $j = 0$ все доказано. Пусть для всех чисел k, j таких, что $k + j - 1 \le n$, имеет место $(x^k, g, hx^{j-1}) = 0$.

Пусть $k + j \leq n$. Тогда по предположению $(x^{k+1}, g, hx^{j-1}) = 0$. Так как $x \in N_{\mathrm{alt}}(B)$, по (3) и предложению 5

$$\begin{aligned}(x^{k+1}, g, hx^{j-1}) &= (x \cdot x^k, g, hx^{j-1}) = (x, x^k g, hx^{j-1}) \\ &= (x^k g, hx^{j-1}, x) = -(x^k, g, hx^j).\end{aligned}$$

Значит, $(x^k, g, hx^j) = 0$ для всех k, j, удовлетворяющих условию $k + j \leq n$.

Поскольку $x \in N_{\mathrm{alt}}(B)$, по (3) и предложению 5

$$(x^{n+1}, g, h) = (x, x^n g, h) = (x^n g, h, x) = -(x^n, g, hx).$$

В силу (3) по доказанному

$$\begin{aligned}(x^{n+1}, g, h) &= -(x^n, g, hx) = -(x, x^{n-1} g, hx) \\ &= -(x^{n-1} g, hx, x) = (x^{n-1}, g, hx^2).\end{aligned}$$

Поэтому

$$(x^{n+1}, g, h) = (-1)^n (x, g, hx^n) = (-1)^n (g, hx^n, x) = (-1)^n (g, h, x^{n+1}).$$

Поскольку B — биалгебра Муфанг, имеем

$$(x^{n+1}, g, h)g = ((x^{n+1} g)h)g - (x^{n+1}(gh))g = -(x^{n+1}, gh, g).$$

Аналогично $(g, h, x^{n+1})g = (gh, x^{n+1}, g)$. Отсюда получаем, что

$$-(x^{n+1}, gh, g) = (-1)^n (gh, x^{n+1}, g).$$

Следовательно, $(x^{n+1}, g, h) = (-1)^{n+1} (g, x^{n+1}, h)$.

Лемма 5. *Пусть в алгебре B справедливы равенства*

$$(x, g, h) = (g, x, h) = (g, h, x) = 0$$

для любого $x \in U_1$ и любых $g, h \in G(B)$. Тогда для любых $u \in U$ и $g, h \in G(B)$ имеют место равенства

$$(u, g, h) = (g, u, h) = (g, h, u) = 0.$$

Доказательство. Сначала индукцией по n докажем, что

$$(x^n, g, h) = (g, x^n, h) = (g, h, x^n) = 0$$

для любого $x \in U_1$ и любых $g, h \in G(B)$.

Для $n = 1$ все доказано. Пусть для всех $i \leq n$ справедливы равенства

$$(x^i, g, h) = (g, x^i, h) = (g, h, x^i) = 0$$

для любого $x \in U_1$ и любых $g, h \in G(B)$.

Пусть $i + j = n + 1$ и $i, j > 0$. Поскольку B — биалгебра Муфанг, по предположению индукции

$$\begin{aligned}(g, hx^i, x^j)g &= [(g \cdot hx^i)x^j]g - [g(hx^i \cdot x^j)]g \\ &= [(gh)x^i \cdot x^j]g - (gh \cdot x^i)(x^j g) = ((gh)x^i, x^j, g).\end{aligned}$$

С другой стороны, по предложению 5

$$(g, hx^i, x^j)g = [(g \cdot hx^i)x^j]g - g(hx^{i+j})g = (gh \cdot x^{i+j})g - (gh)(x^{i+j} g) = (gh, x^{i+j}, g).$$

Поэтому $(gx^i, x^j, h) = (g, x^{i+j}, h)$ для любых $g, h \in G(B)$. В силу (3) и предложения 5

$$(g, x^{i+j}, h) = (gx^i, x^j, h) + (g, x^i, x^j h).$$

Следовательно, $(g, x^i, x^j h) = 0$. Аналогично получаем, что

$$g(x^j, x^i h, g) = (g, x^j, x^i(hg)) = (g, x^{j+i}, hg)$$

и $(gx^j, x^i, h) = 0$. Отсюда следует, что $(g, x^{n+1}, h) = 0$ для любых $g, h \in G(B)$. Тогда по лемме 4 $(x^{n+1}, g, h) = (g, h, x^{n+1}) = 0$ для любых $g, h \in G(B)$.

Таким образом, $(x^n, g, h) = (g, x^n, h) = (g, h, x^n) = 0$ для любого n и любых $x \in U_1$, $g, h \in G(B)$.

Зафиксируем $g, h \in G(B)$ и рассмотрим отображение $\phi : U \mapsto B$, заданное правилом $\phi(u) = (u, g, h)$. Покажем, что для любого n справедливо $\phi(U_n) = 0$. По условию леммы $\phi(U_1) = 0$. Пусть $\phi(U_{n-1}) = 0$. Тогда по лемме 1 $\xi(x_1, \dots, x_n) = \phi(x_1(x_2(\dots(x_{n-1}x_n)\dots)))$ — полилинейная симметрическая функция. Поскольку $\xi(x, \dots, x) = 0$ для $x \in M$, то $\xi(x_1, \dots, x_n) = 0$ для $x_1, \dots, x_n \in M$. Следовательно, $\phi(U_n) = 0$. Поэтому $(U, g, h) = 0$. Аналогично получаем, что $(g, U, h) = (g, h, U) = 0$.

Следующее предложение фактически доказано в [2, 13].

Предложение 9. *Пусть $(B, \Delta, \epsilon, u, \backslash, /)$ — унитальная коассоциативная кокоммутативная пунктированная H-биалгебра и $g, h \in G(B)$. Тогда*

(i) *B — прямая сумма коалгебр B^g, где B^g — неприводимая компонента, содержащая групповой элемент g;*

(ii) *$B^g B^h \subseteq B^{gh}$, $B^g \backslash B^h \subseteq B^{g\backslash h}$, $B^g / B^h \subseteq B^{g/h}$ и $(B^1, \Delta, \epsilon, u, \backslash, /)$ — унитальная кокоммутативная коассоциативная неприводимая H-биалгебра;*

(iii) *имеет место равенство $B^g = gB^1 = B^1 g$;*

(iv) *$P(B) = P(B^1)$.*

Доказательство. Ясно, что каждая неприводимая компонента коалгебры B содержит групповой элемент и поэтому совпадает с некоторой неприводимой компонентой B^g. Так как B — коассоциативная кокоммутативная коалгебра, по теореме 1 B — прямая сумма коалгебр B^g.

В силу следствия 9 из [3] $(G(B), u, \backslash, /)$ является лупой относительно умножения в алгебре B. В этом случае $g\backslash g = g\backslash(g1) = 1$ для любого $g \in G$. Аналогично $g/g = 1$ для любого $g \in G(B)$.

Покажем, что $B^g \backslash B^h \subseteq B^{g\backslash h}$. Коалгебра $B^g \otimes B^h$ — неприводимая с единственной простой подкоалгеброй $\Phi(g \otimes h)$. Поскольку отображение

$$\backslash : B^g \otimes B^h \mapsto B$$

является гомоморфизмом коалгебр [3], то $B^g \backslash B^h$ — пунктированная неприводимая подкоалгебра [2, с. 169], содержащая групповой элемент $g\backslash h$. Поэтому $B^g \backslash B^h \subseteq B^{g\backslash h}$.

Аналогично получаем, что $B^g B^h \subseteq B^{gh}$, $B^g / B^h \subseteq B^{g/h}$.

Так как $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, то $1\backslash 1 = 1(1\backslash 1) = \epsilon(1)1 = 1$ и $1/1 = 1(1/1) = 1$. Поэтому $(B^1, \Delta, \epsilon, u, \backslash, /)$ — H-биалгебра.

По (ii) имеем $gB^1 \subseteq B^g$. Поэтому

$$B^1 \subseteq g\backslash(gB^1) \subseteq g\backslash B^g \subseteq B^{g\backslash g} \subseteq B^1.$$

Следовательно, $B^1 = g\backslash B^g$. Тогда $gB^1 = g(g\backslash B^g) = B^g$. Аналогично $B^g = B^1 g$.

Докажем (iv). Ясно, что $P(B^1) \subseteq P(B)$. Пусть $b \in P(B)$. Тогда $b = \sum\limits_{g\in G(B)} b^g$, где $b^g \in B^g$. Предположим, что $b^h \neq 0$ для некоторого $h \neq 1$. Зафиксируем этот элемент h. Пусть f — функционал такой, что $f(b^h) = 1$ и $f(b^g) = 0$ для $g \neq h$. Тогда

$$\sum_g (b^g \otimes 1 + 1 \otimes b^g) = b \otimes 1 + 1 \otimes b = \Delta(b) = \sum_g \Delta(b^g) = \sum_g \sum b^g_{(1)} \otimes b^g_{(2)}.$$

Отсюда получаем, что

$$1 = (f \otimes 1)\Big(\sum_g (b^g \otimes 1 + 1 \otimes b^g)\Big) = \sum f\big(b^h_{(1)}\big) b^h_{(2)}.$$

Поэтому $1 \in B^h$, что противоречит п. (i). Следовательно, $b^h = 0$ для всех $h \neq 1$ и $b = b^1 \in B^1$.

Таким образом, $P(B) = P(B^1)$.

Доказательство теоремы 6. Пусть B^1 — неприводимая компонента, содержащая 1. По предложению 9 H-биалгебра $(B^1, \Delta, \epsilon, u, \backslash, /)$ — пунктированная неприводимая коалгебра и $P(B^1) = P(B)$. Поскольку B — биалгебра Муфанг, $(P(B), [\,,])$ — алгебра Мальцева. Пусть $U(P(B))$ — ее универсальная обертывающая. Тогда в силу теоремы 5 H-биалгебра $(B^1, \Delta, \epsilon, u, \backslash, /)$ изоморфна H-биалгебре $U(P(B))$. Поэтому можно считать, что $B^1 = U(P(B))$ и $P(B) \subseteq U(P(B))$. По предложению 9 имеем $gU(P(B))g^{-1} \subseteq U(P(B))$.

Покажем, что линейное отображение $m : B^1 \otimes \Phi(G(B)) \mapsto B$, заданное правилом $m(a \otimes g) = ag$, является изоморфизмом алгебр. Из предложения 9 следует, что m — линейный изоморфизм.

Пусть $a, b \in B^1$, $g, h \in G(B)$. Так как B — биалгебра Муфанг, то

$$(a, g, bh)g = [(ag)(bh)]g - [a(g \cdot bh)]g = -(a, g \cdot bh, g).$$

По условию теоремы, леммам 3, 5 и тождеству (3) получаем, что

$$(a, g, bh)g = -(a, gbg^{-1} \cdot gh, g) = 0.$$

Поэтому $(a, g, bh) = 0$. Тогда

$$(ag)(bh) = a(g(bh)) = a(gbg^{-1}gh) = (a \cdot gbg^{-1})(gh).$$

Следовательно, отображение m является изоморфизмом алгебр.

Теперь покажем, что m — изоморфизм H-биалгебр. Определим отображение $\backslash_1 : B^1 \otimes B^1 \mapsto B^1$, полагая $a\backslash_1 b = g(g^{-1}ag\backslash g^{-1}bg)g^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} &\sum a_{(1)}(a_{(2)}\backslash_1 b) = \sum a_{(1)}(g(g^{-1}a_{(2)}g\backslash g^{-1}bg)g^{-1}) \\ &= g\sum (g^{-1}a_{(1)}g)(g^{-1}a_{(2)}g\backslash g^{-1}bg)g^{-1} = g\sum (g^{-1}ag)_{(1)}((g^{-1}ag)_{(2)}\backslash g^{-1}bg)g^{-1} \\ &\qquad = g\epsilon(g^{-1}ag)(g^{-1}bg)g^{-1} = \epsilon(a)b. \end{aligned}$$

Аналогично $\sum a_{(1)}\backslash_1(a_{(2)}b) = \epsilon(a)b$. В силу предложения 4 получаем, что $a\backslash b = a\backslash_1 b$. Поэтому $a\backslash b = g(g^{-1}ag\backslash g^{-1}bg)g^{-1}$.

Зафиксируем элементы $g, h \in G(B)$. По предложению 9 $(ag)\backslash(bh) = c(g\backslash h)$, где $c \in B^1$. Определим отображение $\backslash_1 : B^1 \otimes B^1 \mapsto B^1$ следующим правилом: $a\backslash_1 b = gcg^{-1}$. Поскольку

$$\sum (a_{(1)}g)((a_{(2)}g)\backslash(bh)) = \sum (ag)_{(1)}((ag)_{(2)}\backslash(bh)) = \epsilon(ag)bh = \epsilon(a)bh,$$

по определению отображения $\backslash_1$ и леммам 3, 5

$$\begin{aligned}\epsilon(a)bh &= \sum(a_{(1)}g)((g^{-1}(a_{(2)}\backslash_1 b)g)(g\backslash h)) = \sum((a_{(1)}g)(g^{-1}(a_{(2)}\backslash_1 b)g))(g\backslash h)\\ &= \sum(a_{(1)}(a_{(2)}\backslash_1 b)g)(g\backslash h) = \sum(a_{(1)}(a_{(2)}\backslash_1 b))(g(g\backslash h) = \sum(a_{(1)}(a_{(2)}\backslash_1 b))h.\end{aligned}$$

Следовательно, $\sum a_{(1)}(a_{(2)}\backslash_1 b) = \epsilon(a)b$. Аналогично $\sum a_{(1)}\backslash_1(a_{(2)}b) = \epsilon(a)b$. В силу предложения 4 получаем, что $a\backslash_1 b = a\backslash b$. Отсюда

$$\begin{aligned}(ag)\backslash(bh) = c(g\backslash h) &= (g^{-1}(a\backslash_1 b)g)(g\backslash h)\\ &= (g^{-1}(a\backslash b)g)(g\backslash h) = ((g^{-1}ag)\backslash(g^{-1}bg))(g\backslash h).\end{aligned}$$

Аналогично $(ag)/(bh) = (a/(gh^{-1})b(gh^{-1})^{-1})(g/h)$.

Таким образом, m — изоморфизм H-биалгебр.

Докажем последнее утверждение теоремы. Для $x \in P(B)$ и $g \in G(B)$ положим $x^g = gxg^{-1}$. Поскольку $(a, g, bh) = 0$ для $a, b \in B^1$ и $g, h \in G(B)$, то $(ab)^g = a^g b^g$.

Пусть $x, y, z \in P(B)$ и $g \in G(B)$. По тождествам (2) имеем

$$(xg)(y(gz)) + g(y((xg)z)) = (((xg)y)g)z + ((gy)(xg))z.$$

Ввиду определения умножения в алгебре B получаем

$$x(yz^g)^g + (y(xz^g))^g = (xy^g)z^{g^2} + (y^g z^g)z^{g^2}.$$

Отсюда следует, что $(x, y^g, z^{g^2}) = -(y^g, x^g, z^{g^2}) = (x^g, y^g, z^{g^2})$. Поэтому $(x^g - x, y, z) = 0$ для любых $x, y, z \in P(B)$ и $g \in G(B)$. Так как $J(x^g - x, y, z) = 6(x^g - x, y, z)$, то $x^g - x \in Z_{\mathrm{Lie}}(P(B))$.

Следствие 4. *Пусть $(B, \cdot, \Delta, \epsilon, u, \backslash, /)$ — унитальная коассоциативная кокоммутативная пунктированная H-биалгебра Муфанг над полем характеристики нуль. Предположим, что примитивные элементы биалгебры B коммутируют с групповыми элементами. Тогда отображение $m : U(P(B)) \otimes \Phi(G(B)) \mapsto B$, определенное правилом $m(a \otimes g) = ag$, является изоморфизмом H-биалгебр.*

Доказательство. Пусть $x, y \in P(B)$ и $g, h \in G(B)$. Тогда по условию следствия в силу (4) и (5)

$$3(g, h, x) = [gh, x] + g[h, x] + [g, x]h = 0,$$

$$6(x, y, g) = [[x, y], g] - [[x, g], y] - [x, [y, g]] = 0.$$

По теореме 6 $U(P(B))$ — подалгебра в B. Поскольку $gag^{-1} = a$ для любого $a \in U(P(B))$, из теоремы 6 следует искомый результат.

Следствие 5. *Пусть $(B, \cdot, \Delta, \epsilon, u, \backslash, /)$ — унитальная коассоциативная кокоммутативная пунктированная слабо ассоциативная H-биалгебра Муфанг над полем характеристики нуль. Предположим, что $(P(B), [\,,])$ — простая нелиева алгебра Мальцева. Тогда примитивные элементы биалгебры B коммутируют с групповыми элементами.*

4. Процесс удвоения алгебр Хопфа

В этом пункте опишем процесс удвоения алгебр Хопфа, который является обобщением процесса удвоения луп Муфанг, введенного в [15].

Пусть $(H_1, \Delta_1, S_1, \epsilon_1)$ и $(H_2, \Delta_2, S_2, \epsilon_2)$ — кокоммутативные алгебры Хопфа. Зафиксируем групповой центральный элемент $\alpha \in H_2$. Пусть $H = H_1 \otimes H_2$. Рассмотрим пространство $B = H \oplus Hg$. Будем считать, что $g = (1_{H_1} \otimes 1_{H_2})g$.

Пусть $a, c \in H_1$, $b, d \in H_2$. Определим на B умножение, полагая

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd, \quad g(a \otimes b) = (S_1(a) \otimes b)g, \quad (c \otimes d)((a \otimes b)g) = (ac \otimes db)g,$$

$$((a \otimes b)g)(c \otimes d) = (aS_1(c) \otimes bd)g, \quad ((a \otimes b)g)((c \otimes d)g) = S_1(c)a \otimes \alpha bd.$$

Зададим на B коумножение Δ, полагая

$$\Delta(a \otimes b) = \sum (a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)}),$$

$$\Delta((a \otimes b)g) = \sum (a_{(1)} \otimes b_{(1)})g \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)})g,$$

$$\epsilon(a \otimes b) = \epsilon((a \otimes b)g) = \epsilon_1(a)\epsilon_2(b).$$

Тогда (B, Δ, ϵ) — унитальная коассоциативная кокоммутативная биалгебра с коединицей ϵ, при этом g — групповой элемент биалгебры B.

Определим левое и правое деления на биалгебре B. Сначала зададим отображение

$$S : B \mapsto B$$

следующей формулой:

$$S(a \otimes b + (x \otimes y)g) = S_1(a) \otimes S_2(b) + (x \otimes \alpha^{-1} S_2(y))g.$$

Теперь для элементов $a, b \in B$ положим $a \backslash b = S(a)b$ и $a/b = aS(b)$.

Предложение 10. *Биалгебра $(B, \Delta, \backslash, /, \epsilon)$ — H-биалгебра Муфанг.*

Доказательство предложения проводится прямой проверкой свойств H-биалгебры и тождеств (2).

Полученную таким образом H-биалгебру $(B, \Delta, \backslash, /, \epsilon)$ обозначим через $C(H_1, H_2, \alpha)$. Основным результатом данного пункта является

Теорема 7. *Пусть $(B, \cdot, \Delta, \epsilon, u, \backslash, /)$ — унитальная коассоциативная кокоммутативная пунктированная H-биалгебра Муфанг над полем характеристики нуль. Предположим, что групповой элемент g биалгебры B антикоммутирует с примитивными элементами. Тогда универсальная обертывающая $U(P(B))$ алгебры $(P(B), [\,,])$ является ассоциативной алгеброй и H-биалгебра B содержит H-подбиалгебру, изоморфную H-биалгебре $C(U(P(B)), \Phi(g^2), g^2)$, где $\Phi(g^2)$ — групповая алгебра, построенная по циклической группе, порожденной элементом g^2.*

Доказательство. Поскольку B — биалгебра Муфанг, для любого $a \in B$ выполняются равенства $(a, g^k, g^n) = (g^k, a, g^n) = (g^k, g^n, a) = 0$. Поэтому элементы вида g^{2n} коммутируют с примитивными элементами биалгебры B. Рассмотрим в B H-подбиалгебру D, порожденную неприводимой компонентой B^1 и элементом g^2. По следствию 4 H-биалгебра D изоморфна H-биалгебре $U(P(B))\sharp\Phi(g^2)$. В силу [3] в H-биалгебре B справедливы равенства $a\backslash b = S(a)b$, $a/b = aS(b)$, $S(ab) = S(b)S(a)$, где $S(a) = a\backslash 1$.

Для $x \in U(P(B))$ и для $g \in G(B)$ имеет место $S(x) = -x$ и $S(g) = g^{-1}$. Поэтому $S(S(a)) = a$ для любого $a \in B$.

Пусть $U = U(P(B))$. Предположим, что U — ассоциативная алгебра и для любых $a, b \in U$ в B справедливы равенства

$$ag = gS(a), \quad (ag)b = (aS(b))g, \quad a(bg) = (ab)g. \tag{6}$$

Поскольку B — биалгебра Муфанг, для любых $a, b \in U$ и любого $n \geq 1$ по (6) и следствию 4 получаем, что

$$\begin{aligned}(ag^{2n+1})(bg^{2k}) &= (gS(a)g^{2(n-1)+1}g)(bg^{2k}) = g((S(a)g^{2(n-1)+1})(g(bg^{2k})))\\ &= g((g(ag^{2(n-1)}))((S(b)g^{2k})g)) = g(g((ag^{2(n-1)})(S(b)g^{2k}))g)\\ &= g^2((aS(b))g^{2(n-1)+2k})g = (aS(b))g^{2(n+k)+1}.\end{aligned}$$

Если $n = 0$ и $k \geq 1$, то

$$(ag)(bg^{2k}) = (ag)(g(S(b)g^{2(k-1)})g) = (((ag^2)(S(b)g^{2(k-1)})))g = (aS(b))g^{2k+1}.$$

Аналогично

$$(bg^{2k})(ag^{2n+1}) = (ab)g^{2(n+k)+1} \ \text{ и } \ (ag^{2n+1})(bg^{2k+1}) = (S(b)a)g^{2(n+k)+2}.$$

Поэтому пространство $D + Dg$ является H-подбиалгеброй в B. Более того, H-биалгебра $D + Dg$ изоморфна $C(U(P(B)), \Phi(g^2), g^2)$.

Теперь докажем, что при выполнении условий теоремы 7 алгебра U ассоциативна и в алгебре B справедливы равенства (6).

Лемма 6. *Пусть $x \in P(B)$ и $ug = gS(u)$ для любого элемента $u \in U_n$. Тогда в алгебре B для любого элемента $u \in U_n$ справедливы равенства*

$$2[S(u), x]g = (S(u), x, g) - (g, u, x), \quad [ux, g] = ((u + S(u))x)g + (g, u, x).$$

Доказательство. Пусть $u \in U_n$. Тогда положим $t = u - S(u)$. По предложению 8 $[u, x] \in U_n$. По условию леммы и в силу (4) и (5) имеем

$$\begin{aligned}3(u, x, g) + 3(g, u, x) &= [[u, x], g] - [[u, g], x] - [u, [x, g]]\\ &= ([u, x] - S([u, x]))g - [tg, x] - 2[u, xg]\\ &= -t[g, x] + 3(t, x, g) + 2x[g, u] + 2[x, u]g + 2(x, g, u) + 4(u, x, g)\\ &= 2t(xg) + 3(t, x, g) - 2x(tg) + 2[x, u]g + 2(x, g, u) + 4(u, x, g)\\ &= -2(t, x, g) + 2(tx)g + 3(t, x, g) + 2(x, t, g) - 2(xt)g + 2[x, u]g + 2(x, g, u) + 4(u, x, g)\\ &= 3(u, x, g) + (S(u), x, g) - 2[S(u), x]g + 2(x, g, u).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$2[S(u), x]g = (S(u), x, g) - (g, u, x).$$

По условию леммы и (4) получаем

$$\begin{aligned}[ux, g] &= u[x, g] + [u, g]x + 2(u, x, g) + (g, u, x) = 2u(xg) + (tg)x + 2(u, x, g) + (g, u, x)\\ &= 2(ux)g - 2(u, x, g) + (t, g, x) - (tx)g + (t, x, g) + 2(u, x, g) + (g, u, x)\\ &= ((u + S(u))x)g + (g, u, x).\end{aligned}$$

Лемма 7. *В алгебре B для любого элемента $u \in U$ справедливо равенство*

$$ug = gS(u).$$

Доказательство. Данное равенство достаточно доказать для любого числа n и любого $u \in U_n$.

По условию теоремы 7 для $n = 1$ все доказано.

Пусть $x \in P(B)$. Предположим, что $ug = gS(u)$ для всех $u \in U_n$. Тогда из леммы 6 следует, что $2[S(u), x]g = (S(u), x, g) - [ux, g] + ((u + S(u))x)g$. Отсюда $g(ux) = -2(xS(u))g + S(u)(xg)$.

Так как B — H-биалгебра Муфанг и $S(U_n) \subseteq U_n$, по сделанному предположению и следствию 4 получаем

$$\begin{aligned} g^2(ux) &= -2g(xS(u))g - g(S(u)(gx)) \\ &= -2g(xS(u))g - (gS(u)g)x = -2g(xS(u))g - g^2(ux). \end{aligned}$$

Следовательно, $g^2(ux) = -g(xS(u))g$. Поэтому $g(ux) = -(xS(u))g$. Тогда

$$(xu)g = -g(S(u)x) = g(S(xu)).$$

Отсюда получаем, что $ug = gS(u)$ для любого $u \in U_{n+1}$.

Таким образом, $ug = gS(u)$ для любого $u \in U$.

Лемма 8. *Алгебра U ассоциативна и для любых $u, v \in U$ в алгебре B справедливы равенства*

$$u(gv) = g(S(u)v), \quad (gv)u = g(uv).$$

Доказательство. Пусть $x \in P(B)$, $u \in U$. Тогда из второго равенства леммы 6 получаем $(gu)x = -(S(u)x)g$, а в силу леммы 7 $(gu)x = -gS(S(u)x) = g(xu)$. Поэтому $(gx)u = (g, x, u) + g(xu) = -(g, u, x) + g(xu) = g(ux)$. Пусть $x, y, z \in P(B)$. Тогда

$$\begin{aligned} (gx)(yz) &= -(gx, y, z) + ((gx)y)z = -(z, gx, y) + g(z(yx)) \\ &= -(z(gx))y + z(g(yx)) + g(z(yx)) = -((zg)x)y - (g, z, x)y + (zg)(yx) \\ &\quad + (g, z, yx) + g(z(yx)) = g(y(xz)) - g(y(xz)) + g(y(zx)) - g((yx)z) \\ &\qquad + g((yx)z) - g(z(yx)) + g(z(yx)) = g(y(zx)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$g(y, z, x) = g((yz)x) - g(y(zx)) = (gx)(yz) - g(y(zx)) = 0.$$

Поэтому $(y, z, x) = g\backslash(g(y, x, z)) = 0$ и в силу (5) $(P(B), [\,,\,])$ — алгебра Ли. По лемме 3 U — ассоциативная алгебра.

Покажем, что $x(gu) = -g(xu)$. Действительно,

$$x(gu) = -(x, g, u) + (xg)u = (g, x, u) - (gx)u = -g(xu).$$

В силу леммы 7

$$\begin{aligned} u(gx) &= -(u, g, x) + (ug)x = -(x, u, g) + g(xS(u)) \\ &= g(S(u)x) - g(xS(u)) + g(xS(u)) = g(S(u)x). \end{aligned}$$

Предположим, что для любых $v \in U$ и $u \in U_n$ имеет место $(gv)u = g(uv)$. Пусть $x \in P(B)$, $v \in U$ и $u \in U_n$. Тогда

$$(gv)(xu) = -(gv, x, u) + ((gv)x)u = (x, gv, u) + g(uxv)$$
$$= -g(uxv) + g(xuv) + g(uxv) = g((xu)v).$$

Поэтому $(gv)u = g(uv)$ для любого $u \in U_{n+1}$.

Следовательно, $(gv)u = g(uv)$ для любых $u, v \in U$. Аналогично $u(gv) = g(S(u)v)$.

Таким образом, алгебра U ассоциативна, и в B имеют место (6).

Автор благодарен профессору И. П. Шестакову за полезные обсуждения данной проблематики. Автор также благодарен рецензенту, замечания которого способствовали улучшению данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Milnor J. W., Moore J. C.* On the structure of Hopf algebras // Ann. Math. 1965. V. 81, N 2. P. 211–264.
2. *Sweedler M. E.* Hopf algebras. New York: W. A. Benjamin Inc., 1969.
3. *Pérez-Izquierdo J. M.* Algebras, hyperalgebras, nonassociative bialgebras and loops // Adv. Math. 2007. V. 208, N 2. P. 834–876.
4. *Мальцев А. И.* Аналитические лупы // Мат. сб. 1955. Т. 36, № 3. С. 569–575.
5. *Кузьмин Е. Н., Шестаков И. П.* Неассоциативные структуры // Фундаментальные исследования. М.: ВИНИТИ, 1990. Т. 57. С. 179–266. (Итоги науки и техники).
6. *Sagle A. A.* Simple Malcev algebras over fields of characteristic zero // Pacific J. Math. 1962. V. 12. P. 1057–1078.
7. *Кузьмин Е. Н.* Алгебры Мальцева и их представления // Алгебра и логика. 1968. Т. 7, № 4. С. 233–244.
8. *Кузьмин Е. Н.* Структура и представления конечномерных алгебр Мальцева // Тр. Ин-та математики. Т. 16. Исследования по теории колец и алгебр. Новосибирск: Наука, 1989. С. 75–101.
9. *Shestakov I. P.* Speciality problem for Malcev algebras and Poisson Malcev algebras. Non-associative algebra and its applications // Proc. IV Intern. Conf. on non-associative algebra and its applications, São Paulo, July, 1998. NY: Marcel Dekker, 2000. P. 365–371.
10. *Morandi P. J., Pérez-Izquierdo J. M., Pumplin S.* On the tensor product of composition algebras // J. Algebra. 2001. V. 243, N 1. P. 41–68.
11. *Pérez-Izquierdo J. M., Shestakov I. P.* An envelope for Malcev algebras // J. Algebra. 2004. V. 272, N 1. P. 379–393.
12. *Желябин В. Н., Шестаков И. П.* Теоремы Шевалле и Константа для алгебр Мальцева // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 560–584.
13. *Montgomery S.* Hopf algebras and their actions // CBMS Regional conf. series in mathematics, 82. Published for the conference board of the mathematical sciences, Washington DC; Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. P. 533–548.
14. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* Free Akivis algebras, primitive elements and hyperalgebras // J. Algebra. 2002. V. 250, N 2. P. 533–548.
15. *Chein O.* Moufang loops of small order. I // Trans. Am. Math. Soc. 1974. V. 188. P. 31–51.

Статья поступила 13 октября 2008 г.

Желябин Виктор Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vicnic@math.nsc.ru