Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 510.53

$*$–ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПОЛЯ

Ю. Л. Ершов

Аннотация. Предложена удобная модификация понятия экстремального поля, введенного ранее автором и оказавшегося вырожденным.

Ключевые слова: экстремальное поле, алгебраическое поле, нормированное поле.

В статье предложена полезная модификация понятия экстремального поля, введенного в [1] и оказавшегося вырожденным (см. предложение 8 ниже).

Все нужные для дальнейшего определения и свойства нормированных полей содержатся в [2].

Определение. Нормированное поле $\mathbb{F} = \langle F, R \rangle$ называется $*$-*экстремальным*, если выполнено следующее: для любого многочлена $f(\bar{x}) \in F[x_0, \dots, x_n]$ множество

$$V_f \rightleftharpoons \{vf(\bar{a}) \mid \bar{a} = (a_0, \dots, a_n), a_i \in R\} \subseteq \Gamma_R \cup \{\omega\}$$

содержит наибольший элемент.

Следующее предложение дает важные примеры $*$-экстремальных нормированных полей.

Предложение 1. *Всякое алгебраически полное дискретно нормированное поле $\mathbb{F}$ является $*$-экстремальным.*

Действительно, доказательство предложения 2 из [1] устанавливает это предложение. □

Следующие два предложения показывают, что в $*$-экстремальных полях наибольшие элементы существуют и в других естественно определенных множествах значений норм многочлена.

Предложение 2. *Пусть $\mathbb{F}$ $*$-экстремально, $f(x_0, \dots, x_n) \in F[\bar{x}]$; $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in \Gamma_R$; тогда множество $V_{f,\bar{\gamma}} \rightleftharpoons \{vf(\bar{a}) \mid a_0, \dots, a_n \in F,\ v(a_0) \geq \gamma_0, \dots, v(a_n) \geq \gamma_n\}$ имеет наибольший элемент.*

Выберем элементы $b_0, \dots, b_n \in F$ так, что $v(b_i) = \gamma_i$, $i \leq n$. Рассмотрим многочлен $g(x_0, \dots, x_n) \rightleftharpoons f(x_0 b_0, \dots, x_n b_n) \in F[\bar{x}]$. Пусть $\gamma_* \in \Gamma_R \cup \{\omega\}$ — наибольший элемент множества $V_g (= \{vg(\bar{a}) \mid a_0, \dots, a_n \in R\})$. Проверим, что γ_* является наибольшим элементом множества $V_{f,\bar{\gamma}}$. Пусть $a_0^*, \dots, a_n^* \in R$ таковы, что $\gamma_* = v(g(\bar{a}^*)) = v(f(a_0^* b_0, \dots, a_n^* b_n))$. Имеем $v(a_i^* b_i) = v(a_i^*) + v(b_i) \geq v(b_i) = \gamma_i$, $i \leq n$, следовательно, $\gamma_* \in V_{f,\bar{\gamma}}$. Обратно, пусть $a_0, \dots, a_n \in F$ таково, что $v(a_i) \geq \gamma_i$, $i \leq n$. Тогда $v\big(a_i b_i^{-1}\big) = v(a_i) - v(b_i) \geq 0$, $a_i b_i^{-1} \in R$, следовательно, $vg\big(a_0 b_0^{-1}, \dots, a_n b_n^{-1}\big) \geq \gamma^*$, но $g_0\big(a_0 b_0^{-1}, \dots a_n b_n^{-1}\big) = f\big(a_0 b_0^{-1} b_0, \dots, a_n b_n^{-1} b_n\big) = f(a_0, \dots, a_n)$, значит, $vf(\bar{a}) = vg\big(a_0 b_0^{-1}, \dots, a_n b_n^{-1}\big) \geq \gamma_*$. Итак, γ_* — наибольший элемент в $V_{f,\bar{\gamma}}$. Предложение доказано. □

Предложение 3. *Пусть $\mathbb{F}$ $*$-экстремально, $f \in F[x]$ — унитарный многочлен от одной переменной. Тогда множество $V_f^* \rightleftharpoons \{vf(a) \mid a \in F\}$ имеет наибольший элемент.*

Если $f(0) = 0$, то $vf(0) = \omega \in V_f^*$ является наибольшим элементом в V_f^*.

Пусть $f(0) \neq 0$ и $f = \prod\limits_{i<n} (x - \alpha_i)$ — разложение f на линейные множители над алгебраическим замыканием $\widetilde{F}$ поля F. Пусть $\widetilde{R}$ — кольцо нормирования поля $\widetilde{F}$, доминирующее $R(\widetilde{R} \cap F = R)$, $\Gamma_R \leq \Gamma_{\widetilde{R}}$. Пусть $\gamma_0 \in \Gamma_R$ таково, что $\gamma_0 \leq v_{\widetilde{R}}(\alpha_i)$ для $i < n$. Множество $V_{f,\gamma_0} = \{vf(a) \mid v(a) \geq \gamma_0\}$ содержит наибольший элемент γ^*. Имеем $V_{f,\gamma_0} \subseteq V_f^*$, покажем, что γ_* — наибольший элемент в V_f^*. Если $\gamma_* = \omega$, то это очевидно. Пусть $\gamma_* \in \Gamma_R$ и $\delta \in V_f^* \setminus V_{f,\gamma_0}$. Тогда $\delta = vf(a)$ для некоторого $a \in F$ такого, что $v(a) < \gamma_0$. Имеем

$$vf(a) = v\Big(\prod_{i<n} (a - \alpha_i)\Big) = \sum_{i<n} v(a - \alpha_i).$$

Так как $v(a) < \gamma_0 \leq v(\alpha_i)$, то $v(a - \alpha_i) = v(a)$, $i < n$, и

$$\gamma_* \geq vf(0) = v\prod_{i<n}(0 - \alpha_i) = \sum_{i<n} v(\alpha_i) \geq n\gamma_0 > nv(a) = \sum_{i<n} v(a - \alpha_i) = vf(a) = \delta.$$

Предложение доказано. □

Предложение 4. *Всякое $*$-экстремальное поле $\mathbb{F} = \langle F, R\rangle$ является гензелевым.*

Доказательство. По предложению 1.3.4(d) из [2] достаточно доказать, что для любых унитарного многочлена $f \in R[x]$ и элемента $a \in R$ такого, что $f(a) \in \mathfrak{m}(R)$ и $f'(a) \notin \mathfrak{m}(R)$, в кольце R найдется элемент α такой, что $f(\alpha) = 0$ и $a - \alpha \in \mathfrak{m}(R)(v(a - \alpha) > 0)$.

Итак, пусть $f \in R[x]$ — унитарный многочлен и $a \in R$ такой, что $f(a) \in \mathfrak{m}(R)$, $f'(a) \notin \mathfrak{m}(R)$. Полагаем $A \rightleftharpoons \{a' \mid a' \in R,\ v(a - a') \geq vf(a)\}$.

Лемма 1. *Пусть $a' \in A$. Тогда*
(i) $v(f(a') - f(a)) = v(a' - a)(\geq vf(a)), vf(a') \geq vf(a)$ *и* $vf'(a') = 0$;
(ii) *если* $a'' \rightleftharpoons a' - f(a')f'(a')^{-1}$, *то* $a'' \in A$ *и* $vf(a'') > vf(a')$.

Доказательство. (i). Полагаем $\varepsilon \rightleftharpoons a' - a$. Тогда $a' = a + \varepsilon$. Используя разложение Тейлора, получим равенство $f(a') = f(a) + f'(a)\varepsilon + \varepsilon^2 r$ для подходящего $r \in R$. Тогда $f(a') - f(a) = f'(a)\varepsilon + \varepsilon^2 r$, и так как $v(f'(a)\varepsilon) = vf'(a) + v(\varepsilon) = v(\varepsilon) < 2v(\varepsilon) \leq v(\varepsilon^2 r)$, имеем $v(f(a') - f(a)) = v(\varepsilon) = v(a' - a)$.

Поскольку $v(\varepsilon) \geq vf(a)$ ($a' \in A$!), из $v(f(a') - f(a)) = v(\varepsilon)$ следует, что $vf(a') \geq vf(a)$.

Опять используя разложение Тейлора, получим

$$f(a) = f(a' - \varepsilon) = f(a') - f'(a')\varepsilon + \varepsilon^2 r'$$

для некоторого $r' \in R$. Если предположить, что $vf'(a') > 0$, то из равенства $f(a) - f(a') = -f'(a')\varepsilon + \varepsilon^\Gamma r'$ выводим, что

$$v(\varepsilon) = v(f(a) - f(a')) \geq \min\{vf'(a')\varepsilon, \varepsilon^2 r'\} > v(\varepsilon).$$

Полученное противоречие доказывает, что $vf'(a') = 0$.

(ii). Имеем

$$v(a'' - a) = v((a' - a) - f(a')f'(a')^{-1}) \geq \min\{v(a' - a), v(f(a')f'(a')^{-1})\} \geq vf(a)$$

(по доказанному выше), следовательно, $a'' \in A$.

Используя разложение Тейлора, получим равенство

$$f(a'') = f(a' - f(a')f'(a')^{-1}) = f(a') - f'(a')f(a')f'(a')^{-1} + (f(a')f'(a')^{-1})^2 r''$$

для некоторого $r'' \in R$. Тогда

$$f(a'') = (f(a')f'(a')^{-1})^2 r'' \text{ и } vf(a'') = v(f(a')^2 f'(a')^{-\Gamma} r'') \geq 2vf(a') > vf(a'),$$

так как $vf'(a') = 0$.

Лемма доказана. □

Возвращаемся к доказательству предложения. Заметим, что $\{vf(a') \mid a' \in A\} = \{vf(a+\varepsilon) \mid v(\varepsilon) \geq vf(a)\} = V_{g,\gamma}$ для $g(x) \rightleftharpoons f(a+x)$, $\gamma \rightleftharpoons vf(a)$. Так как $\mathbb{F}$ $*$-экстремально, существует элемент $a' \in A$ такой, что $vf(a') \geq vf(a'')$ для любого $a'' \in A$. Если $vf(a') = \omega$, т. е. $f(a') = 0$, то это и требовалось. Если $vf(a') \neq \omega$, то, полагая $a'' \rightleftharpoons a' - f(a')f'(a')^{-1} \in A$, будем иметь по лемме 1(ii) $vf(a'') > vf(a')$. Полученное противоречие доказывает предложение. □

Предложение 5. *Пусть $\mathbb{F}$ $*$-экстремально, $\widetilde{F}$ — алгебраическое замыкание F, $g(\bar{x}) \in \widetilde{F}[x_0, \dots, x_k]$ — многочлен. Тогда множество $\{vg(\bar{a}) \mid \bar{a} \in R^{k+1}\}$ имеет наибольший элемент.*

Пусть F_0 — подполе поля $\widetilde{F}$, порожденное над F коэффициентами многочлена g; $n \rightleftharpoons [F_0 : F]$. Пусть $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}$ — все F-вложения поля F_0 в $\widetilde{F}$ (взятые с кратностью, равной степени несепарабельности поля F_0 над F). Рассмотрим многочлен $G(\bar{x}) \rightleftharpoons \prod\limits_{i<n} (\sigma_i g)(\bar{x})$ (ясно, что $G(\bar{x}) \in F[\bar{x}]$).

Заметим, что для любого набора элементов $\bar{a} \in F^{k+1}$ имеем равенства $(\sigma_i g)(\bar{a}) = \sigma_i(g(\bar{a}))$, а гензелевость $\mathbb{F}$ влечет, что $v\sigma_i(g(\bar{a})) = v(g(\bar{a}))$, следовательно, $vG(\bar{a}) = nvg(\bar{a})$.

Так как $\mathbb{F}$ $*$-экстремально, существует набор $\bar{a}_0 \in R^{k+1}$ такой, что $vG(\bar{a_0}) \geq vG(\bar{a})$ для любого набора $\bar{a} \in R^{k+1}$. Поскольку

$$nvg(\bar{a}_0) = vG(\bar{a}_0) \geq vG(\bar{a}) = nvg(\bar{a}),$$

имеем $vg(\bar{a}_0) \geq vg(\bar{a})$ для всех $\bar{a} \in R^{k+1}$. Предложение доказано. □

Следствие. *Пусть $\mathbb{F}$ $*$-экстремально, $\widetilde{F}$ — алгебраическое замыкание F, $g(\bar{x}) \in \widetilde{F}[x_0, \dots, x_k]$; $\gamma_0, \dots, \gamma_k \in \Gamma_R$. Тогда множество $\{vg(\bar{a}) \mid \bar{a} \in F^{k+1}, v_R(a_i) \geq \gamma_i, i < k\}$ имеет наибольший элемент.*

Доказывается, как предложение 2. □

Напомним, что гензелево нормированное поле $\mathbb{F}$ называется *алгебраически полным* [1], если для любого конечного расширения $\mathbb{F}_0 \geq \mathbb{F}$ степени $n \rightleftharpoons [F_0 : F]$ имеет место равенство $n = ef$, где $e \rightleftharpoons [\Gamma_{R_0} : \Gamma_R]$ — индекс ветвления, $f \rightleftharpoons [F_{R_0} : F_R]$ — относительная степень.

Предложение 6. *Всякое $*$-экстремальное поле является алгебраически полным.*

Пусть $\mathbb{F}$ $*$-экстремально, $\mathbb{F}_0 \geq \mathbb{F}$ — конечное алгебраическое расширение степени n, $f \rightleftharpoons [F_{R_0} : F_R]$, $e \rightleftharpoons [\Gamma_{R_0} : \Gamma_R]$, и предположим, что $ef < n$. Пусть $a_0, \dots, a_{f-1} \in R_0 \setminus \mathfrak{m}(R_0)$ таковы, что элементы $\bar{a}_0 \rightleftharpoons a_0 + \mathfrak{m}(R_0), \dots, \bar{a}_{f-1} \rightleftharpoons a_{f-1} + \mathfrak{m}(R_0)$ образуют базис поля F_{R_0} над F_R. Пусть $b_0, \dots, b_{e-1} \in F_0^{\times}$ таковы, что $\gamma_0 \rightleftharpoons v(b_0) + \Gamma_R, \dots, \gamma_{e-1} \rightleftharpoons v(b_{e-1}) + \Gamma_R$ — это все элементы фактор-группы Γ_{R_0}/Γ_R. Обозначим $c_{ij} = a_i b_j$.

Лемма 2. *Для любого элемента $d \in F_0^{\times}$ найдутся элементы $d_{ij} \in F$, $i < f$, $j < e$, такие, что $v_{R_0}\big(d - \sum d_{ij}c_{ij}\big) > v_{R_0}(d)$.*

Пусть $j_0 < e$ такое, что $v_{R_0}(d) = \gamma_{j_0} = v_{R_0}(b_{j_0})$. Тогда $v_{R_0}\big(db_{j_0}^{-1}\big) = v_{R_0}(d) - v_{R_0}(b_{j_0}) = 0$. Далее, найдутся элементы $e_i \in R_0$, $i < f$, такие, что $v_{R_0}\big(db_{j_0}^{-1} - \sum e_i a_i\big) > 0$. Тогда $v_{R_0}\big(d - b_{j_0}\sum e_i a_i\big) > v_{R_0}(b_{j_0}) = v_{R_0}(d)$, и если положить $d_{ij_0} \rightleftharpoons e_i$, $i < f$; $d_{ij} \rightleftharpoons 0$, $i < f$, $j_0 \neq j < e$, то выполнено заключение леммы. $\square$

Так как $ef < n$, то $F_0 \neq \sum\limits_{i<f, j<e} Fc_{ij}$. Пусть $0 \neq d \in F_0 \setminus \sum Fc_{ij}$. Рассмотрим линейную форму

$$L(\bar{y}) \rightleftharpoons \sum_{i<f,\, j<e} c_{ij}y_{ij} - d \in F_0[y_{ij}].$$

Поскольку $\mathbb{F}$ $*$-экстремально, по предложению 4 найдутся элементы e^*_{ij}, $i < f$, $j < e$, такие, что $v(L(\bar{e}^*)) \geq v(L\bar{e})$ для любых $e_{ij} \in F$, $i < k$, $j < e$. Пусть

$$d_0 \rightleftharpoons L(\bar{e}^*) = \sum_{i<f,\, j<e} e^*_{ij}c_{ij} - d;$$

Так как $d \notin \sum\limits_{i<f,\, j<e} Fc_{ij}$, то $d_0 \neq 0$. По лемме 2 найдутся элементы $d_{ij} \in F$, $i < f$, $j < e$, такие, что

$$v\Big(d_0 - \sum_{i<f,\, j<e} d_{ij}c_{ij}\Big) > v(d_0).$$

Если положить $d^*_{ij} \rightleftharpoons e^*_{ij} - d_{ij}$ и $d^*_0 \rightleftharpoons \sum d^*_{ij}c_{ij} - d$, то имеем $v(L(\bar{d}^*)) = v(d^*_0) > v(d_0) = v(L(\bar{e}^*))$, что противоречит выбору $\bar{e}^*$.

Предложение доказано. $\square$

Свойство алгебраической полноты (бездефектности) справедливо и для конечномерных тел с $*$-экстремальным центром. А именно, доказательство теоремы в [1] показывает, что справедлива

Теорема. *Пусть $\mathbb{F}\langle F, R\rangle$ — $*$-экстремальное нормированное поле. Тогда любое конечномерное тело D с центром F является бездефектным расширением F.* $\square$

Предложение 7. *Конечное расширение $*$-экстремального поля является $*$-экстремальным.*

Пусть $\mathbb{F}$ $*$-экстремально, $\mathbb{F}_0 \geq \mathbb{F}$ — конечное расширение. Так как по предложению 6 $\mathbb{F}$ алгебраически полно, существует ортогональный базис $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ F_0 над F, т. е. такой базис F_0 над F, что для любых

$$a_0, \dots, a_{n-1} \in F \quad v_{R_0}\Big(\sum a_i\alpha_i\Big) = \min_{i<n} v_{R_0}(a_i\alpha_i)$$

(в качестве такого базиса можно взять семейство $\{c_{ij} \mid i < f,\, j < e\}$ из доказательства предложения 6).

Пусть $f(x_0, \dots, x_{k-1}) \in F_0[\bar{x}]$. Рассмотрим

$$g(\bar{y}) = f\Big(\sum_{i<n} y_{0i}\alpha_i, \dots, \sum_{i<n} y_{k-1,i}\alpha_i\Big) \in F_0[\bar{y}]$$

от kn переменных y_{ji}, $j < k$, $i < n$. Пусть $\gamma_i \rightleftharpoons -v(\alpha_i)$. По следствию к предложению 5 существует набор $\bar{a} = (a_{ji}) \in F^{kn}$ такой, что $v(a_{ji}) \geq \gamma_i$, $j < k$, $i < n$, и $vg(\bar{a}) \geq vg(\bar{a}')$ для любого набора $\bar{a}' = (a'_{ji}) \in F^{kn}$ такого, что $v(a'_{ji}) \geq \gamma_i$,

$j < k$, $i < n$. Если положить $b_j \rightleftharpoons \sum\limits_{i<n} a_{ji}\alpha_i$, $j < i$, то $\bar{b} = (b_j) \in R_0^k$. Проверим, что $f(\bar{b}) \geq vf(\bar{b}')$ для любого набора $\bar{b}' = (\bar{b}'_j) \in R_0^k$. Действительно, если

$$\bar{b}' = (\bar{b}'_j) \in R_0^k \quad \text{и} \quad b'_j = \sum_{i<n} a'_{ji}\alpha_i, \quad a'_{ji} \in^F, \quad j < k, \ i < n,$$

то по свойству ортогональности имеем $v(a'_{ji}) \geq -v(\alpha_i) = \gamma_i$, $j < k$, $i < n$, но тогда $vf(\bar{b}') = vg(\bar{a}') \leq vg(\bar{a}) = vf(\bar{b})$, что и требовалось доказать. $\square$

Напомним, что в соответствии с [1] нормированное поле $\mathbb{F}$ называется *экстремальным*, если для любого многочлена $f \in F[\bar{x}]$ множество $V_f^* \rightleftharpoons \{vf(\bar{a}) \mid \bar{a} \in F\} \subset \Gamma_R \cup \{\omega\}$ содержит наибольший элемент.

Предложение 8. *Если нормированное поле $\mathbb{F} = \langle F, R\rangle$ не является алгебраически замкнутым, то оно не экстремально.*

Лемма 3. *Если $g(x_0, x_1, \dots, x_n) \in F[\bar{x}]$ — форма, не представляющая нуля в F, то многочлен $f(\bar{x}) \rightleftharpoons g(x_0x_1 - 1, x_1, \dots, x_n)$ не имеет нуля в F, а множество $V_f^* = \{vf(\bar{a}) \mid \bar{a} \in F\}$ не ограничено в Γ_R.*

Предположим, что $f(a_0a_1, \dots, a_n) = 0$ для $\bar{a} \in F$. Так как g не представляет нуля и $g(a_0a_1 - 1, a_1, \dots, a_n) = 0$, то $a_0a_1 - 1 = 0$, $a_1 = 0$; противоречие. Пусть γ_* — минимум норм коэффициентов формы g, k — степень формы g, и если $a \in F^\times$, $v(a) = \gamma$, то $vf(a^{-1}, a, \dots, a) \geq \gamma_* + k\gamma$. Отсюда следует и последнее заключение леммы. $\square$

Если F не является алгебраически замкнутым, то существует собственное конечное алгебраическое расширение $F_0 > F$. Тогда любая нормическая форма по любому базису F_0 над F не представляет нуля и F. (Если

$$[F_0 : F] = n, \quad F_0 = \sum_{i<n} F_{\alpha_i}, \quad \sigma_0, \dots, \sigma_n : F_0 \to \widetilde{F},$$

все F — вложения F_0 в $\widetilde{F}$, то $\prod\limits_i \sigma_i\big(\sum\limits_j x_j\alpha_j\big)$ — нормическая форма базиса $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.) Отсюда и из леммы сразу следует заключение предложения. $\square$

Замечание. Если $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, то для любого многочлена $f \in F[\bar{x}] \setminus F$ существуют $\bar{a} \in F$ такие, что $f(\bar{a}) = 0$, т. е. $\omega \in V_f^*$ и ω наибольший в V_f^* (если $f \in F$, то $V_f^* = \{vf\}$). Итак, алгебраически замкнутое поле является экстремальным.

Предложение 8 показывает, что предложение 2 из работы [1] неверно. Впервые на это автору указал С. Старченко, идея контрпримера которого и была использована в доказательстве леммы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Экстремальные нормированные поля // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 5. С. 582–588.
2. *Ершов Ю. Л.* Кратно нормированные поля. Новосибирск: Научная книга, 2000.

Статья поступила 25 февраля 2009 г.

Ершов Юрий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
ershov@math.nsc.ru