Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 517.547+517.55+517.98

ВЕСОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ НА ПРОСТРАНСТВАХ РОСТА

Е. С. Дубцов

Аннотация. Пусть $\mathcal{H}ol(B_n)$ обозначает пространство всех голоморфных функций в единичном шаре B_n из $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Для $g \in \mathcal{H}ol(B_m)$ и голоморфного отображения $\varphi : B_m \to B_n$ положим $C_\varphi^g f = g \cdot (f \circ \varphi)$ при $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$. Дана характеристика тех g и φ, для которых C_φ^g является ограниченным (или компактным) оператором из пространства роста $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ или $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$, в весовое пространство Бергмана $A^p_\alpha(B_m)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$. Получены некоторые обобщения этого результата и исследованы родственные интегральные операторы.

Ключевые слова: пространство Бергмана, пространство роста, оператор композиции, голоморфное пространство Соболева.

§ 1. Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{H}ol(B_n)$ — пространство всех голоморфных функций в единичном шаре $B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$. В настоящей работе рассматриваются несколько классов линейных операторов $T : X \to Y$, где $X \subset \mathcal{H}ol(B_n)$ и $Y \subset \mathcal{H}ol(B_m)$ при $m, n \in \mathbb{N}$.

1.1. Пространство X. Предполагается, что $X = \mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$, или $X = \mathscr{A}^{-\log}(B_n)$. При $\beta > 0$ пространство роста $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ состоит из тех функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, для которых

$$\|f\|_{-\beta} = \sup_{z \in B_n} |f(z)|(1 - |z|)^\beta < \infty.$$

По определению пространство логарифмического роста $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$ таких, что

$$\|f\|_{-\log} = \sup_{z \in B_n} \frac{|f(z)|}{\log(e/(1 - |z|))} < \infty.$$

Пространства $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ и $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ с нормами $\|\cdot\|_{-\beta}$ и $\|\cdot\|_{-\log}$ банаховы. Напомним, что классическое пространство Блоха $\mathscr{B}(B_n)$ состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$ таких, что

$$\|f\|_{\mathscr{B}(B_n)} = |f(0)| + \sup_{z \in B_n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \right| (1 - |z|) < \infty.$$

Отметим, что для всех $\beta > 0$ имеем $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n) \supset \mathscr{A}^{-\log}(B_n) \supset \mathscr{B}(B_n)$. На самом деле интерес к пространству $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ во многом объясняется его тесными

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00358–а) и Фонда содействия отечественной науке.

связями с пространством $\mathscr{B}(B_n)$. Разнообразные свойства пространства Блоха $\mathscr{B}(B_n)$ собраны, например, в [1, гл. 3].

1.2. Пространство Y. Предполагается, что Y является весовым пространством Бергмана или его обобщением. При $0 < p < \infty$ и $\alpha > -1$ весовое пространство Бергмана $A^p_\alpha(B_m)$ состоит из тех функций $f \in \mathcal{H}ol(B_m)$, для которых

$$\|f\|^p_{A^p_\alpha} = \int\limits_{B_m} |f(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_m(z) < \infty,$$

где ν_m обозначает нормированную меру Лебега на единичном шаре B_m. Если $1 \le p < \infty$, то $A^p_\alpha(B_m)$ — банахово пространством; если $0 < p < 1$, то пространство $A^p_\alpha(B_m)$ полное относительно метрики $d(f,g) = \|f-g\|^p_{A^p_\alpha}$.

1.3. Весовые операторы композиции. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $g \in \mathcal{H}ol(B_m)$, и пусть $\varphi : B_m \to B_n$ является голоморфным отображением. Оператор $C^g_\varphi : \mathcal{H}ol(B_n) \to \mathcal{H}ol(B_m)$ задается формулой

$$(C^g_\varphi f)(z) = g(z) f(\varphi(z)), \quad z \in B_m.$$

Задача заключается в описании тех g и φ, для которых оператор C^g_φ отображает X в Y. Интенсивно исследовались два частных случая данной задачи.

Случай $m = n$. Оператор $C^g_\varphi : \mathcal{H}ol(B_n) \to \mathcal{H}ol(B_n)$ называется *весовым оператором композиции.* Оператор C^g_φ обозначается символом C_φ, если $g \equiv 1$, и называется *оператором композиции.* Разнообразные свойства операторов композиции в шаре собраны в [2]. Случай $m = n = 1$ детально исследуется в [3]. Оператор C^g_φ обозначается символом M_g, если $\varphi(z) \equiv z$, и называется *оператором умножения.*

Случай $n = 1$. Как и выше, оператор C^g_φ обозначается символом C_φ, если $g \equiv 1$. Следующий эвристический принцип мотивирует исследования при $n = 1$ и $m \ge 2$. Пусть оператор C_φ отображает достаточно широкое пространство $X \subset \mathcal{H}ol(B_1)$ в «хорошее» пространство $Y \subset \mathcal{H}ol(B_m)$. Предположим, что граничное поведение функции $f \in X$ весьма нерегулярно. Так как $C_\varphi f$ наследует свойства функции f, то граничное поведение функции $C_\varphi f$ является в определенном смысле нерегулярным, хотя $C_\varphi f$ принадлежит хорошему пространству Y. Ахерн [4] реализовал изложенную выше схему для $X = \mathscr{B}(B_1)$ и $Y = \mathrm{BMOA}(B_m)$ (см. также [5], где приведены дальнейшие результаты и ссылки). Легко объяснить выбор пространства Блоха $\mathscr{B}(B_1)$ в качестве X. Действительно, хорошо известно, что пространство $\mathscr{B}(B_1)$ содержит функции, которые не имеют конечных радиальных пределов.

1.4. Операторы интегрирования. Для $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ положим

$$(J_g f)(z) = \int\limits_0^1 f(tz) \frac{\mathscr{R}g(tz)}{t} \, dt, \quad f \in \mathcal{H}ol(B_n), \ z \in B_n,$$

где

$$\mathscr{R}g(z) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial g}{\partial z_j}(z), \quad z \in B_n,$$

является радиальной производной функции g. Отметим, что

$$\mathscr{R}g(z) = \sum_{k=0}^\infty k g_k(z), \quad z \in B_n,$$

если $g(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k(z)$, $z\in B_n$, является однородным разложением функции $g\in\mathcal{H}ol(B_n)$.

Имеем $J_g:\mathcal{H}ol(B_n)\to\mathcal{H}ol(B_n)$. Как и выше, для данных $X,Y\subset\mathcal{H}ol(B_n)$ задача заключается в нахождении всех функций $g\in\mathcal{H}ol(B_n)$, для которых оператор J_g отображает X в Y. Если $n=1$, то

$$(J_g f)(z)=\int\limits_0^z f(w)g'(w)\,dw,\quad f\in\mathcal{H}ol(B_1),\ z\in B_1.$$

Поэтому J_g иногда называют *обобщенным оператором Чезаро*. Алеман [6] рассматривает различные свойства оператора J_g при $n=1$. Для $n\ge 2$ оператор интегрирования J_g ввел Ху [7]. Отметим, что оператор J_g тесно связан с оператором умножения $M_{\mathscr{R}g}$. В течение последних лет несколько авторов исследовали оператор J_g на пространствах типа Бергмана и пространствах типа Блоха.

1.5. Организация статьи. В § 2 сформулирована основная лемма данной статьи. Для рассматриваемых X и Y в § 3 охарактеризованы отображения g и φ, для которых весовой оператор композиции $C_\varphi^g:X\to Y$ является ограниченным или компактным. Отметим, что в недавней статье [8] получен соответствующий одномерный результат для $X=\mathscr{A}^{-\log}(B_1)$ и $Y=A^p_\alpha(B_1)$, $0<p<\infty$, $\alpha>-1$. Стевич [9, теорема 5.2] сформулировал частичный результат, если $n\in\mathbb{N}$, $X=\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta>0$, и $Y=H(p,q;\omega)(B_n)$ (определение пространства $H(p,q;\omega)(B_n)$ дано в § 3). В настоящей работе соответствующая задача решена полностью (см. следствие 3.4).

Для рассматриваемых X и Y в § 4 охарактеризованы функции $g\in\mathcal{H}ol(B_n)$, для которых оператор интегрирования $J_g:X\to Y$ является ограниченным или компактным. В статье [8] доказан соответствующий результат для $X=\mathscr{A}^{-\log}(B_1)$ и $Y=A^p_\alpha(B_1)$, $0<p<\infty$, $\alpha>-1$. В заключительном § 5 собраны некоторые результаты о голоморфных пространствах Соболева.

§ 2. Основная лемма

Следующая лемма будет ключевым инструментом при изучении операторов на пространствах роста.

Лемма 2.1 [10, лемма 1.2]. *Пусть $n\in\mathbb{N}$. Тогда существует натуральное число $L=L(n)$ такое, что имеют место следующие утверждения.*

1. *Пусть $\beta>0$. Тогда существуют функции $f_\ell\in\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$, $0\le\ell\le L$, такие, что*

$$\sum_{\ell=0}^{L}|f_\ell(z)|\ge\frac{1}{(1-|z|)^\beta},\quad z\in B_n. \tag{2.1}$$

2. *Существуют функции $h_\ell\in\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$, $0\le\ell\le L$, такие, что*

$$\sum_{\ell=0}^{L}|h_\ell(z)|\ge\log\frac{e}{1-|z|},\quad z\in B_n. \tag{2.2}$$

§ 3. Весовые операторы композиции

3.1. Операторы из X в Y. Пусть $\mathscr{Y}(B_m)$ — линейное пространство, состоящее из функций $f : B_m \to \mathbb{C}$. Будем говорить, что $\mathscr{Y}(B_m)$ является решеткой, если имеет место следующее свойство: если $F \in \mathscr{Y}(B_m)$, $f \in C(B_m)$ и $|f(z)| \le |F(z)|$ для всех $z \in B_m$, то $f \in \mathscr{Y}(B_m)$. Для решетки $\mathscr{Y}(B_m)$ положим $\mathscr{Y}_a(B_m) = \mathscr{Y}(B_m) \cap \mathcal{H}ol(B_m)$. Весовое пространство Бергмана $A^p_\alpha(B_m)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, является частным случаем пространства $\mathscr{Y}_a(B_m)$. Действительно, $A^p_\alpha(B_m) = \mathscr{Y}_a(B_m)$ для $\mathscr{Y}(B_m) = L^p(B_m, (1-|z|)^\alpha \, d\nu_m(z))$.

Предложение 3.1. *Пусть $g \in \mathcal{H}ol(B_m)$ и $\varphi : B_m \to B_n$ — голоморфное отображение. Предположим, что $\mathscr{Y}(B_m)$ — решетка.*

1. *Пусть $\beta > 0$. Оператор C^g_φ отображает $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ в $\mathscr{Y}_a(B_m)$ тогда и только тогда, когда*
$$\frac{|g(z)|}{(1-|\varphi(z)|)^\beta} \in \mathscr{Y}(B_m). \tag{3.1}$$

2. *Оператор C^g_φ отображает пространство $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ в $\mathscr{Y}_a(B_m)$ тогда и только тогда, когда*
$$|g(z)| \log \frac{e}{1-|\varphi(z)|} \in \mathscr{Y}(B_m).$$

Доказательство. Предположим, что $\beta > 0$ и оператор C^g_φ отображает пространство $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ в $\mathscr{Y}_a(B_m)$. Зафиксируем число $L = L(n)$ и функции $f_\ell \in \mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$, существующие в силу леммы 2.1. Применяя неравенство (2.1), имеем
$$\frac{|g(z)|}{(1-|\varphi(z)|)^\beta} \le \sum_{\ell=0}^{L} |g(z)||f_\ell(\varphi(z))| = \sum_{\ell=0}^{L} \big|\big(C^g_\varphi f_\ell\big)(z)\big|, \quad z \in B_m.$$
Так как $\mathscr{Y}(B_m)$ является решеткой, получаем (3.1).

Для доказательства обратной импликации предположим, что выполнено свойство (3.1). Если $f \in \mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$, то
$$\big|\big(C^g_\varphi f\big)(z)\big| \le \|f\|_{-\beta} |g(z)| (1-|\varphi(z)|)^{-\beta} \in \mathscr{Y}(B_m).$$
Следовательно, $C^g_\varphi f \in \mathscr{Y}_a(B_m)$. Доказательство п. 1 завершено. Доказательство п. 2 аналогично. Действительно, воспользуемся функциями $h_\ell \in \mathscr{A}^{-\log}(B_n)$, существующими в силу леммы 2.1, и применим неравенство (2.2). □

3.2. Компактные операторы. Нам потребуется следующий критерий компактности, различные модификации которого хорошо известны.

Лемма 3.2 (ср. с [11, лемма 3.7]). *Пусть $X = \mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$, или $X = \mathscr{A}^{-\log}(B_n)$, и пусть Y — векторное пространство, состоящее из голоморфных функций в шаре B_m. Предположим, что Y является метрическим пространством с инвариантной относительно сдвига метрикой. Рассмотрим линейный оператор $T : X \to Y$. Тогда имеет место следующая импликация.*

Предположим, что последовательность $\{Th_j\}$ сходится к нулю в метрике пространства Y для любой ограниченной в X последовательности $\{h_j\}$ такой, что $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n. Тогда T — компактный оператор.

Y является весовым пространством Бергмана.

Следствие 3.3. *Пусть $g \in \mathcal{H}ol(B_m)$, и пусть $\varphi : B_m \to B_n$ является голоморфным отображением. Предположим, что $0 < p < \infty$ и $\alpha > -1$.*

1. *Пусть $\beta > 0$. Оператор C_φ^g отображает $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A_\alpha^p(B_m)$ тогда и только тогда, когда $C_\varphi^g : \mathscr{A}^{-\beta}(B_n) \to A_\alpha^p(B_m)$ является компактным оператором, а это равносильно тому, что*

$$\int\limits_{B_m} \frac{|g(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_m(z)}{(1-|\varphi(z)|)^{\beta p}} < \infty. \tag{3.2}$$

2. *Оператор C_φ^g отображает $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ в $A_\alpha^p(B_m)$ тогда и только тогда, когда $C_\varphi^g : \mathscr{A}^{-\log}(B_n) \to A_\alpha^p(B_m)$ является компактным оператором, а это равносильно тому, что*

$$\int\limits_{B_m} |g(z)|^p \left(\log \frac{e}{1-|\varphi(z)|}\right)^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_m(z) < \infty.$$

Доказательство. Пусть имеет место (3.2). Отметим, что предположения леммы 3.2 выполнены для $T = C_\varphi^g$ и $Y = A_\alpha^p(B_m)$. Итак, пусть $\|h_j\|_{-\beta} \le K$ и $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если число $t \in [0,1)$ находится достаточно близко к 1, то

$$\int\limits_{\{z\in B_m : |\varphi(z)|>t\}} |(C_\varphi^g h_j)(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_m(z)$$
$$\le K^p \int\limits_{\{z\in B_m : |\varphi(z)|>t\}} \frac{|g(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_m(z)}{(1-|\varphi(z)|)^{\beta p}} < \varepsilon/2$$

в силу (3.2). Так как $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n, имеем

$$\int\limits_{\{z\in B_m : |\varphi(z)|\le t\}} |(C_\varphi^g h_j)(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_m(z) < \varepsilon/2,$$

если индекс j достаточно велик. Следовательно, $\left\|C_\varphi^g h_j\right\|_{A_\alpha^p}^p < \varepsilon$ для всех достаточно больших j. Таким образом, лемма 3.2 гарантирует, что C_φ^g является компактным оператором из $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A_\alpha^p(B_n)$. В силу предложения 3.1 доказательство п. 1 завершено. Доказательство п. 2 аналогично, поэтому оно будет опущено. $\square$

Y является пространством со смешанной нормой. Положительная непрерывная функция ω на интервале $[0,1)$ называется *нормальной*, если существуют числа s и t, $0 < s < t$, такие, что $\omega(r)(1-r)^{-s}$ убывает в окрестности точки 1 и $\omega(r)(1-r)^{-s} \to 0$ при $r \to 1-$; $\omega(r)(1-r)^{-t}$ возрастает в окрестности точки 1 и $\omega(r)(1-r)^{-t} \to \infty$ при $r \to 1-$.

Пусть σ_m обозначает нормированную меру Лебега на сфере ∂B_m. Если $0 < p, q < \infty$ и ω является нормальной функцией, то пространство со смешанной нормой $H(p,q;\omega)(B_m)$ состоит из тех функций $f \in \mathcal{H}ol(B_m)$, для которых

$$\|f\|_{p,q;\omega}^p = \int\limits_0^1 \mathscr{M}_q^p(f,r)\omega^p(r)(1-r)^{-1} \, dr < \infty,$$

где $\mathscr{M}_q^q(f,r) = \int\limits_{\partial B_m} |f(r\zeta)|^q\, d\sigma_m(\zeta)$, $0 \le r < 1$. Отметим, что $H(p,p;\omega)(B_m)$ является весовым пространством Бергмана $A^p_\alpha(B_m)$, если $\omega(r) = (1-r)^{(\alpha+1)/p}$ при $\alpha > -1$. Если $\mu = \min\{p,q\} \ge 1$, то $H(p,q;\omega)(B_m)$ — банахово пространство; если $0 < \mu < 1$, то пространство $H(p,q;\omega)(B_m)$ является полным относительно метрики $d(f,g) = \|f-g\|^\mu_{p,q;\omega}$.

Для дальнейших ссылок сформулируем обобщение следствия 3.3.

Следствие 3.4. *Пусть $g \in \mathcal{H}ol(B_m)$ и $\varphi : B_n \to B_m$ — голоморфное отображение. Предположим, что $0 < p, q < \infty$ и ω — нормальная функция.*

1. *Пусть $\beta > 0$. Оператор C^g_φ отображает $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ в $H(p,q;\omega)(B_m)$ тогда и только тогда, когда $C^g_\varphi : \mathscr{A}^{-\beta}(B_n) \to H(p,q;\omega)(B_m)$ является компактным оператором, а это равносильно тому, что*

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\partial B_m} \frac{|g(r\zeta)|^q\, d\sigma_m(\zeta)}{(1-|\varphi(r\zeta)|)^{\beta q}} \right)^{\frac{p}{q}} \omega^p(r)(1-r)^{-1}\, dr < \infty.$$

2. *Оператор C^g_φ отображает $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ в $H(p,q;\omega)(B_m)$ тогда и только тогда, когда $C^g_\varphi : \mathscr{A}^{-\log}(B_n) \to H(p,q;\omega)(B_m)$ является компактным оператором, а это равносильно тому, что*

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\partial B_m} |g(r\zeta)|^q \left(\log \frac{e}{1-|\varphi(r\zeta)|} \right)^q d\sigma_m(\zeta) \right)^{\frac{p}{q}} \omega^p(r)(1-r)^{-1}\, dr < \infty.$$

Для доказательства следствия 3.4 достаточно повторить доказательство следствия 3.3. Отметим также, что следствие 3.4 имеет место для более общих весов, чем нормальные. Наконец, п. 1 следствия 3.4 закрывает пробел между достаточным условием и необходимым условием, приведенными в [9, теорема 5.2].

§ 4. Операторы интегрирования и операторы умножения

Напомним, что

$$(J_g f)(z) = \int\limits_0^1 f(tz) \frac{\mathscr{R} g(tz)}{t}\, dt, \quad g, f \in \mathcal{H}ol(B_n),\ z \in B_n.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$(\mathscr{R} J_g f)(z) = f(z) \mathscr{R} g(z), \quad z \in B_n, \tag{4.1}$$

для всех $f, g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ (см. [7]). Отметим также, что $(J_g f)(0) = 0$ для всех $f, g \in \mathcal{H}ol(B_n)$. Нам потребуется следующая

Лемма 4.1 [7, теорема 2]. *Предположим, что $0 < p, q < \infty$, функция ω является нормальной и $h \in H(p,q;\omega)(B_n)$. Тогда*

$$C_1 \|h\|_{p,q;\omega} \le |h(0)| + \left(\int\limits_0^1 \mathscr{M}^p_q(\mathscr{R}h, r) \omega^p(r)(1-r)^{p-1}\, dr \right)^{\frac{1}{p}} \le C_2 \|h\|_{p,q;\omega},$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от функции h.

Теорема 4.2. *Предположим, что $0 < p, q < \infty$, функция ω является нормальной и $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$.*

1. Пусть $\beta > 0$. Тогда следующие свойства эквивалентны.

(i) *Оператор J_g отображает $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ в $H(p,q;\omega)(B_n)$.*

(ii) $\int\limits_0^1 \mathscr{M}_q^p(\mathscr{R}g, r)\omega^p(r)(1-r)^{p-\beta p-1}\,dr < \infty$.

(iii) *Оператор $J_g : \mathscr{A}^{-\beta}(B_n) \to H(p,q;\omega)(B_n)$ компактен.*

Если $\omega(r)(1-r)^{-\beta}$ является нормальной функцией, то условия (i)–(iii) *эквивалентны каждому из следующих свойств.*

(iv) *Оператор M_g отображает $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ в $H(p,q;\omega)(B_n)$.*

(v) $\int\limits_0^1 \mathscr{M}_q^p(g, r)\omega^p(r)(1-r)^{-\beta p-1}\,dr < \infty$.

(vi) *Оператор $M_g : \mathscr{A}^{-\beta}(B_n) \to H(p,q;\omega)(B_n)$ компактен.*

2. Следующие свойства эквивалентны.

(i) *Оператор J_g отображает $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ в $H(p,q;\omega)(B_n)$.*

(ii) $\int\limits_0^1 \mathscr{M}_q^p(\mathscr{R}g, r)\big(\omega(r)\log\frac{e}{1-r}\big)^p(1-r)^{p-1}\,dr < \infty$.

(iii) *Оператор $J_g : \mathscr{A}^{-\log}(B_n) \to H(p,q;\omega)(B_n)$ компактен.*

(iv) *Оператор M_g отображает $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ в $H(p,q;\omega)(B_n)$.*

(v) $\int\limits_0^1 \mathscr{M}_q^p(g, r)\big(\omega(r)\log\frac{e}{1-r}\big)^p(1-r)^{-1}\,dr < \infty$.

(vi) *Оператор $M_g : \mathscr{A}^{-\log}(B_n) \to H(p,q;\omega)(B_n)$ компактен.*

Доказательство п. 2. Пусть выполнено (i). Лемма 4.1 гарантирует, что оператор $\mathscr{R}J_g$ отображает $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ в $H(p,q;(1-r)\omega(r))(B_n)$. Следовательно, в силу (4.1) оператор умножения $M_{\mathscr{R}g}$ отображает $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ в пространство $H(p,q;(1-r)\omega(r))(B_n)$. Таким образом, (ii) имеет место в силу следствия 3.4. Итак, (ii) следует из (i).

Далее, пусть выполнено (ii). Предположим, что $\|h_j\|_{-\log} \le K$ и $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если число $t \in [0,1)$ расположено достаточно близко к 1, то

$$\int\limits_t^1 \Bigg(\int\limits_{\partial B_n} |h_j(r\zeta)|^q |\mathscr{R}g(r\zeta)|^q\,d\sigma_n(\zeta)\Bigg)^{\frac{p}{q}} \omega^p(r)(1-r)^{p-1}\,dr$$
$$\le K^p \int\limits_t^1 \mathscr{M}_q^p(\mathscr{R}g, r)\left(\omega(r)\log\frac{e}{1-r}\right)^p (1-r)^{p-1}\,dr < \varepsilon/2$$

в силу (ii). Так как $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n, получаем

$$\int\limits_0^t \Bigg(\int\limits_{\partial B_n} |h_j(r\zeta)|^q |\mathscr{R}g(r\zeta)|^q\,d\sigma_n(\zeta)\Bigg)^{\frac{p}{q}} \omega^p(r)(1-r)^{p-1}\,dr < \varepsilon/2,$$

если индекс j достаточно велик. Следовательно, в силу (4.1) имеем

$$\int\limits_0^1 \mathscr{M}_q^p(\mathscr{R}J_g h_j, r)\omega^p(r)(1-r)^{p-1}\,dr < \varepsilon$$

для всех достаточно больших j. Напомним, что $(J_g h_j)(0) = 0$, поэтому

$$\|J_g h_j\|_{p,q;\omega} \to 0 \quad \text{при } j \to \infty$$

в силу леммы 4.1. Применяя лемму 3.2, получаем (iii). Итак, (iii) следует из (ii). Безусловно, (i) следует из (iii). Итак, свойства (i)–(iii) эквивалентны.

Свойства (iv)–(vi) эквивалентны в силу следствия 3.4.

Проверим эквивалентность свойств (ii) и (v). Пусть s и t — числа из определения нормальной функции ω. Имеем

$$\frac{\omega(r)\log(e/(1-r))}{(1-r)^{s/2}} = \frac{\omega(r)}{(1-r)^{s}}(1-r)^{s/2}\log\frac{e}{1-r} \to 0 \quad \text{при } r \to 1-.$$

Так как функция $(1-r)^{s/2}\log(e/(1-r))$ убывает в окрестности точки 1, функция $(1-r)^{-s/2}\omega(r)\log(e/(1-r))$ убывает в окрестности точки 1. Наконец, функция $(1-r)^{-t}\omega(r)\log(e/(1-r))$ возрастает в окрестности точки 1 и $(1-r)^{-t}\omega(r)\log(e/(1-r)) \to \infty$ при $r \to 1-$. Поэтому функция $\omega(r)\log(e/(1-r))$ нормальна. Следовательно, свойства (ii) и (v) эквивалентны в силу леммы 4.1. Итак, доказательство п. 2 завершено.

Доказательство п. 1 аналогично (см. также доказательство теоремы 5.4). $\square$

§ 5. Дальнейшие результаты

5.1. Весовые операторы композиции и пространства Харди. Напомним, что σ_m обозначает нормированную меру Лебега на сфере ∂B_m. При $0 < p < \infty$ пространство Харди $H^p(B_m)$ состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B_m)$ таких, что

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0<r<1} \int\limits_{\partial B_m} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma_m(\zeta) < \infty.$$

Положим

$$\mathscr{Y}^p(B_m) = \left\{ f \in C(B_m) : \sup_{0<r<1} \int\limits_{\partial B_m} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma_m(\zeta) < \infty \right\}.$$

Тогда $\mathscr{Y}^p(B_m)$ является решеткой и $H^p(B_m) = \mathscr{Y}^p_a(B_m)$. Таким образом, из предложения 3.1 вытекает

Следствие 5.1. *Пусть $g \in \mathcal{H}ol(B_m)$, и пусть $\varphi : B_m \to B_n$ является голоморфным отображением. Предположим, что $0 < p < \infty$.*

1. *Пусть $\beta > 0$. Оператор C_φ^g отображает $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ в $H^p(B_m)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{0<r<1} \int\limits_{\partial B_m} \frac{|g(r\zeta)|^p \, d\sigma_m(\zeta)}{(1-|\varphi(r\zeta)|)^{\beta p}} < \infty.$$

2. *Оператор C_φ^g отображает $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ в $H^p(B_m)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{0<r<1} \int\limits_{\partial B_m} |g(r\zeta)|^p \left(\log\frac{e}{1-|\varphi(r\zeta)|}\right)^p d\sigma_m(\zeta) < \infty. \tag{5.1}$$

Отметим, что при $n = 1$ и $g \equiv 1$ Квон [5] использует условие (5.1) для определения гиперболического пространства Харди $\varrho H^p(B_m)$. В работе [5] приведены разнообразные свойства, которые равносильны условию (5.1) при $n = 1$ и $g \equiv 1$.

Следствие 5.2. *Пусть $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ и $0 < p < \infty$. Тогда оператор умножения M_g отображает $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ или $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$, в $H^p(B_n)$ в том и только в том случае, когда $g \equiv 0$.*

Доказательство. Так как $\mathscr{A}^{-\log}(B_n) \subset \mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ для всех $\beta > 0$, предположим, что оператор M_g отображает $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ в $H^p(B_n)$. Следствие 5.1 гарантирует, что

$$\sup_{0<r<1} \left(\log \frac{e}{1-r}\right)^p \int\limits_{\partial B_n} |g(r\zeta)|^p \, d\sigma_n(\zeta) < \infty.$$

Так как $\int\limits_{\partial B_n} |g(r\zeta)|^p \, d\sigma_n(\zeta)$ является возрастающей функцией от r, то $g \equiv 0$. Остается заметить, что $M_g f = 0$ для всех $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, если $g \equiv 0$. $\square$

5.2. Операторы интегрирования и голоморфные пространства Соболева. Пространство Харди — Соболева $H_1^p(B_n)$, $0 < p < \infty$, задается равенством

$$H_1^p(B_n) = \{f \in \mathcal{H}ol(B_n) : \mathscr{R}f \in H^p(B_n)\}.$$

Следствие 5.3. *Пусть $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ и $0 < p < \infty$. Тогда оператор интегрирования J_g отображает $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ или $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$, в $H_1^p(B_n)$ в том и только в том случае, когда g является константой.*

Доказательство. Пусть оператор J_g отображает $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ в $H_1^p(B_n)$. Тогда в силу (4.1) оператор умножения $M_{\mathscr{R}g}$ отображает $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ в $H^p(B_n)$. Таким образом, следствие 5.2 гарантирует, что $\mathscr{R}g \equiv 0$. Поэтому g является константой. Для завершения доказательства заметим, что $J_g f = 0$ для всех $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, если g является константой. $\square$

Пространство Бергмана — Соболева $A^p_{\alpha,1}(B_n)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$ таких, что

$$\|f\|^p_{A^p_{\alpha,1}} = |f(0)|^p + \|\mathscr{R}f\|^p_{A^p_\alpha} < \infty.$$

Напомним, что в силу леммы 4.1 пространство $A^p_{\alpha,1}(B_n)$ совпадает с весовым пространством Бергмана $A^p_{\alpha-p}(B_n)$ при $\alpha > p-1$. Отметим также, что $A^2_{1,1}(B_n)$ совпадает с пространством Харди $H^2(B_n)$ (см., например, [12], где приведены дальнейшие детали).

Теорема 5.4. *Предположим, что $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$, $0 < p < \infty$ и $\alpha > -1$.*

1. *Пусть $\beta > 0$. Оператор J_g отображает $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A^p_{\alpha,1}(B_n)$ тогда и только тогда, когда $J_g : \mathscr{A}^{-\beta}(B_n) \to A^p_{\alpha,1}(B_n)$ является компактным оператором, а это равносильно тому, что*

$$\int\limits_{B_n} |\mathscr{R}g(z)|^p (1-|z|)^{\alpha-\beta p} \, d\nu_n(z) < \infty. \tag{5.2}$$

В частности, если $\beta p \geq \alpha + 1$, то оператор J_g отображает $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A^p_{\alpha,1}(B_n)$ тогда и только тогда, когда g является константой.

2. *Оператор J_g отображает $\mathscr{A}^{-\log}(B_n)$ в $A^p_{\alpha,1}(B_n)$ тогда и только тогда, когда $J_g : \mathscr{A}^{-\log}(B_n) \to A^p_{\alpha,1}(B_n)$ является компактным оператором, а это равносильно тому, что*

$$\int\limits_{B_n} |\mathscr{R}g(z)|^p (1-|z|)^{\alpha} \left(\log \frac{e}{1-|z|}\right)^p \, d\nu_n(z) < \infty.$$

Доказательство п. 1. Пусть J_g отображает $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A^p_{\alpha,1}(B_n)$. В силу (4.1) оператор умножения $M_{\mathscr{R}g}$ отображает $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A^p_\alpha(B_n)$. Тогда (5.2) имеет место в силу следствия 3.3.

Далее, предположим, что выполнено (5.2). Пусть $\|h_j\|_{-\beta} \le K$ и $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если число $t \in [0,1)$ находится достаточно близко к 1, то

$$\int\limits_{\{z\in B_n:|z|>t\}} |(\mathscr{R}J_g h_j)(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_n(z) = \int\limits_{\{z\in B_n:|z|>t\}} |h_j(z)|^p |\mathscr{R}g(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_n(z) \le K^p \int\limits_{\{z\in B_n:|z|>t\}} |\mathscr{R}g(z)|^p (1-|z|)^{\alpha-\beta p} \, d\nu_n(z) < \frac{\varepsilon}{2}$$

в силу (4.1) и (5.2). Так как $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n, имеем

$$\int\limits_{\{z\in B_n:|z|\le t\}} |(\mathscr{R}J_g h_j)(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_n(z) = \int\limits_{\{z\in B_n:|z|\le t\}} |h_j(z)|^p |\mathscr{R}g(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_n(z) < \frac{\varepsilon}{2},$$

если индекс j достаточно велик. Отметим, что $J_g h_j(0) = 0$, следовательно,

$$\|J_g h_j\|^p_{A^p_{\alpha,1}} < \varepsilon$$

для всех достаточно больших j. Таким образом, лемма 3.2 гарантирует, что J_g — компактный оператор из $\mathscr{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A^p_{\alpha,1}(B_n)$.

Наконец, если выполнено условие (5.2), то

$$2n \int\limits_0^1 \int\limits_{\partial B_n} |\mathscr{R}g(r\zeta)|^p \, d\sigma_n(\zeta) \, r^{2n-1} (1-r)^{\alpha-\beta p} \, dr = \int\limits_{B_n} |\mathscr{R}g(z)|^p (1-|z|)^{\alpha-\beta p} \, d\nu_n(z) < \infty.$$

Так как $\int\limits_{\partial B_n} |\mathscr{R}g(r\zeta)|^p \, d\sigma_n(\zeta)$ является возрастающей функцией от r, из неравенства $\alpha - \beta p \le -1$ следует, что $\mathscr{R}g \equiv 0$ и g является константой. Итак, доказательство п. 1 завершено.

Доказательство п. 2 аналогично. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhu K.* Spaces of holomorphic functions in the unit ball. New York: Springer-Verl., 2005. (Graduate Texts Math.; V. 226).
2. *Cowen C. C., MacCluer B. D.* Composition operators on spaces of analytic functions. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995. (Studies in Advanced Mathematics).

3. *Shapiro J. H.* Composition operators and classical function theory. New York: Springer-Verl., 1993. (Universitext: Tracts in Mathematics).

4. *Ahern P.* On the behavior near a torus of functions holomorphic in the ball // Pacific J. Math. 1983. V. 107, N 2. P. 267–278.

5. *Kwon E. G.* Hyperbolic mean growth of bounded holomorphic functions in the ball // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. V. 355, N 3. P. 1269–1294.

6. *Aleman A.* A class of integral operators on spaces of analytic functions // Topics in complex analysis and operator theory. Málaga: Univ. Málaga, 2007. P. 3–30.

7. *Hu Z.* Extended Cesàro operators on mixed norm spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 131, N 7. P. 2171–2179.

8. *Girela D., Peláez J. Á., Pérez-González F., Rättyä J.* Carleson measures for the Bloch space // Integral Equations Operator Theory. 2008. V. 61, N 4. P. 511–547.

9. *Stević S.* Weighted composition operators between mixed norm spaces and H_α^∞ spaces in the unit ball // J. Inequal. Appl. 2007. Art. ID 28629, 9pp.

10. *Doubtsov E.* Growth spaces on circular domains: composition operators and Carleson measures // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2009. V. 347, N 11–12. P. 609–612.

11. *Tjani M.* Compact composition operators on Besov spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. V. 355, N 11. P. 4683–4698.

12. *Beatrous F., Burbea J.* Holomorphic Sobolev spaces on the ball. Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 1989. N 276. 60pp.

Статья поступила 13 августа 2008 г.

Дубцов Евгений Сергеевич
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург 191023
dubtsov@pdmi.ras.ru