Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 512.542

О НЕНИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ, ЛЮБЫЕ ДВЕ 3–МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫ

В. Го, Ю. В. Луценко, А. Н. Скиба

Аннотация. Описана структура конечных ненильпотентных групп, в которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны. В частности, получены описания конечных ненильпотентных групп, у которых все 2-максимальные или все 3-максимальные подгруппы нормальны.

Ключевые слова: силовская подгруппа, группа Шмидта, n-максимальная подгруппа, нильпотентная группа, сверхразрешимая группа, разрешимая группа, перестановочная подгруппа.

1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны. Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-*максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и т. д.

Связь между i-максимальными подгруппами (где $i > 1$) группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранний результат в данном направлении получен Хуппертом в работе [1], где доказано, что группа сверхразрешима, если все ее 2-максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт доказал, что в случае, когда каждая третья максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, коммутант G' группы G нильпотентен и порядок каждого главного фактора группы G делится не более чем на два простых числа. Развивая эти два результата Хупперта, Янко в работе [2] получил описание групп, в которых 4-максимальные подгруппы нормальны. В работах Судзуки [3] и Янко [4] содержится описание конечных неразрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Описание разрешимых групп, в которых все вторые максимальные подгруппы нильпотентны, получено В. А. Белоноговым в работе [5]. Эти результаты получили развитие в работе В. Н. Семенчука [6], где дано описание разрешимых групп, у которых все их 2-максимальные подгруппы сверхразрешимы. Гаген и Янко в работе [7] описали простые группы, 3-максимальные подгруппы которых нильпотентны. Аграваль [8] доказал, что группа G сверхразрешима, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами группы G. Отмеченные выше результаты Хупперта получили свое дальнейшее развитие также в работе Л. Я. Полякова [9], который доказал, что группа сверхразрешима, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми ее максимальными подгруппами.

В последние годы получен ряд новых интересных результатов о 2- и 3-максимальных подгруппах. Например, в недавней работе [10] Го Шуин и К. П. Шум доказали разрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования. В работах [11, 12] получены характеризации сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. Отметим также, что в [13] авторами дано описание ненильпотентных групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами, а также групп, в которых каждая максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами [14]. В связи с последними двумя результатами вполне естественной является задача В. С. Монахова и О. И. Тавгеня (см. вопрос 3.10 в обзоре [15]) об описании групп, в которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны. Данная работа посвящена решению этой задачи в классе ненильпотентных групп. В частности, завершая отмеченные выше результаты Хупперта, мы даем описания ненильпотентных групп, у которых все 2-максимальные или все 3-максимальные подгруппы нормальны.

2. Некоторые предварительные результаты

Приведем некоторые свойства групп Шмидта, необходимые для доказательства основного результата (см. [16, гл. VI]).

Лемма 2.1. *Если G — группа Шмидта, то*

(1) *$G = [P]\langle a\rangle$, где P, $\langle a\rangle$ — силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G соответственно;*

(2) *G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P\langle a^q\rangle$ и $P'\langle a\rangle$;*

(3) *$G' = P$;*

(4) *$\Phi(G) = Z(G) = P' \times \langle a^q\rangle$;*

(5) *$P/\Phi(P)$ — главный фактор группы G, причем если $|P/\Phi(P)| = p^\alpha$, то p^α сравнимо с единицей по модулю q;*

(6) *наибольшая нормальная подгруппа группы G, строго содержащаяся в P, совпадает с $\Phi(P) = P' = C_P(a)$;*

(7) *если P абелева, то она элементарна;*

(8) *если P неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p.*

Также нам понадобятся следующие вспомогательные результаты.

Лемма 2.2 [17, теорема 5.1.9]. *Пусть P — p-группа и A — максимальная абелева подгруппа из P. Допустим, что $|P'| = p$. Тогда*

$$|P : A| = |A/Z(P)| \text{ и } |P/Z(P)| = |A/Z(P)|^2.$$

Следующая лемма описывает ненильпотентные группы, в которых любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны.

Лемма 2.3. *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *любые две 2-максимальные подгруппы группы G являются перестановочными;*

(2) *G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Допустим, что G — ненильпотентная группа и любые две 2-максимальные подгруппы группы G перестановочны. Это влечет нильпотентность каждой максимальной подгруппы группы G, поэтому G является группой Шмидта. Покажем теперь, что G является группой с абелевыми силовскими подгруппами. По лемме 2.1(1) $G = [P]Q$, где P — силовская p-подгруппа группы G и Q — циклическая q-подгруппа в G.

Допустим, что $P' \neq 1$. Пусть E — максимальная подгруппа группы $P'Q$, индекс которой равен p. Тогда E является 2-максимальной подгруппой в G по лемме 2.1(2) и $Q \leq E$. Из условия леммы вытекает, что EE^x — подгруппа в G для всех $x \in G$. Согласно [18, VI, лемма 4.7] существует такой элемент $y \in EE^x$, что $Q^y = QQ^x$, поэтому $Q = Q^x$ является нормальной подгруппой в группе G. Данное противоречие показывает, что $P' = 1$, а это, в свою очередь, влечет абелевость группы P.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что группа $G = [P]\langle a\rangle$ является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, где P, $\langle a\rangle$ — силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G соответственно. По лемме 2.1(2) группа G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $\langle a\rangle$ и $P\langle a^q\rangle$. Группы вида $\langle a^q\rangle$, $P\langle a^{q^2}\rangle$ и $P_1\langle a^q\rangle$, где P_1 — некоторая максимальная подгруппа группы P, являются представителями трех классов 2-максимальных подгрупп группы G. По лемме 2.1(4) $\langle a^q\rangle$ содержится в $Z(G)$, поэтому $\langle a^q\rangle$ и $\langle a^{q^2}\rangle$ являются нормальными подгруппами в G. Это влечет нормальность 2-максимальных подгрупп $\langle a^q\rangle$ и $P\langle a^{q^2}\rangle$ в группе G. Так как любые две 2-максимальные подгруппы группы G вида $P_1\langle a^q\rangle$ и $P_2\langle a^q\rangle$ перестановочны, где P_1 и P_2 — некоторые максимальные подгруппы в P, то любые две 2-максимальные подгруппы группы G перестановочны. Лемма доказана.

Следствие 2.4. *Если в группе G любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны и $|\pi(G)| > 2$, то группа G нильпотентна.*

Следствие 2.5. *В ненильпотентной группе G каждая 2-максимальная подгруппа нормальна в том и только в том случае, когда G — группа Шмидта, нормальная силовская подгруппа которой имеет простой порядок.*

Следствие 2.6 [1]. *Если каждая вторая максимальная подгруппа группы G нормальна в G, то G сверхразрешима.*

Лемма 2.7 [19, лемма 9]. *Пусть $P = [H]C_p$, где H — элементарная p-группа, $|C_p| = p$ и любые две 2-максимальные подгруппы из P перестановочны. Тогда P является абелевой группой.*

Следующая лемма доказывается индукцией по n.

Лемма 2.8. *Пусть E — n-максимальная подгруппа q-нильпотентной группы G. Тогда $|G : E| = q^\alpha s$, где $\alpha \leq n$ и $(s, q) = 1$.*

Лемма 2.9. *Пусть T — подгруппа группы G и $Q = \langle a\rangle$ — циклическая q-подгруппа группы G. Если $T \cap Q^x = 1$ для любого $x \in G$ и группа G q-нильпотентна, то $|Q|$ делит $|G : T|$.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что $T \neq G$. Покажем, используя индукцию по $|G : T|$, что $|Q|$ делит $|G : T|$. Пусть $T \leq M$, где M — максимальная подгруппа в G.

Допустим, что для некоторого $x \in G$ имеет место $\langle a\rangle^x \leq M$. Так как $(\langle a\rangle^x)^m \cap T = 1$ для всех $m \in M$, по индукции $|\langle a\rangle^x| = |\langle a\rangle|$ делит $|M : T|$ и поэтому $|Q| = |\langle a\rangle|$ делит $|G : T|$.

Таким образом, $\langle a\rangle^x \nleq M$ для всех $x \in G$. Тогда M нормальна в G. Поскольку $(\langle a\rangle \cap M)^m \cap T = 1$ для всех $m \in M$, по индукции $|\langle a\rangle \cap M|$ делит $|M : T|$. Это влечет, что $|\langle a\rangle \cap M|$ делит $|G : T|$. Так как

$$G/M = \langle a\rangle M/M \simeq \langle a\rangle/M \cap \langle a\rangle,$$

то $|\langle a\rangle : M \cap \langle a\rangle|$ делит $|G : T|$. Следовательно, $|Q| = |\langle a\rangle : M \cap \langle a\rangle||\langle a\rangle \cap M|$ делит $|G : T|$. Лемма доказана.

3. Строение групп, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны

Следуя [5], будем обозначать пересечение всех 2-максимальных подгрупп группы G через $\Phi^2(G)$.

В дальнейшем p, q и r — попарно различные простые числа. В следующих теоремах P, Q и R обозначают некоторые силовские p-, q- и r-подгруппы группы G соответственно.

Теорема 3.1. *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда любые две 3-максимальные подгруппы группы G перестановочны в том и только в том случае, когда G является группой одного из следующих типов:*

I) *G — группа Шмидта одного из видов:*

(a) *G — группа с абелевыми силовскими подгруппами;*

(b) *$G = [P]Q$, где P изоморфна либо группе $M_3(p)$ (см. [20, с. 190]), либо группе кватернионов порядка 8;*

(c) *$G = [P]Q$, где $|P| > p^3$, $|\Phi(P)| = p$ и $\Phi(P) = \Phi^2(P)$;*

II) *G — бипримарная группа, не являющаяся группой Шмидта, одного из следующих видов:*

(1) *$G = [P]Q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G, Q — циклическая группа и $[P]\Phi(Q)$ — группа Шмидта;*

(2) *$G = ([P]Q_1) \times C_q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G, $|C_q| = q$ и PQ_1 — группа Шмидта;*

(3) *$G = [P]Q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G, $Q = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $|a| = |b| = q$, $P\langle a\rangle$ и $P\langle b\rangle$ — группы Шмидта;*

(4) *$G = [P]Q$, где $|P| = p$, $p > 2$ и Q изоморфна группе кватернионов порядка 8;*

(5) *$G = ([P]Q_1)C_q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G, $Q_1 = \langle a\rangle$, $C_q = \langle b\rangle$, $|Q_1C_q| = q^\beta$, $|a| = q^{\beta-1}$ ($\beta \geq 3$), PQ_1 — группа Шмидта, $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$ и $[P, C_1] = 1$ для всякой подгруппы C_1, изоморфной C_q;*

(6) *$G = [P]Q$, где $\Phi(P)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта, максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$ и любые две 2-максимальные подгруппы из P перестановочны;*

(7) *G — подпрямое произведение двух различных изоморфных групп Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;*

(8) *$G = [P_1 \times C_p]Q$, где P_1 — минимальная нормальная p-подгруппа группы G, $|C_p| = p$, P_1Q — группа Шмидта, максимальная подгруппа из Q содержится в $Z(G)$ и $[C_p, Q] = 1$;*

(9) $G = [[P_1]Q]C_p$, *где* P_1 *— минимальная нормальная* p*-подгруппа группы* G, $|Q| = q$, $|C_p| = p$, $N_G(Q) = [Q]C_p$ *и* P_1C_p *— абелева группа;*

III) G *— группа, порядок которой имеет в точности три простых делителя* p, q, r *и которая является группой одного из следующих видов:*

(i) $G = ([P]Q)R$, *где* P *и* R *— минимальные нормальные подгруппы группы* G, Q *— циклическая группа и* $F(G) = PR\Phi(Q)$*;*

(ii) $G = [R](P \times Q)$, *где* $|P| = p$, $|Q| = q$ *и* $R = F(G)$ *— минимальная нормальная подгруппа группы* G.

Доказательство. Необходимость. Предположим вначале, что G — неразрешимая группа. Так как по условию любые две 3-максимальные подгруппы группы G перестановочны, каждая 2-максимальная подгруппа группы G нильпотентна, поэтому согласно [3, 4] G изоморфна одной из групп A_5 или $SL(2,5)$.

Допустим, что $G \simeq A_5$. Группа A_5 имеет три класса максимальных подгрупп, изоморфных группам A_4, D_6 и D_{10} соответственно. Рассмотрим максимальную подгруппу A_4 группы A_5. В группе A_4 нет подгрупп порядка 6, поэтому максимальными в A_4 являются силовские 2-подгруппы и силовские 3-подгруппы. Следовательно, подгруппы порядка 2 являются 2-максимальными подгруппами в A_4. Согласно условию любые две подгруппы порядка 2, содержащиеся в A_5, перестановочны, тем самым любые две силовские 2-подгруппы группы A_5 перестановочны. Значит, если K — некоторая силовская 2-подгруппа группы A_5, то KK^x является подгруппой в A_5 для всех $x \in A_5$. Так как A_5 — простая группа, то $K \neq K^x$ для некоторого $x \in A_5$. Но в группе A_5 нет подгрупп с порядком, равным $|KK^x|$; противоречие. Поскольку $A_5 \simeq SL(2,5)/Z(SL(2,5))$, в $SL(2,5)$ также имеются две неперестановочные 3-максимальные подгруппы.

Таким образом, G — разрешимая группа, в которой любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны. Понятно, что каждая собственная подгруппа H группы G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта. Причем если H — группа Шмидта, то H максимальна в G. Поскольку в разрешимой группе индекс любой максимальной подгруппы есть степень простого числа и число различных простых делителей порядка группы Шмидта равно двум, то $\pi(G) \leq 3$.

I. Предположим вначале, что $G = [P]Q$ является группой Шмидта.

Если P — абелева группа, то G является группой типа I(a).

Предположим теперь, что P — неабелева группа. По лемме 2.1(8) $\Phi(P) = P' = Z(P)$.

Допустим, что $|\Phi(P)| > p$. Пусть E — 2-максимальная подгруппа в $\Phi(P)Q$, индекс которой равен p^2. Тогда E является 3-максимальной подгруппой в G по лемме 2.1(2) и $Q \leq E$. Из условия теоремы вытекает, что EE^x — подгруппа в G для всех $x \in G$. Согласно [18, VI, лемма 4.7] существует такой элемент $y \in EE^x$, что $Q^y = QQ^x$, поэтому $Q = Q^x$ является нормальной подгруппой в группе G. Данное противоречие показывает, что $|\Phi(P)| = p$.

Покажем, что в группе P любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны. Пусть P_1 и P_2 — произвольные 2-максимальные подгруппы группы P и Q_1 — максимальная подгруппа группы Q. Так как Q_1 нормальна в G по лемме 2.1(4), то P_1Q_1 и P_2Q_1 являются 3-максимальными подгруппами в G. По условию $(P_1Q_1)(P_2Q_1) = (P_2Q_1)(P_1Q_1)$, тем самым $L = Q_1(P_1P_2)$ является подгруппой в группе G. Согласно [18, VI, лемма 4.7] в группе L существует силовская p-подгруппа L_p такая, что $L_p = P_1P_2$. Это влечет перестановочность подгрупп P_1 и P_2.

Предположим, что существует такая 2-максимальная подгруппа T в группе P, что $\Phi(P) \nsubseteq T$. Так как $P/\Phi(P)$ — абелева группа и $T\Phi(P)/\Phi(P) \leq P/\Phi(P)$, то $T \simeq T\Phi(P)/\Phi(P)$ также является абелевой группой и поэтому $T\times\Phi(P)$ — абелева максимальная подгруппа в P. Тогда по лемме 2.2 $|P| = p^3$. В этом случае по [20, V, теорема 5.1] P изоморфна одной из следующих групп: $M_3(p), M(p), D$ или Q, где D — диэдральная группа, Q — группа кватернионов порядка 8, $M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1,\ a^b = a^{1+p}\rangle$ и $M(p) = \langle x, y, z \mid x^p = y^p = z^p = 1,$ $[x, z] = [y, z] = 1,\ [x, y] = z\rangle$ (см. [20, с. 190, 191, 203]).

Если P изоморфна $M(p)$, то $P = \Omega_1(P) = \{g \in G \mid g^p = 1\}$. Но всякая подгруппа порядка p группы P является 2-максимальной подгруппой. Так как в группе P любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны, то P — абелева группа; противоречие. Если P изоморфна диэдральной группе, то ввиду [20, V, теорема 4.3] $P = \Omega_1(P)$, что невозможно, как показано выше. Следовательно, подгруппа P изоморфна либо группе $M_3(p)$, либо группе кватернионов порядка 8.

Таким образом, G является группой типа I(b).

Теперь допустим, что $\Phi(P)$ содержится в каждой 2-максимальной подгруппе группы P. Это влечет $\Phi(P) = \Phi^2(P)$. Если при этом $|P| = p^3$, то G снова является группой типа I(b). Если же $|P| > p^3$, то G — группа типа I(c).

II. Теперь предположим, что G не является группой Шмидта и $\pi(G) = \{p, q\}$, где $p \neq q$.

Допустим вначале, что группа G имеет нормальную силовскую подгруппу P, т. е. $G = [P]Q$. Предположим, что группа G имеет пару подгрупп Шмидта вида $A = [P]Q_1$ и $B = [P_1]Q$ ($P_1 < P$, $Q_1 < Q$). Понятно, что A и B являются максимальными подгруппами в группе G. Следовательно, любые две 2-максимальные подгруппы группы A перестановочны, поэтому по лемме 2.3 P — абелева группа. Тогда по лемме 2.1(6) P является минимальной нормальной подгруппой в группе A, а следовательно, и в самой группе G. С другой стороны, любые две 2-максимальные подгруппы группы B также перестановочны, поэтому аналогично можно показать, что P_1 является минимальной нормальной подгруппой в группе G. Это противоречит тому, что P — минимальная нормальная подгруппа группы G. Таким образом, все подгруппы Шмидта группы G содержат либо силовскую p-подгруппу из G, либо силовскую q-подгруппу из G.

Если все подгруппы Шмидта группы G содержат силовскую p-подгруппу из G, то $G = [P]Q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G.

Допустим, что Q — абелева группа. Если при этом группа Q циклическая, то G является группой типа II(1).

Предположим теперь, что Q — нециклическая группа. Пусть H — подгруппа Шмидта группы G. Тогда $|G : H| = q$ и $H = [P]Q_1$, где Q_1 — циклическая максимальная подгруппа в Q. По основной теореме о конечных абелевых группах $Q = Q_1 \times C_q$, где $|C_q| = q$. Пусть Q_2 — максимальная подгруппа в Q_1. Тогда подгруппа PQ_2C_q является максимальной в группе G. Понятно, что эта подгруппа не является группой Шмидта, следовательно, она нильпотентна. Это влечет $[P, C_q] = 1$, поэтому G является группой типа II(2).

Если предположить, что максимальная подгруппа Q_2 группы Q_1 единична, то подгруппа PC_q является максимальной в группе G. Если при этом подгруппа

PC_q нильпотентна, то G снова является группой типа II(2). Если же PC_q — группа Шмидта, то G — группа типа II(3).

Пусть теперь Q — неабелева группа и $|Q| = q^\beta$ ($\beta \in \mathbb{N}$). Если $q = 2$ и $\beta = 3$, то по [20, V, теорема 4.4] Q изоморфна либо группе кватернионов, либо диэдральной группе. В последнем случае $Q = [\langle a \rangle]\langle b \rangle$, где $|a| = 2^2$, $|b| = 2$ и $a^b = a^{-1}$. Тогда Q имеет точно три максимальные подгруппы: $\langle a \rangle$, $\langle a^2 \rangle\ \langle b \rangle$ и $\langle a^2 \rangle\ \langle ab \rangle$, поэтому подгруппы вида $\langle a^2 \rangle$, $\langle b \rangle$ и $\langle ab \rangle$ являются 2-максимальными подгруппами в Q. Так как P — минимальная нормальная подгруппа группы G, то Q является максимальной подгруппой в G. Тогда по условию $\langle ab \rangle\langle b \rangle = \langle b \rangle\langle ab \rangle$ и поэтому $ab = ba$. Таким образом, $a^b = a = a^{-1}$, тем самым $a^2 = 1$; противоречие. Следовательно, Q изоморфна группе кватернионов порядка 8. Из $q = 2$ и леммы 2.1(5) следует $|P| = p$, так что G является группой типа II(4).

Если теперь $q = 2$ и $\beta > 3$ либо q — нечетное простое, то ввиду [20, V, теорема 4.4] Q изоморфна одной из групп: $M_\beta(q), D_\beta, Q_\beta$ или S_β (см. [20, с. 190–191]). Если Q изоморфна одной из групп D_β, Q_β или S_β, то по [20, V, теорема 4.3] фактор-группа $Q/Z(Q)$ изоморфна $D_{\beta-1}$. В этом случае фактор-группа $Q/Z(Q)$ имеет точно две максимальные нециклические подгруппы. Следовательно, группа Q имеет по крайней мере две нециклические 2-максимальные подгруппы, поэтому в группе Q существует по крайней мере две нециклические максимальные подгруппы. Это означает, что в группе G существуют максимальные подгруппы M_1 и M_2, которые содержат P и не являются группами Шмидта. Тогда M_1 и M_2 являются нильпотентными нормальными подгруппами в G, поэтому группа $G = M_1M_2$ нильпотентна; противоречие. Следовательно, группа Q не может быть изоморфна одной из групп: D_β, Q_β или S_β.

Таким образом, группа Q изоморфна

$$M_\beta(q) = \langle a, b \mid a^{q^{\beta-1}} = b^q = 1, a^b = a^{1+q^{\beta-2}} \rangle$$

(см. [20, с. 190]). В этом случае группа G имеет вид $G = [[P]Q_1]C_q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G, $Q_1 = \langle a \rangle$, $|a| = q^{\beta-1}$, $C_q = \langle b \rangle, |b| = q$, PQ_1 — группа Шмидта и $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$. Рассмотрим теперь максимальную подгруппу PQ_2C_q группы G, где Q_2 — максимальная подгруппа в Q_1. Понятно, что $P \times Q_2C_q$ — нильпотентная группа и поэтому $[P, C_q] = 1$.

Пусть $\mathscr{C}$ — множество всех подгрупп группы G, изоморфных подгруппе C_q. Предположим, что для некоторой подгруппы C_1 из $\mathscr{C}$ выполняется $[P, C_1] \neq 1$. Это влечет, что подгруппа PC_1 является группой Шмидта. Тогда PC_1 — максимальная подгруппа в G и поэтому $|Q| = q^2$, что невозможно. Следовательно, G — группа типа II(5).

Предположим теперь, что любая подгруппа Шмидта группы G содержит некоторую силовскую q-подгруппу из G. Это означает, что $Q = \langle a \rangle$ — циклическая группа и $P\langle a^q \rangle$ — максимальная подгруппа группы G с индексом, равным q. Так как подгруппа $P\langle a^q \rangle$ не является группой Шмидта, она нильпотентна. Следовательно, $P\langle a^q \rangle = P \times \langle a^q \rangle = F(G)$, тем самым $\langle a^q \rangle$ содержится в $Z(G)$. При этом либо каждая максимальная подгруппа группы G, содержащая силовскую q-подгруппу группы G, является группой Шмидта, либо G имеет нильпотентную максимальную подгруппу, содержащую силовскую q-подгруппу группы G.

Предположим, что верен первый случай. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G вида P_1Q^x, где $P_1 < P$. Так как M — группа Шмидта, по леммам 2.3 и 2.1(6) P_1 является минимальной нормальной подгруппой в M.

Допустим вначале, что P — неабелева группа. Тогда $\Phi(P) \neq 1$. Допустим, что $P_1 \neq \Phi(P)$. Тогда $\Phi(P)P_1Q$ является подгруппой группы G. Так как P_1Q — максимальная подгруппа группы G, то либо $\Phi(P)P_1Q = P_1Q$, либо $\Phi(P)P_1Q = G$. Если $\Phi(P)P_1Q = P_1Q$, то $\Phi(P) \leq P_1$ и поэтому $\Phi(P) = P_1$, так как P_1 — минимальная нормальная подгруппа в P_1Q, что противоречит нашему допущению. Следовательно, $\Phi(P)P_1Q = G$. Тогда $\Phi(P)P_1 = P$ и поэтому $P_1 = P$, что невозможно. Таким образом, $P_1 = \Phi(P)$. Из того, что $P_1 = \Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в M, вытекает, что $P_1 = \Phi(P) = P' = Z(P)$ — минимальная нормальная подгруппа и в самой группе G.

Так как $\Phi(P) \subseteq \Phi(G)$ и группа G не является нильпотентной, то $G/\Phi(P)$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Поскольку каждая максимальная подгруппа группы G, содержащая силовскую q-подгруппу группы G, является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, максимальная подгруппа группы Q совпадает с $Z(G)$. Как и при доказательстве случая I(b), можно показать, что любые две 2-максимальные подгруппы из P перестановочны. Следовательно, G является группой типа II(6).

Теперь предположим, что P — абелева группа. Допустим, что $\Phi(P) \neq 1$. В этом случае $P_1 = \Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой группы G и $G/\Phi(P)$ является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Следовательно, G снова является группой типа II(6).

Допустим теперь, что $\Phi(P) = 1$. В этом случае P является элементарной p-группой. Рассмотрим максимальную подгруппу $M = P_1Q^x$ группы G. Так как M — группа Шмидта и P — абелева группа, по лемме 2.1(6) P_1 является минимальной нормальной подгруппой в M, а следовательно, и в самой группе G.

Рассмотрим теперь максимальную подгруппу T группы G такую, что $G = [P_1]T$. Поскольку $T = [P_2]Q$ — группа Шмидта (ввиду рассматриваемого случая) и P — абелева группа, по лемме 2.1(6) P_2 является минимальной нормальной подгруппой в T, а следовательно, и в самой группе G. Так как $P_1 \cap P_2 = 1$ и P_1, P_2 — минимальные нормальные подгруппы в G, группа G является подпрямым произведением двух различных изоморфных групп Шмидта. Таким образом, G — группа типа II(7).

Теперь предположим, что G имеет нильпотентную максимальную подгруппу M, содержащую подгруппу Q. Тогда группа M имеет вид $P_1 \times Q$, где $P_1 < P$. Как и при доказательстве случая I(b), можно показать, что $|P_1| = p$.

Пусть H — подгруппа Шмидта группы G, содержащая Q. Тогда H — максимальная подгруппа в G и поэтому $HM = G$. Пусть H_p — силовская p-подгруппа группы H. Заметим, что подгруппа P_1 не содержится в H_p, так как P_1Q — максимальная подгруппа в G. Тогда $H_p \cap P_1 = 1$ в силу $|P_1| = p$, поэтому $H \cap M = Q$. Отсюда

$$|G : H| = \frac{|M||H|}{|M \cap H||H|} = \frac{|M|}{|M \cap H|} = \frac{|M|}{|Q|} = \frac{|P_1Q|}{|Q|} = |P_1| = p,$$

значит, $|P : H_p| = p$. Таким образом, H_p — максимальная подгруппа в P. Так как H — группа Шмидта, подгруппа H_p нормальна в группе H и поэтому подгруппа H_p нормальна в G. По леммам 2.3 и 2.1(6) H_p является минимальной нормальной подгруппой в H, а следовательно, и в самой группе G.

Так как подгруппы P_1Q и H_pQ максимальны в группе G, то

$$\Phi(G) \leq P_1Q \cap H_pQ = (P_1 \cap H_pQ)Q.$$

Покажем, что $P_1 \cap H_pQ = 1$. Если $P_1 \cap H_pQ \neq 1$, то $P_1 < H_pQ$, ибо $|P_1| = p$. Но тогда $P_1Q < H_pQ$, что невозможно, так как P_1Q — максимальная подгруппа в G. Следовательно, $P_1 \cap H_pQ = 1$, поэтому $\Phi(G) \leq Q$. Поскольку $P' \subseteq \Phi(P) \subseteq \Phi(G)$, то $P' = 1$. Таким образом, P — абелева группа. Так как максимальная подгруппа P_1Q группы G нильпотентна, то $[P_1, Q] = 1$.

Следовательно, G является группой типа II(8).

Предположим теперь, что группа G не имеет нормальных силовских подгрупп. Пусть H — нормальная подгруппа группы G с индексом, равным p. Тогда Q является подгруппой в H. Допустим, что подгруппа Q нормальна в группе H. Тогда подгруппа Q нормальна в группе G, так как подгруппа H нормальна в G, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $H = [P_1]Q$ является подгруппой Шмидта группы G, поэтому Q — циклическая группа. По леммам 2.3 и 2.1(6) P_1 является минимальной нормальной подгруппой в H, тем самым и в самой группе G.

Предположим, что $N_G(Q)$ — нильпотентная подгруппа группы G. Тогда $Q \leq Z(N_G(Q))$, так как Q — абелева группа. По [21, теорема 14.3.1] группа G обладает в этом случае нормальным q-дополнением, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $N_G(Q) = [Q]\langle b \rangle$ является подгруппой Шмидта в группе G. Так как Q — циклическая группа, то $|Q| = q$.

Подгруппы H и $N_G(Q)$ максимальны в группе G, поэтому $G = HN_G(Q)$. Следовательно, $P_1\langle b \rangle$ — силовская p-подгруппа группы G. По выбору подгруппы H имеем $|G : H| = p$, тем самым $P_1 \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$. Так как $[Q]\langle b \rangle$ — группа Шмидта, подгруппа $Q\langle b^p \rangle$ нильпотентна и поэтому $\langle b^p \rangle \leq C_{P_1}(Q)$. С другой стороны, $[P_1]Q$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, значит, по лемме 2.1(6) $C_{P_1}(Q) = 1$. Следовательно, $\langle b^p \rangle = 1$, так что $|\langle b \rangle| = p$.

Итак, $P_1\langle b \rangle = [P_1]\langle b \rangle$ — максимальная подгруппа группы G, и P_1 — элементарная группа. Ввиду условия любые две 2-максимальные подгруппы из $P_1\langle b \rangle$ перестановочны, и по лемме 2.7 $P_1\langle b \rangle$ — абелева группа.

Следовательно, G является группой типа II(9).

III. Наконец, рассмотрим случай, когда $\pi(G) = \{p, q, r\}$, где p, q, r — различные простые делители $|G|$.

Обозначим через M некоторую нормальную подгруппу группы G такую, что $|G : M| = q$. Тогда группа M либо нильпотентна, либо является группой Шмидта.

Предположим, что группа M нильпотентна. Тогда $G = [P \times R]Q$ и $M = P \times R \times Q_1$, где Q_1 — некоторая максимальная подгруппа в Q. Подгруппы PQ и RQ обе не могут быть нильпотентными, и поэтому либо PQ и RQ — группы Шмидта, либо одна из этих подгрупп, например RQ, нильпотентна, а вторая является группой Шмидта.

Предположим, что имеет место первый случай. Тогда подгруппы PQ и RQ являются максимальными в G. Следовательно, по условию любые две 2-максимальные подгруппы из PQ перестановочны между собой и любые две 2-максимальные подгруппы из RQ перестановочны между собой. По леммам 2.3 и 2.1(6) P и R являются минимальными нормальными подгруппами группы G. Кроме того, по лемме 2.1(1),(4) $Q = \langle a \rangle$ является циклической группой и $\langle a^q \rangle$ — подгруппа в $Z(\langle PQ, RQ \rangle) = Z(G)$.

Теперь предположим, что подгруппа $PQ = P\langle a \rangle$ является группой Шмидта, а подгруппа RQ нильпотентна. Отсюда подгруппа PQ максимальна в G, поэтому $G = PQ \times R$, где $|R| = r$. По условию любые две 2-максимальные подгруппы из PQ перестановочны, тем самым по леммам 2.3 и 2.1(6) P является минимальной нормальной подгруппой в G. Из того, что $\langle a^q\rangle$ является характеристической подгруппой в Q и Q нормальна в RQ, следует, что подгруппа $\langle a^q\rangle$ нормальна в RQ. Так как по лемме 2.1(4) $\langle a^q\rangle$ нормальна и в группе PQ, подгруппа $\langle a^q\rangle$ нормальна в G.

Таким образом, G является группой типа III(i).

Предположим, что M является группой Шмидта и G не является группой типа III(i). Не ограничивая общности, можно допустить, что $M = [R]P$, где $P = \langle b\rangle$ — циклическая группа. Тогда $G = [M]Q = [[R]P]Q$, где Q — группа простого порядка q и Q не является нормальной подгруппой в G. Действительно, если Q — нормальная в G подгруппа, то $G = M \times Q$ снова группа типа III(i).

Так как $M = [R]P$ является группой Шмидта, в которой любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны, по леммам 2.3 и 2.1(6) R — минимальная нормальная подгруппа группы M, а следовательно, и группы G. Предположим, что RQ — нильпотентная группа. Если при этом PQ также является нильпотентной группой, то подгруппа Q нормальна в G, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $PQ = [P]Q$ является группой Шмидта. Так как при этом $|P| = p$ ввиду цикличности группы P, то $C_G(R) = RQ$ и поэтому подгруппа Q нормальна в G, что вновь противоречит рассматриваемому случаю.

Таким образом, $RQ = [R]Q$ является группой Шмидта. Предположим, что подгруппа $PQ = [P]Q$ также является группой Шмидта. Так как при этом P — циклическая группа, то $|P| = p$. Но тогда $p - 1 = q\alpha$ для некоторого натурального α по лемме 2.1(5). Аналогично из того, что RQ и RP являются группами Шмидта, вытекает, что $r^n - 1 = q\beta$ и $r^n - 1 = p\gamma$ для некоторых натуральных n, β и γ. Значит, $p = q\beta\gamma^{-1} = 1 + q\alpha$, что невозможно. Следовательно, PQ — нильпотентная группа, поэтому $G = [R](P \times Q)$, причем из максимальности в G подгруппы RQ вытекает, что $P = \langle b\rangle$ является группой простого порядка p. Это влечет $R = F(G)$.

В этом случае G является группой типа III(ii).

Достаточность. Предположим, что G — группа типа II(2). Тогда группа G имеет в точности два класса максимальных нильпотентных подгрупп, представителями которых являются подгруппы Q_1C_q и PQ_2C_q (Q_2 — максимальная подгруппа в Q_1), и одну максимальную подгруппу Шмидта PQ_1. В этом случае представителями 3-максимальных подгрупп группы G являются подгруппы $Q_2, PQ_3, P_1Q_2, Q_3C_q, PQ_4C_q, P_1Q_3C_q$ и $P_2Q_2C_q$, где Q_3 — максимальная подгруппа в Q_2, Q_4 — максимальная подгруппа в Q_3, P_1 — некоторая максимальная подгруппа в P и P_2 — некоторая 2-максимальная подгруппа в P. Ввиду условия подгруппы Q_2, PQ_3, Q_3C_q и PQ_4C_q нормальны в G. Поскольку P — абелева группа, каждая ее подгруппа нормальна в ней. Следовательно, любые две 3-максимальные подгруппы группы G перестановочны.

Предположим, что G — группа типа II(5). Покажем, что любые две 3-максимальные подгруппы T и E группы G перестановочны.

Рассмотрим вначале случай, когда $T \cap Q_1^x \neq 1$ и $E \cap Q_1^x \neq 1$ для всех $x \in G$. Тогда Q_1 имеет собственную подгруппу Z такую, что $Z \leq T \cap E$ и $|Z| = q$. Так как PQ_1 — группа Шмидта, то $Z \leq C_G(P)$ и поэтому Z нормальна в G. Тогда $G/Z = [PZ/Z](Q_1C_q/Z)$, где $|Q_1C_q/Z| = q^\alpha$, $\alpha \geq 2$ при нечетном q и $\alpha > 2$ при $q = 2$. По [20, V, теорема 4.3] $Z = Q'$ и поэтому Q_1C_q/Z — абелева группа типа $(q^{\alpha-1}, q)$. Согласно случаю II(2) $(T/Z)(E/Z) = (E/Z)(T/Z)$ и тем самым

$TE = ET$.

Допустим теперь, что хотя бы одна из подгрупп T или E, например T, обладает свойством $T \cap Q_1^x = 1$ для всех $x \in G$. Тогда по лемме 2.9 $|Q_1|$ делит $|G : T|$. Так как группа G q-нильпотентна, по лемме 2.8 либо $|Q_1| = q^3$, либо $|Q_1| = q^2$.

Покажем, что если $|\langle x \rangle| = q^2$ и $\langle x \rangle \subseteq Q$, то $\langle x \rangle$ не содержится в T для любой 3-максимальной подгруппы T группы G. Допустим противное, т. е. что $\langle x \rangle \subseteq T$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G такая, что T является 2-максимальной подгруппой в M. Если p делит $|G : M|$, то $G = [P]M$, где $|M| = |Q| = q^3$, и поэтому $\langle x \rangle$ не содержится в T. Если q делит $|G : M|$, то $|G : M| = q$ ввиду q-нильпотентности группы G. Тогда $M = [P]\langle x \rangle$, так как $\langle x \rangle$ содержится в M, и поэтому M является группой Шмидта. Поскольку $\langle x \rangle \subseteq T \subseteq M$, то $T = T_p\langle x \rangle$ — 2-максимальная подгруппа в M, где T_p — силовская p-подгруппа в T. Но 2-максимальными подгруппами в группе Шмидта M являются лишь подгруппы вида $P, \langle x \rangle^q$ и $P_1\langle x \rangle^q$, где P_1 — некоторая максимальная подгруппа в P. Полученное противоречие показывает, что $\langle x \rangle$ не содержится в T для любой 3-максимальной подгруппы T группы G.

Аналогично можно показать, что если $|\langle x \rangle| = q^3$ и $\langle x \rangle \subseteq Q$, то $\langle x \rangle$ не содержится в T для любой 3-максимальной подгруппы T группы G.

Пусть $T = T_pT_q$ и $E = E_pE_q$, где T_p, E_p, T_q и E_q — силовские p-подгруппы и q-подгруппы групп T и E соответственно. Так как T_q и E_q не содержат Q_1, как показано выше, то $E_q \leq [Q_2]Z_1$, где Q_2 — максимальная подгруппа в Q_1 и $Z_1 \simeq C_q$. Аналогично $T_q \leq [Q_2]Z_2$, где $Z_2 \simeq C_q$. Понятно, что каждая подгруппа из Q_1 нормальна в G. Кроме того, ввиду [20, V, теорема 4.3] $\Omega_1(Q)$ — абелева группа. Так как $Z_1 \leq \Omega_1(Q)$ и $Z_2 \leq \Omega_1(Q)$, то $Z_1Z_2 = Z_2Z_1$. Тогда ввиду абелевости группы P

$$TE = T_pT_qE_pE_q = T_pE_pT_qE_q = E_pE_qT_pT_q = ET.$$

Следовательно, в группе G любые две ее 3-максимальные подгруппы перестановочны.

Аналогично проверяются все остальные случаи. Теорема доказана.

Следствие 3.2. *Если в группе G любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны и $|\pi(G)| > 3$, то группа G нильпотентна.*

Заметим, например, что в группе Шмидта $G = [P]Q$, где P изоморфна группе кватернионов порядка 8 и $|Q| = 3^2$, любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны, так как G является группой типа I(b) в теореме 3.1. Однако не каждая 3-максимальная подгруппа этой группы является нормальной в ней. В связи с этим естественным является вопрос об описании ненильпотентных групп, в которых все 3-максимальные подгруппы нормальны. Основываясь на теореме 3.1, мы доказали следующую теорему, дающую решение такой задачи.

Теорема 3.3. *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда каждая 3-максимальная подгруппа группы G является нормальной в G в том и только в том случае, когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r — простые числа и $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G изоморфна $SL(2, 3)$, либо G является сверхразрешимой группой одного из следующих типов:*

(1) *$G = [P]Q$, где $|P| = p$, $|Q| = q^\beta$ $(\beta \geq 3)$; группа Q либо абелева, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе $M_\beta(q)$ $(\beta > 4)$; всякий элемент из Q, порядок которого меньше $q^{\beta-1}$, принадлежит $C_G(P)$;*

(2) *$G = [P]Q$, где P — циклическая группа порядка p^2, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$;*

(3) *$G = [P_1 \times P_2]Q$, где $|P_1| = |P_2| = p$, P_1Q — группа Шмидта и группа P_2Q либо нильпотентна, либо также является группой Шмидта;*

(4) *$G = ([P]Q)R$, где P и R — минимальные нормальные подгруппы группы G, $|P| = p$, $|R| = r$, Q — циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$.*

Следствие 3.4 [1]. *Предположим, что каждая третья максимальная подгруппа группы G нормальна в G. Тогда коммутант G' группы G является нильпотентным и порядок каждого главного фактора группы G не делится на p^3 для всех простых p.*

Понятно, что группы, в которых любые две максимальные подгруппы перестановочны, нильпотентны. Лемма 2.3 показывает, что если в группе G любые две ее 2-максимальные подгруппы перестановочны, то группа G либо нильпотентна, либо бипримарна, т. е. порядок этой группы делится в точности на два простых числа. Теорема 3.1 показывает, что если в группе G любые две ее 3-максимальные подгруппы перестановочны, то группа G либо нильпотентна, либо бипримарна, либо порядок этой группы делится в точности на три простых числа. В связи с этими наблюдениями вполне естественным кажется следующий открытый

Вопрос 3.5. *Предположим, что G — ненильпотентная группа и любые две ее n-максимальные подгруппы перестановочны ($n > 3$). Верно ли тогда, что $|\pi(G)| \leq n$?*

4. Примеры

Классы групп, описанные в теореме 3.1, а следовательно, и в теореме 3.3, попарно не пересекаются. Легко построить примеры, показывающие, что все классы групп, возникающие в этих теоремах, непусты.

Пример 4.1. Пусть P — нециклическая группа порядка 4, Q — циклическая группа порядка 9 и V — максимальная подгруппа из Q. Существует гомоморфизм f из Q в $\mathrm{Aut}(P)$ такой, что $\mathrm{Ker}\, f = V$. Следовательно, мы можем рассмотреть группу $G = [P]Q$, где $C_Q(P) = V$. Ясно, что G является группой Шмидта типа I(a) в теореме 3.1.

Пример 4.2. Группа $SL(2, 3)$ является группой Шмидта типа I(b) в теореме 3.1. Действительно, группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(Q_8)$ группы кватернионов Q_8 порядка 8 имеет элемент α порядка 3. Пусть $G = [Q_8]\langle\alpha\rangle$ — группа, изоморфная $SL(2, 3)$. Покажем, что G является группой Шмидта. Пусть Z — единственная подгруппа порядка 2 группы Q_8. Тогда $Z \triangleleft G$ и поэтому $C_G(Z) = G$. Понятно, что Q_8/Z — главный фактор группы G и $Z \leq \Phi(G)$. Также понятно, что $Z\langle\alpha\rangle$ — максимальная подгруппа группы G и каждая максимальная подгруппа M группы G с $|G : M| = 2^\alpha$ является сопряженной к подгруппе $Z\langle\alpha\rangle$. Таким образом, G — группа Шмидта.

Пример 4.3. Пусть P — нециклическая группа порядка 4, Q — циклическая группа порядка 3^3. Тогда согласно примеру 4.1 группа $G = [P]Q_1$, где Q_1 — максимальная подгруппа в Q, является группой Шмидта. Таким образом, $G = [P]Q$ является группой типа II(1) в теореме 3.1.

Пример 4.4. Прямое произведение группы Шмидта $G = [P]Q$, где P — нециклическая группа порядка 4 и Q — циклическая группа порядка 9, и группы Z_3 порядка 3 является группой типа II(2) в теореме 3.1.

Пример 4.5. Пусть Z_3 — группа порядка 3 и Q_8 — группа кватернионов порядка 8. Тогда $\mathrm{Aut}(Z_3)$ имеет подгруппу порядка 2 и поэтому существует гомоморфизм f из Q_8 в $\mathrm{Aut}(Z_3)$ такой, что $\mathrm{Ker}\, f = V$, где V — подгруппа из Q_8 с $|Q_8 : V| = 2$. Следовательно, мы можем рассмотреть группу $G = [Z_3]Q_8$, которая является группой типа II(4) в теореме 3.1.

Пример 4.6. Пусть $Q = \langle x, y \mid x^9 = y^3 = 1,\ x^y = x^4\rangle$ и Z_7 — группа порядка 7. Тогда $\Omega_1(Q) = \Omega$ является абелевой группой порядка 9. Так как фактор-группа Q/Ω изоморфна подгруппе Z_3 порядка 3 группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(Z_7)$, мы можем построить $G = [Z_7]Q$. Понятно, что $\langle y\rangle$ является 3-максимальной подгруппой в G и $\langle y\rangle$ не нормальна в G. Несложно проверить, что все отличные от Ω максимальные подгруппы группы Q являются циклическими и поэтому G — группа типа II(5) в теореме 3.1.

Пример 4.7. Пусть теперь P — циклическая группа порядка 3^2. Тогда по [20, V, лемма 4.1] $|\mathrm{Aut}(P)| = 3\cdot 2$. Пусть Q — силовская 2-подгруппа из $\mathrm{Aut}(P)$. Мы можем рассмотреть группу $G = [P]Q$, где $C_Q(P) = 1$. Если $C_Q(\Phi(P)) = Q$, то по [20, V, теорема 2.4] $Q = 1$; противоречие. Следовательно, $\Phi(P)Q$ — максимальная подгруппа Шмидта в G, и каждая максимальная подгруппа M из G с $|G : M| = 3$ сопряжена с $\Phi(P)Q$. Легко заметить, что в группе G каждая 3-максимальная подгруппа нормальна. Таким образом, группа G является примером группы типа II(6) в теореме 3.1.

Пример 4.8. Пусть $M = [R]Q$, где R — группа порядка 5 и Q — силовская 2-подгруппа из $\mathrm{Aut}(R)$. Пусть P — группа порядка 7. Тогда $\mathrm{Aut}(P)$ имеет подгруппу порядка 2 и поэтому существует гомоморфизм f из M в $\mathrm{Aut}(P)$ с $\mathrm{Ker}\, f = V$, где V — подгруппа группы M такая, что $|M : V| = 2$. Следовательно, мы можем рассмотреть группу $G = [P]M$, где $C_M(P) = V$. Ясно, что G является группой типа III(i) в теореме 3.1.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 409–434.
2. *Janko Z.* Finite groups with invariant fourth maximal subgroups // Math. Z. 1963. Bd 82. S. 82–89.
3. *Suzuki M.* The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8, N 4. P. 686–695.
4. *Janko Z.* Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen // Math. Z. 1962. Bd 79. S. 422–424.
5. *Белоногов В. А.* Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами // Мат. заметки. 1968. Т. 3, № 1. С. 21–32.
6. *Семенчук В. Н.* Разрешимые группы со вторыми максимальными сверхразрешимыми подгруппами // Вопросы алгебры. 1985. № 1. С. 86–96.
7. *Gagen T. M., Janko Z.* Finite simple groups with nilpotent third maximal subgroups // J. Austral. Math. Soc. 1966. V. 6, N 4. P. 466–469.
8. *Agrawal R. K.* Generalized center and hypercenter of a finite group // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 54, N 1. P. 13–21.
9. *Поляков Л. Я.* Конечные группы с перестановочными подгруппами // Конечные группы. Минск: Наука и техника. 1966. С. 75–88.

10. *Guo X. Y., Shum K. P.* Cover-avoidance properties and the structure of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 181. P. 297–308.
11. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* X-semipermutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 31–41.
12. *Li Baojun, Skiba A. N.* New characterizations of finite supersoluble groups // Sci. China. Ser. A: Mathematics. 2008. V. 50, N 1. P. 827–841.
13. *Guo W., Legchekova H. V., Skiba A. N.* The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups // Comm. Algebra. 2009. V. 37, N 7. P. 2446–2456.
14. *Го Вэньбинь, Легчекова Е. В., Скиба А. Н.* Конечные группы, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 3. С. 350–359.
15. *Skiba A. N.* Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. № 3. С. 12–31.
16. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
17. *Kurzweil H., Stellmacher B.* The theory of finite groups: an introduction. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2004.
18. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
19. *Луценко Ю. В., Скиба А. Н.* О группах с перестановочными 3-максимальными подгруппами // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2008. № 2. С. 112–116.
20. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Chelsea, 1980.
21. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Статья поступила 10 сентября 2008 г.

Го Вэньбинь (Wenbin Guo)
Department of Mathematics, Xuzhou Normal University,
221009 Xuzhou, P.R. China
wbguo@xznu.edu.cn

Луценко Юлия Владимировна, Скиба Александр Николаевич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, математический факультет,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
lucenko_av@mail.ru, skiba@gsu.by