Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 512.64

ОЦЕНКИ НОРМ МАТРИЦ, ОБРАТНЫХ К МАТРИЦАМ МОНОТОННОГО ВИДА И ВПОЛНЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМ МАТРИЦАМ

Ю. С. Волков, В. Л. Мирошниченко

Аннотация. Приводятся оценки max-норм обратных матриц для матриц монотонного вида и вполне неотрицательных матриц.

Ключевые слова: матрица монотонного вида, M-матрица, вполне неотрицательная матрица, диагональное преобладание, обратная матрица, норма матрицы.

Во многих задачах численного анализа возникает необходимость оценки некоторой нормы матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$, обратной к заданной невырожденной матрице $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Обычно не вызывает труда вычислить (или оценить) норму самой матрицы $\boldsymbol{A}$. Оценить же норму обратной матрицы $\boldsymbol{A}^{-1} = (a'_{ij})$ — гораздо более трудная задача для любой нормы, если сама обратная матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$ не известна явно.

Довольно простой способ оценки max-нормы (или бесконечной нормы) обратной матрицы известен для матриц с диагональным преобладанием. Этот способ предложен в работе [1] в связи с необходимостью получения оценок интерполяции кубическими сплайнами. В дальнейшем появилось большое количество работ, улучшающих и уточняющих оценку работы [1] для разных случаев. Особенно много работ в этом направлении посвящено M-матрицам.

В настоящей статье мы рассматриваем более широкий класс матриц — матриц монотонного вида — и некоторые результаты по оценке норм матриц, обратных к M-матрицам, переносим на этот более широкий класс. Подобные оценки устанавливаем и для вполне неотрицательных матриц.

Обозначим через

$$R_i(\boldsymbol{A}) = |a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

величину диагонального преобладания в каждой строке, а также положим

$$R_*(\boldsymbol{A}) = \min_{1\le i\le n} R_i(\boldsymbol{A}), \quad R^*(\boldsymbol{A}) = \max_{1\le i\le n} R_i(\boldsymbol{A}).$$

Естественно, мы считаем $\boldsymbol{A}$ *матрицей с диагональным преобладанием*, если $R_*(\boldsymbol{A}) \ge 0$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Отделения математических наук РАН (код проекта 2009–3.8), интеграционных проектов СО РАН (код проекта 2009–81) и СО РАН совместно с УрО РАН (код проекта 2009–14).

Теорема 1 [1]. *Для матрицы $\boldsymbol{A}$ с диагональным преобладанием справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{R_*(\boldsymbol{A})}. \tag{2}$$

Несмотря на то, что имеется много работ, в которых улучшается оценка (2), тем не менее в ней может достигаться равенство. А именно, если элементы главной диагонали матрицы положительны, все остальные неположительны и величина диагонального преобладания во всех строках одинакова, то величина $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ находится точно.

Теорема 2 [2]. *Для матрицы $\boldsymbol{A}$ с диагональным преобладанием, положительными диагональными и неположительными внедиагональными элементами имеет место равенство*

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 1/R,$$

если $R_*(\boldsymbol{A}) = R^*(\boldsymbol{A}) = R$.

Отметим, что матрицы, удовлетворяющие условиям теоремы 2, относятся к классу так называемых *M-матриц*. В книге [3] можно найти 50 эквивалентных определений матриц этого класса, мы приведем одно из них: матрица $\boldsymbol{A}$ называется *M-матрицей*, если ее главная диагональ состоит из положительных элементов, все остальные неположительны и она приводится к матрице с диагональным преобладанием (возможно, нестрогим) путем умножения на некоторую диагональную матрицу с положительными элементами. Одной из привлекательных сторон класса M-матриц является то, что их обратные состоят только из неотрицательных элементов. M-матрицы достаточно часто возникают во многих разделах математики и приложениях и интенсивно изучаются.

Определим величины

$$r_i(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

$$r_*(\boldsymbol{A}) = \min_{1\le i\le n} r_i(\boldsymbol{A}), \quad r^*(\boldsymbol{A}) = \max_{1\le i\le n} r_i(\boldsymbol{A}).$$

Ясно, что для M-матриц в теореме 2 величины, определенные соотношениями (1) и (3), одинаковы, т. е. $r_i(\boldsymbol{A}) = R_i(\boldsymbol{A})$, $i = 1, \dots, n$. Но для произвольной M-матрицы $\boldsymbol{A}$ диагонального преобладания может не быть и некоторые из величин $r_i(\boldsymbol{A})$ могут не быть положительными. Тем не менее оказывается, что можно получить оценку величины $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ и даже точное ее значение.

Теорема 3 [4]. *Пусть*

$$r_i(\boldsymbol{AG}) > 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{A}$ — M-матрица, $\boldsymbol{G} = \mathrm{diag}(g_1, \dots, g_n)$, $g_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Тогда справедливы оценки

$$\frac{1}{r^*(\boldsymbol{AG})}\|\boldsymbol{G}\|_\infty \le \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{r_*(\boldsymbol{AG})}\|\boldsymbol{G}\|_\infty. \tag{5}$$

Следствие. *В условиях теоремы 3 имеет место равенство*

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 1/r,$$

если $r^*(\boldsymbol{AG}) = r_*(\boldsymbol{AG}) = r$, $\|\boldsymbol{G}\|_\infty = 1$.

Отметим, что результат теоремы 3 и следствия совсем недавно был переоткрыт [5].

M-матрицы входят в класс матриц монотонного вида. Невырожденная матрица $\boldsymbol{A}$ есть *матрица монотонного вида*, если все элементы матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ неотрицательны [6]. Утверждения, аналогичные теоремам 2 и 3, справедливы и для всех матриц монотонного вида.

Теорема 4. *Пусть для матрицы $\boldsymbol{A}$ монотонного вида выполнены условия*

$$r_i(\boldsymbol{A}) > 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Тогда справедливы неравенства

$$\frac{1}{r^*(\boldsymbol{A})} \le \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{r_*(\boldsymbol{A})}. \tag{7}$$

Доказательство. Рассуждения будем проводить по схеме, использованной при доказательстве теоремы 2 (см. [2]). Матрица $\boldsymbol{A}^{-1} = (a'_{ij})$ удовлетворяет матричному равенству $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ (здесь и далее $\boldsymbol{I}$ — единичная матрица), а элементы ее i-й строки удовлетворяют системе

$$a'_{i1}a_{1k} + a'_{i2}a_{2k} + \ldots + a'_{in}a_{nk} = \delta_{ik}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Суммируя эти уравнения по индексу k, получаем

$$a'_{i1}\sum_{k=1}^n a_{1k} + a'_{i2}\sum_{k=1}^n a_{2k} + \ldots + a'_{in}\sum_{k=1}^n a_{nk} = 1.$$

Отсюда, учитывая (3), находим

$$a'_{i1}r_1(\boldsymbol{A}) + a'_{i2}r_2(\boldsymbol{A}) + \ldots + a'_{in}r_n(\boldsymbol{A}) = 1.$$

Так как все элементы матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ неотрицательны, в левой части данного равенства все слагаемые одного знака.

Пусть номер i_0 таков, что

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \sum_{j=1}^n a'_{i_0,j},$$

тогда

$$r_*(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \min_{1\le i\le n} r_i(\boldsymbol{A})\sum_{j=1}^n a'_{i_0,j} \le \sum_{j=1}^n a'_{i_0,j}r_j(A) = 1,$$
$$r^*(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} r_i(\boldsymbol{A})\sum_{j=1}^n a'_{i_0,j} \ge \sum_{j=1}^n a'_{i_0,j}r_j(\boldsymbol{A}) = 1,$$

что и доказывает (7).

Следствие. *В условиях теоремы 4 имеет место равенство*

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 1/r,$$

если $r^*(\boldsymbol{A}) = r_*(\boldsymbol{A}) = r$.

Ясно, что не для каждой матрицы монотонного вида будут выполнены условия (6). Однако на такие матрицы также можно распространить теорему 3.

Теорема 5. *Пусть для матрицы* $\boldsymbol{A}$ *монотонного вида выполнены условия* (4), *причем* $\boldsymbol{G} = \mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_n)$, $g_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда справедливы оценки* (5).

Доказательство. Каждое из равенств

$$a'_{i1}a_{1k} + a'_{i2}a_{2k} + \ldots + a'_{in}a_{nk} = \delta_{ik}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

связывающих элементы матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}^{-1}$, домножим на g_k и сложим. В итоге

$$a'_{i1}\sum_{k=1}^{n} a_{1k}g_k + a'_{i2}\sum_{k=1}^{n} a_{2k}g_k + \ldots + a'_{in}\sum_{k=1}^{n} a_{nk}g_k = g_i.$$

Поскольку каждая сумма в этом равенстве есть $r_i(\boldsymbol{AG})$, его можно переписать в виде

$$a'_{i1}r_1(\boldsymbol{AG}) + a'_{i2}r_2(\boldsymbol{AG}) + \ldots + a'_{in}r_n(\boldsymbol{AG}) = g_i.$$

Так как элементы матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ неотрицательны и выполнены условия (4), все слагаемые в левой части последнего равенства одного знака.

Пусть номера i_0 и i_1 таковы, что

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} a'_{i_0,j}, \quad \|\boldsymbol{G}\|_\infty = g_{i_1},$$

тогда

$$r_*(\boldsymbol{AG})\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = r_*(\boldsymbol{AG})\sum_{j=1}^{n} a'_{i_0,j} \le \sum_{j=1}^{n} a'_{i_0,j} r_j(\boldsymbol{AG}) = g_{i_0} \le \|\boldsymbol{G}\|_\infty,$$

$$r^*(\boldsymbol{AG})\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \ge r^*(\boldsymbol{AG})\sum_{j=1}^{n} a'_{i_1,j} \ge \sum_{j=1}^{n} a'_{i_1,j} r_j(\boldsymbol{AG}) = g_{i_1} = \|\boldsymbol{G}\|_\infty,$$

что и доказывает теорему 5.

Следствие. *В условиях теоремы* 5 *имеет место равенство*

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 1/r,$$

если $r^*(\boldsymbol{AG}) = r_*(\boldsymbol{AG}) = r$, $\|\boldsymbol{G}\|_\infty = 1$.

Заметим, что существование матрицы $\boldsymbol{G}$, для которой выполнены неравенства (4), следует непосредственно из определения M-матриц, для матриц же монотонного вида необходимо еще доказать существование такой диагональной матрицы $\boldsymbol{G}$, что будут выполнены условия теоремы 5, т. е. неравенства (4). Оказывается такая матрица $\boldsymbol{G}$ всегда существует.

Теорема 6. *Для любой невырожденной матрицы* $\boldsymbol{A}$ *монотонного вида существует диагональная матрица* $\boldsymbol{G} = \mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_n)$ *такая, что*

$$0 < g_i \le 1, \ i = 1, \ldots, n, \quad \|\boldsymbol{G}\|_\infty = 1, \tag{8}$$

$$r^*(\boldsymbol{AG}) = r_*(\boldsymbol{AG}) = r,$$

и имеет место равенство

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 1/r.$$

Доказательство. Покажем, что в качестве элементов матрицы $\boldsymbol{G}$ можно взять величины

$$g_i = r_i(\boldsymbol{A}^{-1})/r^*(\boldsymbol{A}^{-1}).$$

Ясно, что такой выбор всегда возможен, поскольку $\boldsymbol{A}$ невырожденна и в каждой строке матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ элементы только неотрицательные и не все равны 0. Кроме того, такой выбор обеспечивает выполнение условий (8). В самом деле,

$$r_i(\boldsymbol{AG}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j = \frac{1}{r^*(\boldsymbol{A}^{-1})} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{n} a'_{jk}$$
$$= \frac{1}{r^*(\boldsymbol{A}^{-1})} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a'_{jk} = \frac{1}{r^*(\boldsymbol{A}^{-1})} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ik} = \frac{1}{r^*(\boldsymbol{A}^{-1})}.$$

Теорема 6 доказана.

Изучим еще один класс матриц, имеющий связь с рассмотренными матрицами.

Матрица называется *вполне неотрицательной*, если все ее миноры любого порядка неотрицательны [7]. Матрица $\boldsymbol{A}$ называется *знакорегулярной*, если матрица $\boldsymbol{DAD}$ вполне неотрицательна, где $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(-1, +1, \dots, (-1)^n)$. Отметим, что в каждой строке знакорегулярной матрицы элементы знакочередуются.

Таким образом, вполне неотрицательные матрицы относятся к классу неотрицательных матриц, а знакокорегулярные являются матрицами монотонного вида. Кроме того, обратная к вполне неотрицательной матрице знакорегулярна, и вместе с тем обратная к знакорегулярной вполне неотрицательна.

Оказывается, свойство вполне неотрицательности матрицы позволяет значительно ослабить требование диагонального преобладания при оценке нормы обратной матрицы. Определим величины

$$\rho_i(\boldsymbol{A}) = a_{ii} + \sum_{j \neq i} (-1)^{i+j} a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n,$$
$$\rho_*(\boldsymbol{A}) = \min_{1 \le i \le n} \rho_i(\boldsymbol{A}), \quad \rho^*(\boldsymbol{A}) = \max_{1 \le i \le n} \rho_i(\boldsymbol{A}).$$

Теорема 7. *Пусть матрица $\boldsymbol{A}$ вполне неотрицательна и удовлетворяет условиям*

$$\rho_i(\boldsymbol{A}) > 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Тогда

$$\frac{1}{\rho^*(\boldsymbol{A})} \le \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{\rho_*(\boldsymbol{A})}. \tag{10}$$

Доказательство. Заметим, что умножение справа или слева любой матрицы $\boldsymbol{A}$ на диагональную $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(-1, +1, \dots, (-1)^n)$ со строго чередующимися элементами $+1$ и -1 не меняет нормы этой матрицы, т. е.

$$\|\boldsymbol{AD}\|_\infty = \|\boldsymbol{DA}\|_\infty = \|\boldsymbol{A}\|_\infty.$$

Применим это простое наблюдение к невырожденной вполне неотрицательной матрице $\boldsymbol{A}$. Имеем

$$\|\boldsymbol{DAD}\|_\infty = \|\boldsymbol{A}\|_\infty, \quad \|\boldsymbol{DA}^{-1}\boldsymbol{D}\|_\infty = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty. \tag{11}$$

Но такое преобразование (умножение слева и справа на $\boldsymbol{D}$) вполне неотрицательную матрицу превращает в знакорегулярную, а обратную к ней — во вполне неотрицательную, и обратно. Следовательно, если $\boldsymbol{A}$ вполне неотрицательная, то $\boldsymbol{DAD}$ — матрица монотонного вида. Применяя для последней теорему 3, с учетом того, что $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{-1}$, получаем требуемое неравенство (10). Теорема 7 доказана.

Следствие. *В условиях теоремы* 7 *имеет место равенство*

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 1/\rho,$$

если $\rho^*(\boldsymbol{A}) = \rho_*(\boldsymbol{A}) = \rho$.

Отметим, что оценка сверху для $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ найдена еще в работе [8]. Двусторонние оценки (10) получены в работе [9] непосредственно без обращения к матрицам монотонного вида. Подобно доказательству теоремы 7 — сведением к матрицам монотонного вида — доказываются следующие теоремы.

Теорема 8. *Пусть для вполне неотрицательной матрицы* $\boldsymbol{A}$ *справедливы неравенства*

$$\rho_i(\boldsymbol{AG}) > 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{G} = \mathrm{diag}(g_1, \dots, g_n)$, $g_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. *Тогда имеют место оценки*

$$\frac{1}{\rho^*(\boldsymbol{AG})}\|\boldsymbol{G}\|_\infty \le \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{\rho_*(\boldsymbol{AG})}\|\boldsymbol{G}\|_\infty.$$

Следствие. *В условиях теоремы* 8 *имеет место равенство*

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 1/\rho,$$

если $\rho^*(\boldsymbol{AG}) = \rho_*(\boldsymbol{AG}) = \rho$, $\|\boldsymbol{G}\|_\infty = 1$.

Теорема 9. *Для любой невырожденной вполне неотрицательной матрицы* $\boldsymbol{A}$ *существует матрица* $\boldsymbol{G} = \mathrm{diag}(g_1, \dots, g_n)$ *с условиями* (8) *такая, что* $\rho^*(\boldsymbol{AG}) = \rho_*(\boldsymbol{AG}) = \rho$, *и имеет место равенство*

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 1/\rho.$$

Теоремы 6 и 9 говорят о том, что для вполне неотрицательных матриц или матриц монотонного вида путем подбора диагональной матрицы $\boldsymbol{G}$ всегда можно не только получить оценку нормы обратной матрицы, но и установить ее точное значение. Однако для этого нужно уметь промасштабировать столбцы матрицы $\boldsymbol{A}$ подходящим образом, т. е. подобрать диагональную матрицу $\boldsymbol{G}$, но не всегда ясно, как это можно сделать

Отметим, что подбор матрицы $\boldsymbol{G}$ и проверка условий (12) являются достаточно трудной задачей. Так, например, в [8] при вычислениях была допущена ошибка, которая исправлена лишь в [10]. Необходимость оценки норм обратных матриц в [8–10] вызвана исследованием сходимости процессов интерполяции для сплайнов пятой степени, и только такой метод (подбора коэффициентов $g_1, g_2, \dots, g_n$) позволил установить сходимость второй и третьей производной сплайнов в задаче интерполяции сплайном пятой степени.

Замечание. Условия вполне неотрицательности матриц в теоремах 7, 8 и 9 и соответственно их следствиях можно ослабить — достаточно предполагать неотрицательность элементов матриц и миноров порядка $n-1$.

В заключение отметим, что если рассматриваемые в статье матрицы ленточные или циклические ленточные, то оценки для обратных матриц можно получить в любой из p-норм (см. [11, 12]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlberg J. H., Nilson E. N.* Convergence properties of the spline fit // J. SIAM. 1963. V. 11, N 1. P. 95–104.

2. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

3. *Berman A., Plemmons R. J.* Nonnegative matrices in mathematical sciences. Philadelphia: SIAM, 1994.

4. *Hu J., Liu X.* $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ and equidiagonal-dominance // Acta Math. Appl. Sinica. 1998. V. 14, N 4. P. 433–442.

5. *Morača N.* Bounds for norms of the matrix inverse and the smallest singular value // Linear Algebra Appl. 2008. V. 429, N 10. P. 2589–2601.

6. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.

7. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

8. *de Boor C.* On the convergence of odd-degree spline interpolation // J. Approximation Theory. 1968. V. 1, N 4. P. 452–463.

9. *Волков Ю. С.* Вполне неотрицательные матрицы в методах построения интерполяционных сплайнов нечетной степени // Мат. труды. 2004. Т. 7, № 2. С. 3–34.

10. *de Boor C.* On a max-norm bound for the least-squares spline approximant // Approximation and function spaces: Proc. Intern. Conf., Gdánsk, 1979. Amsterdam; New York: North-Holland, 1981. P. 163–175.

11. *Demko S.* Inverses of band matrices and local convergence of spline projections // SIAM J. Numer. Anal. 1977. V. 14, N 4. P. 616–619.

12. *Волков Ю. С.* Об оценке элементов матрицы, обратной к циклической ленточной матрице // Сиб. журн. вычисл. математики. 2003. Т. 6, № 3. С. 263–267.

Статья поступила 1 декабря 2008 г.

Волков Юрий Степанович, Мирошниченко Валерий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`volkov@math.nsc.ru`, `miroshn@math.nsc.ru`