Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 517.54

ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИСИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ГРАФ–ОРИЕНТИРОВАННЫХ ИТЕРИРОВАННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ (IFS)

В. В. Асеев

Аннотация. С помощью метода Тукиа представления квазисимметрической функции в виде квазисимметрического сита путем обобщения предложенной им модификации схемы Салема, найдено условие, достаточное для того, чтобы набор функций, осуществляющих структурную параметризацию граф-ориентированной функциональной системы специального вида (одномерного мультициппера), состоял из квазисимметрических функций. Указана асимптотически точная оценка коэффициента квазисимметричности этих функций через коэффициенты растяжения отображений, образующих заданный мультициппер, что дает существенно более общий способ построения квазисимметрических функций по сравнению с конструкцией Тукиа.

Ключевые слова: квазисимметрическая функция, квазисимметрическое сито, коэффициент квазисимметричности, итерированная функциональная система (IFS), граф-ориентированная IFS, мультициппер, жорданов мультициппер, структурная параметризация.

1. Введение. Свойство квазисимметричности вещественной функции $f : R^1 \to R^1$ возникло в теории плоских квазиконформных отображений как необходимое и достаточное условие продолжимости этой функции до квазиконформного отображения верхней полуплоскости на себя (задача Альфорса — Берлинга [1, теорема 1, с. 126]). В работе Келингоса [2] такие функции названы *квазисимметрическими* и проведено изучение их основных свойств. Наконец, фундаментальная работа Тукиа и Вяйсяля [3] дала начало интенсивному изучению квазисимметрических отображений общих метрических пространств, не имеющих какой-либо дифференциальной структуры. В данной статье мы пользуемся классическим определением квазисимметрической функции.

Определение 1.1. Пусть X — подмножество на вещественной прямой R^1. Вещественная монотонно возрастающая функция $f : X \to R^1$ называется *квазисимметрической* с *коэффициентом квазисимметричности* $K \geq 1$ (или K-*квазисимметрической*), если для всех $x \in X$ и $t > 0$ таких, что $\{x-t, x, x+t\} \subset X$, выполняется соотношение

$$\frac{1}{K} \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leq K. \tag{1.1.1}$$

В работе [4] Тукиа разработал схему представления квазисимметрической функции в виде *сита* — последовательности уплотняющихся сетей, в каждой из которых отношение длин соседних ячеек ограничено сверху одной и той же константой. Тукиа назвал такие сита квазисимметрическими и установил, что функция, представленная квазисимметрическим ситом, является квазисимметрической в смысле определения 1.1. В схеме Тукиа каждая следующая сеть получалась разбиением на две части каждой ячейки предыдущей сети. Мы рассматриваем более общий процесс, при котором каждая ячейка сети является объединением $n \geq 2$ ячеек последующей сети, и показываем (теорема 2.4), что и в этом случае q-квазисимметрическое сито определяет квазисимметрическую функцию с коэффициентом квазисимметричности $q(1 + q + \dots + q^{2n})$. При этом для q, достаточно близких к единице, получена в явном виде оценка коэффициента квазисимметричности, стремящаяся к 1 при $q \to 1$ (теорема 2.6). Возможность получения такой оценки в своей схеме (при $n = 2$) отмечена Тукиа в [5, (C), с. 153] без приведения доказательства.

Самоподобные итерационные процессы служат во многих разделах математики универсальным средством построения объектов (множеств, функций, отображений, мер и т. д.) с требуемыми (и иногда довольно экзотическими) свойствами. Для исследования вопроса об изменении хаусдорфовой размерности подмножеств при отображениях, осуществляемых квазисимметрическими функциями, Тукиа [5] использовал метод построения квазисимметрических гомеоморфизмов прямой, модифицировав итерационную конструкцию, приводящую к функциям Салема. В основе схемы Тукиа лежит специальный итерационный самоподобный процесс построения сита, обеспечивающий выполнение условия квазисимметричности. Заметив (пример 4.2), что схема Тукиа представляет собой довольно частный случай граф-ориентированной итерированной функциональной системы (IFS), введенной в работе Молдина и Вильямса [6] и широко используемой в теории фракталов, мы рассматриваем общий процесс построения сита с помощью граф-ориентированной IFS и указываем легко проверяемое достаточное условие (условие стыковки), обеспечивающее квазисимметричность сита, полученного таким способом (теорема 3.3). В качестве следствия отмечено (теорема 4.1), что при выполнении условия стыковки структурная параметризация граф-ориентированной IFS рассматриваемого типа (в работе Тетенова [7] такие IFS названы *жордановыми мультициплерами*) осуществляется набором квазисимметрических функций. Основной результат статьи анонсирован в [8], но указанное там условие стыковки оказалось недостаточным и его пришлось несколько усилить.

2. Квазисимметрические сита. Терминология и основная конструкция в этом пункте взяты из работы Тукиа [4] (где $n = 2$), но перенесены на более общий случай $n \geq 2$.

Пусть задано натуральное $n \geq 2$, $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Элементы прямого произведения I^N (где $N \geq 1$) записываем в виде слов $\mathbf{i} = (i_1 j_2 \dots i_N)$ длины N в алфавите I и называем *мультииндексами* ранга N. На множестве I^N вводится лексикографическое упорядочение, в котором минимальным элементом является мультииндекс $(11 \dots 1)$, а максимальным — $(nn \dots n)$. Элемент, непосредственно следующий за элементом $\mathbf{i} = (i_1 i_2 \dots i_N) \in I^N$, записываем в виде $\mathbf{i} + 1 = (i_1 i_2 \dots i_N) + 1$, а непосредственно предшествующий ему элемент — в виде $\mathbf{i} - 1 = (i_1 i_2 \dots i_N) - 1$. Операция конкатенации (соединения слов) задается формулой

$$(i_1 i_2 \dots i_N)(s_1 s_2 \dots s_K) = (i_1 i_2 \dots i_N s_1 s_2 \dots s_K) \in I^{N+K}.$$

Множество всех мультииндексов конечного ранга обозначаем символом I_0^∞, т. е.

$$I_0^\infty = I^1 \cup I^2 \cup \dots \cup I^N \cup \dots = \bigcup_{N=1}^{\infty} I^N.$$

Монотонное (т. е. сохраняющее порядок) отображение $I^N \ni \mathbf{i} \mapsto b^{\mathbf{i}} \in \mathscr{X} = [0,1]$, при котором $(11\dots1) \mapsto 0 = b^{(11\dots1)}$ и $(nn\dots n) \mapsto b^{(nn\dots n)} < 1$, задает разбиение $\mathscr{X}$ на отрезки: $\mathscr{X} = \bigcup_{\mathbf{i}\in I^N} \mathscr{X}^{\mathbf{i}}$, где $\mathscr{X}^{\mathbf{i}} = [b^{\mathbf{i}}, b^{\mathbf{i}+1}]$, если $\mathbf{i}$ не является максимальным мультииндексом в I^N, и $\mathscr{X}^{(nn\dots n)} = [b^{(nn\dots n)}, 1]$ для максимального мультииндекса $(nn\dots n) \in I^N$. Это отображение мы называем *сетью* N-го ранга на отрезке $\mathscr{X}$, а отрезки $\mathscr{X}^{\mathbf{i}}$, $\mathbf{i} \in I^N$, — *ячейками* этой сети. Отображение $\mathscr{Q} : I_0^\infty \ni \mathbf{i} \mapsto b^{\mathbf{i}} \in \mathscr{X}$ называем *ситом* на $\mathscr{X}$, если для каждого N его ограничение на I^N является сетью N-го ранга на $\mathscr{X}$ и для любого мультииндекса $\mathbf{i} \in I^N$ выполняется равенство

$$\mathscr{X}^{\mathbf{i}} = \mathscr{X}^{\mathbf{i}(1)} \cup \mathscr{X}^{\mathbf{i}(2)} \cup \dots \cup \mathscr{X}^{\mathbf{i}(n)} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{X}^{\mathbf{i}(k)}. \tag{2.0.1}$$

Это условие равносильно тому, что для любого $\mathbf{i} \in I^N$ и любого минимального мультииндекса $(11\dots1) \in I^K$ выполняется равенство $b^{\mathbf{i}(11\dots1)} = b^{\mathbf{i}}$. Сито $\mathscr{Q}$ можно рассматривать как последовательность уплотняющихся сетей на $\mathscr{X}$. Если для любой бесконечной последовательности $i_1 i_2 \dots \in I^\infty$ последовательность вложенных ячеек $\mathscr{X}^{(i_1)} \supset \mathscr{X}^{(i_1 i_2)} \supset \dots \supset \mathscr{X}^{(i_1 i_2 \dots i_N)} \supset \dots$ имеет пересечением одноточечное множество, то сито $\mathscr{Q}$ называется *точным*. Это равносильно соотношению

$$\max_{\mathbf{i}\in I^N} L(\mathscr{X}^{\mathbf{i}}) \to 0 \quad \text{при } N \to \infty,$$

где $L(\mathscr{X}^{\mathbf{i}})$ обозначает длину ячейки $\mathscr{X}^{\mathbf{i}}$. Условие точности сита $\mathscr{Q}$ также эквивалентно тому, что множество $\bigcup\{b^{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \in I_0^\infty\}$ плотно на отрезке $\mathscr{X}$.

Стандартное сито $\mathscr{P} : I_0^\infty \ni \mathbf{i} \mapsto a^{\mathbf{i}} \in \mathscr{I}$ на отрезке $\mathscr{I} = [0,1]$ определяется условием: $L(\mathscr{I}^{\mathbf{i}}) = 1/n^N$ для любого $\mathbf{i} \in I^N$.

Любой гомеоморфизм $h : \mathscr{I} \to \mathscr{X}$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, порождает точное сито: $\mathscr{X}^{\mathbf{i}} = h(\mathscr{I}^{\mathbf{i}})$, $\mathbf{i} \in I^N$, $N = 1, 2, \dots$. Верно и обратное: всякое точное сито $\mathscr{Q}$ на отрезке $\mathscr{X}$ единственным образом определяет гомеоморфизм $h : \mathscr{I} \to \mathscr{X}$, порождающий это сито (см. [4, § 4, с. 132, 133]), поскольку формулой $h(a^{\mathbf{i}}) = b^{\mathbf{i}}$, $h(1) = 1$, отображение h задается на плотном подмножестве отрезка $\mathscr{I}$, а точность сита $\mathscr{Q}$ позволяет продолжить его по непрерывности на весь отрезок $\mathscr{I}$. Таким образом, мы имеем взаимно однозначное соответствие между сохраняющими ориентацию гомеоморфизмами отрезка $\mathscr{I}$ на отрезок $\mathscr{X}$ и точными ситами на $\mathscr{X}$.

Определение 2.1 (см. [4, с. 129]). Сито $\mathscr{Q} = \{b^{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \in I_0^\infty\}$ на отрезке $\mathscr{X}$ с ячейками $\mathscr{X}^{\mathbf{i}}$ называется *q-квазисимметрическим* ($q \geq 1$), если для любого натурального $N \geq 2$ и любого не максимального мультииндекса $\mathbf{i} \in I^N$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{q} \leq \frac{L(\mathscr{X}^{\mathbf{i}+1})}{L(\mathscr{X}^{\mathbf{i}})} \leq q. \tag{2.1.1}$$

В дальнейшем тексте для заданного сита $\mathscr{Q}$ на отрезке $\mathscr{X}$ длину $L(\mathscr{X}^{\mathbf{i}})$ ячейки $\mathscr{X}^{\mathbf{i}}$ будем обозначать символом $\lambda^{\mathbf{i}}$.

Утверждение 2.2. *Пусть сито* $\mathscr{Q} = \{b^{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \in I_0^\infty\}$ *с ячейками* $\mathscr{X}^{\mathbf{i}}$ *является* q*-квазисимметрическим. Тогда*

(1) *для любых* $s, k \in I$ *и любого мультииндекса* $\mathbf{i} \in I^N$

$$\frac{1}{q^{|s-k|}} \leq \frac{\lambda^{(s)}}{\lambda^{(k)}} \leq q^{|s-k|}, \quad \frac{1}{q^{|s-k|}} \leq \frac{\lambda^{\mathbf{i}(s)}}{\lambda^{\mathbf{i}(k)}} \leq q^{|s-k|}; \tag{2.2.1}$$

(2) *для любого* $k \in I$ *и любого* $\mathbf{i} \in I^N$

$$\frac{1}{q^{n-1}n} \leq \lambda^{(k)} \leq \psi(q), \quad \frac{\lambda^{\mathbf{i}}}{q^{n-1}n} \leq \lambda^{\mathbf{i}(k)} \leq \lambda^{\mathbf{i}}\psi(q), \tag{2.2.2}$$

где $\psi(q) = q^{n-1}/(1 + q + \dots + q^{n-1}) < 1$*;*

(3) *для любого* N *выполняется оценка*

$$\left[\frac{1}{q^{n-1}n}\right]^N \leq \min_{\mathbf{i} \in I^N} \lambda^{\mathbf{i}} \leq \max_{\mathbf{i} \in I^N} \lambda^{\mathbf{i}} \leq [\psi(q)]^N. \tag{2.2.3}$$

В частности, из (2.2.3) *следует, что сито* $\mathscr{Q}$ *является точным.*

Доказательство. Формулу (2.2.1) получим, применив конечное число раз соотношение (2.1.1). При фиксированном $k \in I$ из (2.2.1) следует, что

$$\frac{1 + q + \dots + q^{n-1}}{q^{n-1}} \lambda^{\mathbf{i}(k)} = \left[1 + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q^{n-1}}\right] \lambda^{\mathbf{i}(k)} \leq \sum_{s=1}^{n} \frac{\lambda^{\mathbf{i}(k)}}{q^{|s-k|}}$$
$$\leq \sum_{s=1}^{n} \lambda^{\mathbf{i}(s)} \leq \sum_{s=1}^{n} q^{n-1} \lambda^{\mathbf{i}(k)} = nq^{n-1}\lambda^{\mathbf{i}(k)},$$

где мультииндекс $\mathbf{i}$ можно заменить пустым словом. Заметив, что $\sum_{s \in I} \lambda^{(s)} = 1$ и $\sum_{s \in I} \lambda^{\mathbf{i}(s)} = \lambda^{\mathbf{i}}$ (см. (2.0.1)), получаем оценку (2.2.2), из которой непосредственно следует, что

$$\max_{\mathbf{i} \in I^N} \lambda^{\mathbf{i}} \leq \psi(q) \max_{\mathbf{i} \in I^{N-1}} \lambda^{\mathbf{i}} \leq [\psi(q)]^2 \max_{\mathbf{i} \in I^{N-2}} \lambda^{\mathbf{i}} \leq \dots \leq [\psi(q)]^{N-1} \max_{i \in I} \lambda^{(i)} \leq [\psi(q)]^N.$$

Аналогично получаем нижнюю оценку для $\min_{\mathbf{i} \in I^N} \lambda^{\mathbf{i}}$. Утверждение доказано.

Утверждение 2.3. *Для заданного сита* $\mathscr{Q}$ *и натурального* N *построим кусочно линейные функции* $h_N : \mathscr{I} \to \mathscr{X}$*, определенные условием* $h_N(a^{\mathbf{i}}) = b^{\mathbf{i}}$ *для всех* $\mathbf{i} \in I^N$*,* $h_N(1) = 1$*, и линейные на каждой ячейке* $\mathscr{I}^{\mathbf{i}}$*,* $\mathbf{i} \in I^N$*. Тогда*

(1) $|h_1(x) - x| \leq q^{n-1} - 1$ *для всех* $x \in \mathscr{I}$*;*

(2) $|h_N(x) - h_{N+1}(x)| \leq \lambda^{\mathbf{i}}(q^{n-1} - 1)$ *для всех* $x \in \mathscr{I}^{\mathbf{i}}$*;*

(3) *последовательность кусочно линейных функций* $\{h_N(x)\}$ *сходится равномерно на* $\mathscr{I}$ *к функции* $h(x)$*, при этом для всех* $x \in \mathscr{I}^{\mathbf{i}}$*, где* $\mathbf{i} \in I^N$*, выполняется оценка*

$$|h_N(x) - h(x)| \leq \frac{q^{n-1} - 1}{1 - \psi(q)} \lambda^{\mathbf{i}}. \tag{2.3.1}$$

Доказательство. Пусть на отрезке $\mathscr{I}$ задана некоторая сеть $0 = c^{(1)} < c^{(2)} < \dots < c^{(n)} < 1$ и построена кусочно линейная функция $l : [0, 1] \to [0, 1]$, линейная на каждой ячейке $\mathscr{I}^{(i)}$ $(i \in I)$ и такая, что $l(a^{(i)}) = c^{(i)}$, $i \in I$ и $l(1) = 1$. Пусть для любого $i = 2, \dots, n - 1$ выполняется оценка

$$1/q \leq |c^{(i+1)} - c^{(i)}|/|c^{(i)} - c^{(i-1)}| \leq q$$

и $1/q \le |1-c^{(n)}|/|c^{(n)}-c^{(n-1)}| \le q$. Убедимся, что

$$\max_{x\in[0,1]}|l(x)-x| \le q^{n-1}-1. \tag{2.3.2}$$

Так как в силу (2.2.2) при любом $i=2,\dots,n$ верно неравенство

$$1/nq^{n-1} \le |c^{(i)}-c^{(i-1)}| \le \phi(q) \le q^{n-1}/n,$$

для $k=2,\dots,n$ имеем оценку

$$\frac{a^{(k)}}{q^{n-1}} = \frac{k-1}{nq^{n-1}} \le c^{(k)} = \sum_{i=2}^{k}|c^{(i)}-c^{(i-1)}| \le \frac{(k-1)q^{n-1}}{n} = q^{n-1}a^{(k)},$$

из которой следует, что

$$-(q^{n-1}-1) \le \frac{1-q^{n-1}}{nq^{n-1}} \le l(a^{(k)})-a^{(k)} \le a^{(k)}(q^{n-1}-1) \le q^{n-1}-1,$$

т. е. $|l(a^{(k)})-a^{(k)}| \le q^{n-1}-1$ для всех k. Поскольку функция l линейна на каждом из отрезков $\mathscr{I}^{(i)}$, имеем $|l(x)-x| \le q^{n-1}-1$ для всех $x\in[0,1]$. Оценка (2.3.2) доказана. В частности, для $l=h_1$ получаем требуемую оценку (1). Пусть заданы $N>1$ и некоторый мультииндекс $\mathbf{i}\in I^N$. Построим линейное отображение $U:\mathscr{I}^{\mathbf{i}}\to\mathscr{I}$ с коэффициентом растяжения n^N, линейное отображение $T:\mathscr{X}^{\mathbf{i}}\to\mathscr{X}$ с коэффициентом растяжения $1/\lambda^{\mathbf{i}}$ и положим $l=T\circ h_{N+1}\circ U^{-1}$. Так как сеть $c^{(k)}=l(a^k)$ удовлетворяет условию q-квазисимметричности, в силу (2.3.2) для любого $y\in\mathscr{I}$ и $x=U^{-1}(y)$ выполняется оценка $|T\circ h_{N+1}(U^{-1}(y))-y| \le q^{n-1}-1$, т. е. для любого $x\in\mathscr{I}^{\mathbf{i}}$

$$|T\circ h_{N+1}(x)-U(x)| \le q^{n-1}-1; \quad |h_{N+1}(x)-T^{-1}(U(x))| \le \lambda^{\mathbf{i}}(q^{n-1}-1).$$

Остается заметить, что на отрезке $\mathscr{I}^{\mathbf{i}}$ линейные функции $T^{-1}\circ U$ и h_N переводят $\mathscr{I}^{\mathbf{i}}$ в $\mathscr{X}^{\mathbf{i}}$ и, следовательно, совпадают. Тем самым мы получили требуемую оценку (2).

Пусть заданы N и $\mathbf{i}\in I^N$. Для каждой точки $x\in\mathscr{I}^{\mathbf{i}}$ имеется бесконечная последовательность индексов $(k_1k_2\dots k_M\dots)$ такая, что множество $\{x\}$ является пересечением последовательности вложенных ячеек:

$$\{x\} = \mathscr{I}^{\mathbf{i}} \cap \mathscr{I}^{\mathbf{i}(k_1)} \cap \dots \mathscr{I}^{\mathbf{i}(k_1k_2\dots k_M)} \cap \dots.$$

Применение оценки (2) дает неравенство

$$\begin{aligned}|h_N(x)-h_{N+M}(x)| &= |h_N(x)-h_{N+1}(x)| + \dots + |h_{N+M-1}(x)-h_{N+M}(x)| \\ &\le (q^{n-1}-1)[\lambda^{\mathbf{i}}+\lambda^{\mathbf{i}(k_1)}+\dots+\lambda^{\mathbf{i}(k_1\dots k_M)}] \le \dots\end{aligned}$$

в силу оценки (2.2.2)

$$\dots \le (q^{n-1}-1)\lambda^{\mathbf{i}}[1+\psi(q)+\psi(q)^2+\dots+\psi(q)^M] \le \frac{q^{n-1}-1}{1-\psi(q)}\lambda^{\mathbf{i}}.$$

Таким образом, для любого N и любого $\mathbf{i}\in I^N$ при всех $x\in\mathscr{I}^{\mathbf{i}}$ и при любом натуральном M с учетом оценки (2.2.3) получаем

$$|h_N(x)-h_{N+M}(x)| \le \lambda^{\mathbf{i}}\frac{q^{n-1}-1}{1-\psi(q)} \le [\psi(q)]^N\frac{q^{n-1}-1}{1-\psi(q)}. \tag{2.3.3}$$

Следовательно, для всех $x\in\mathscr{I}$ выполняется неравенство

$$|h_N(x)-h_{N+M}(x)| \le [\psi(q)]^N(q^{n-1}-1)/(1-\psi(q)),$$

которое означает, что последовательность $\{h_N(x)\}$ сходится равномерно на $\mathscr{I}$ к функции $h(x)$. Перейдя в (2.3.3) к пределу при $M\to\infty$, получим требуемую оценку (2.3.1). Утверждение доказано.

Следующая теорема для случая $n=2$ имеется в [4, 4(ii), с. 134].

Теорема 2.4. *Любое q-квазисимметрическое сито $\mathscr{Q} = \{b^{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \in I_0^\infty\}$ на $\mathscr{X}$ порождает K-квазисимметрическую функцию $h(x) : \mathscr{I} \to \mathscr{X}$ с коэффициентом квазисимметричности $K \le q(1 + q + \dots + q^{2n})$.*

Доказательство. Возьмем произвольную тройку точек $x - t < x < x + t$ на отрезке $\mathscr{I}$. Найдем минимальное натуральное N такое, что каждый из отрезков $[x - t, x]$ и $[x, x + t]$ содержит в себе некоторую ячейку N-го ранга стандартной сети на $\mathscr{I}$. Пусть $x \in \mathscr{I}^{\mathbf{i}}$, где $\mathbf{i} \in I^N$. Если $t > (2n)/n^N$, то каждый из отрезков $[x, x + t]$ и $[x - t, x]$ содержит в себе объединение $2n - 1$ последовательно расположенных ячеек N-го ранга, поэтому содержит какую-нибудь ячейку $(N - 1)$-го ранга, что противоречит выбору N. Следовательно, $t \le (2n)/n^N$, а это означает, что

$$[h(x), h(x + t)] \subset \mathscr{X}^{\mathbf{i}} \cup \mathscr{X}^{\mathbf{i}+1} \cup \dots \cup \mathscr{X}^{\mathbf{i}+k}, \quad \text{где } k \le 2n,$$

$$[h(x - t), h(x)] \subset \mathscr{X}^{\mathbf{i}} \cup \mathscr{X}^{\mathbf{i}-1} \cup \dots \cup \mathscr{X}^{\mathbf{i}-\mathrm{p}}, \quad \text{где } p \le 2n.$$

Используя условие q-квазисимметричности сита $\mathscr{Q}$, получаем оценку

$$\max\{h(x + t) - h(x), h(x) - h(x - t)\} \le \lambda^{\mathbf{i}}[1 + q + \dots + q^{2n}].$$

Так как каждый из отрезков $[h(x), h(x + t)]$ и $[h(x - t), h(x)]$ содержит хотя бы одну ячейку N-го ранга, q-квазисимметричность сита $\mathscr{Q}$ приводит к оценке

$$\min\{h(x + t) - h(x), h(x) - h(x - t)\} \ge \lambda^{\mathbf{i}}/q.$$

Из этих оценок следует соотношение

$$\frac{1}{q(1 + q + \dots + q^{2n})} \le \frac{h(x + t) - h(x)}{h(x) - h(x - t)} \le q(1 + q + \dots + q^{2n}).$$

В силу произвольности задания тройки точек $x-t, x, x+t \in \mathscr{I}$ полученное двойное неравенство означает, что $h(x)$ является K-квазисимметрической функцией с $K \le q(1 + q + \dots + q^{2n})$. Теорема доказана.

Учитывая, что любая q-квазисимметрическая функция $h : \mathscr{I} \to \mathscr{X}$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, порождает q-квазисимметрическое сито на отрезке $\mathscr{X}$, получаем следующий критерий квазисимметричности функции.

Следствие 2.5 (для $n = 2$ см. [5, (C), с. 153]). *Пусть $n \ge 2$. Монотонно возрастающая функция $h : [0, 1] \to [0, 1]$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, является квазисимметрической тогда и только тогда, когда существует константа $q \ge 1$ такая, что*

$$\frac{1}{q} \le \frac{h((j + 1)/n^N) - h(j/n^N)}{h(j/n^N) - h((j - 1))/n^N} \le q$$

при всех натуральных N и $0 < j < n^N$. При этом h является K-квазисимметрической функцией с $K \le q(1 + q + \dots + q^{2n})$.

Оценка коэффициента квазисимметричности отображения h, полученная в теореме 2.4, не стремится к 1 при $q \to 1$. Поэтому ситуация, когда q достаточно близко к 1, требует более тщательного исследования.

Теорема 2.6. *Пусть $0 < \delta < 1$. Если сито $\mathscr{Q} = \{b^{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \in I_0^\infty\}$ на отрезке $\mathscr{X} = [0, 1]$ является q-квазисимметрическим с $q \le q_0(\delta)$, где $q_0(\delta) > 1$ — корень уравнения*

$$(q_0 - 1)^\delta q_0^{n-1}\bigl(1 + q_0 + \dots + q_0^{n-1}\bigr)\bigl(q_0^{n-1} + 1\bigr) = \frac{n - 1}{2n}, \tag{2.6.1}$$

то порожденная ситом $\mathscr{Q}$ функция $h : \mathscr{I} \to \mathscr{X}$ является $K(q)$-квазисимметрической с коэффициентом квазисимметричности

$$K(q) \leq q^{2n-2}\frac{1+(q-1)^{1-\delta}}{1-(q-1)^{1-\delta}},$$

стремящимся к 1 при $q \to 1$.

Доказательство. Пусть на отрезке $\mathscr{I}$ задана тройка точек $x-t, x, x+t$, где $t > 0$. Тогда имеется минимальный ранг A, при котором отрезок $[x-t, x+t]$ покрывается объединением n последовательных ячеек ранга A. Пусть $\alpha \in I^A$ таково, что

$$[x-t, x+t] \subset \mathscr{I}^{\alpha} \cup \mathscr{I}^{\alpha+1} \cup \dots \cup \mathscr{I}^{\alpha+n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma.$$

В силу выбора A длина отрезка $[x-t, x+t]$ не может быть меньше, чем $(n-1)/n^{A+1}$, т. е.

$$t \geq \frac{n-1}{2n^{A+1}}. \tag{2.6.2}$$

Возьмем две произвольные точки $x < y$, лежащие в Σ, у которых $|y-x| \geq (n-1)/(2n^{A+1})$. Пусть $x \in \mathscr{I}^{\beta}$ и $y \in \mathscr{I}^{\gamma}$, где $\beta, \gamma \in \{\alpha, \alpha+1, \dots, \alpha+n-1\}$. По формуле (2.3.1)

$$|h(x)-h_A(x)| \leq \frac{q^{n-1}-1}{1-\psi(q)}\lambda^{\beta}, \quad |h(y)-h_A(y)| \leq \frac{q^{n-1}-1}{1-\psi(q)}\lambda^{\gamma}.$$

Следовательно,

$$||h(x)-h(y)| - |h_A(x)-h_A(y)|| \leq \frac{q^{n-1}-1}{1-\psi(q)}(\lambda^{\beta}+\lambda^{\gamma}). \tag{2.6.3}$$

Случай 1. Пусть $\gamma = \beta$. Тогда $x, y \in \mathscr{I}^{\beta}$, отображение h_A линейно на $\mathscr{I}^{\beta}$ с коэффициентом растяжения $\lambda^{\beta}n^A$. Поэтому

$$|h_A(x)-h_A(y)| = \lambda^{\beta}n^A|x-y| \geq \lambda^{\beta}\frac{n-1}{2n} \geq \frac{n-1}{2nq^{n-1}}\lambda^{\beta}. \tag{2.6.4}$$

Случай 2. Пусть $\gamma = \beta + p$, где $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Тогда $[x, a^{\beta+1}] \subset \mathscr{I}^{\beta}$, $[a^{\beta+p}, y] \subset \mathscr{I}^{\beta+p}$. Отображение h_A линейно на ячейках $\mathscr{I}^{\beta}$, $\mathscr{I}^{\beta+1}$, …, $\mathscr{I}^{\beta+p}$. Поэтому

$$h_A(y)-h_A(x) = \lambda^{\beta}n^A(a^{\beta}-x) + \lambda^{\beta+1} + \dots + \lambda^{\beta+p}n^A(y-a^{\beta+p}).$$

Используя (2.1.1) и нижнюю оценку для $|x-y|$, получаем неравенство

$$q^{n-1}\lambda^{\beta}n^A|y-x| \geq |h_A(x)-h_A(y)| \geq \frac{\lambda^{\beta}}{q^p}n^A|y-x| \geq \frac{n-1}{2nq^{n-1}}\lambda^{\beta}. \tag{2.6.5}$$

Случай 3. Пусть $\gamma = \beta - p$, где $p \in \{1, \dots, n-1\}$. Тогда $[a^{\beta}, x] \subset \mathscr{I}^{\beta}$, $[y, a^{\beta-p+1}] \subset \mathscr{I}^{\beta-p}$, отображение h_A линейно на ячейках $\mathscr{I}^{\beta}$, $\mathscr{I}^{\beta-1}$, …, $\mathscr{I}^{\beta-p}$, поэтому

$$h_A(x)-h_A(y) = \lambda^{\beta}n^A(x-a^{\beta}) + \lambda^{\beta-1} + \dots + \lambda^{\beta-p}(a^{\beta-p+1}-y).$$

Воспользовавшись (2.1.1) и нижней оценкой для $|x-y|$, приходим к тому же неравенству (2.6.5). Теперь воспользуемся неравенством

$$(q-1)^{\delta}(1+q+\dots+q^{n-1})(1+q^{n-1})q^{n-1} \leq \frac{n-1}{2n}, \tag{2.6.6}$$

непосредственно вытекающим из условия $q \le q_0(\delta)$ и формулы (2.6.1). Так как $1 - \psi(q) = (1 + q + \dots + q^{n-2})/(1 + q + \dots + q^{n-1})$, то

$$\frac{q^{n-1}-1}{1-\psi(q)}(\lambda^\beta + \lambda^\gamma) = (q-1)(1+q+\dots+q^{n-1})(\lambda^\beta+\lambda^\gamma)$$
$$\le \lambda^\beta(q-1)(1+q+\dots+q^{n-1})(q^{n-1}+1) \le (q-1)^{1-\delta}\lambda^\beta\frac{n-1}{2nq^{n-1}} \le \dots$$

в силу (2.6.5)

$$\dots \le (q-1)^{1-\delta}|h_A(x) - h_A(y)|.$$

Таким образом, из неравенства (2.6.3) вытекают соотношение

$$||h(x)-h(y)| - |h_A(x)-h_A(y)|| \le (q-1)^{1-\delta}|h_A(x)-h_A(y)|$$

и оценки

$$[1-(q-1)^{1-\delta}]|h_A(x)-h_A(y)| \le |h(x)-h(y)| \le [1+(q-1)^{1-\delta}]|h_A(x)-h_A(y)|.$$

Используя оценки (2.6.5), получаем

$$[1-(q-1)^{1-\delta}]\frac{\lambda^\beta n^A}{q^{n-1}} \le \frac{|h(x)-h(y)|}{|x-y|} \le [1+(q-1)^{1-\delta}]\lambda^\beta n^A q^{n-1}. \tag{2.6.7}$$

Применяя неравенства (2.6.7) к паре точек x, $y = x+t$ и к паре точек x, $y = x-t$ (это можно сделать в силу (2.6.2)), приходим к оценке

$$\frac{1}{q^{2n-2}}\frac{1-(q-1)^{1-\delta}}{1+(q-1)^{1-\delta}} \le \frac{|h(x+t)-h(x)|}{|h(x)-h(x-t)|} \le q^{2n-2}\frac{1+(q-1)^{1-\delta}}{1-(q-1)^{1-\delta}},$$

которая и означает $K(q)$-квазисимметричность функции $h(x)$. Теорема доказана.

С учетом теоремы 2.6 можно сделать в следствии 2.5 следующее уточнение.

Если в условиях следствия 2.5 *константа q удовлетворяет неравенству $q \le q_0(\delta)$ с некоторым $\delta \in (0,1)$, где $q_0(\delta)$ — корень уравнения* (2.6.1), *то функция $h(x)$ является квазисимметрической с коэффициентом квазисимметричности $K(q)$, стремящимся к* 1 *при $q \to 1$.*

Для случая $n = 2$ этот факт отмечен Тукиа (без доказательства) в [5, (C), с. 153].

3. Граф-ориентированные системы. Пусть заданы натуральные $m \ge 1$ и $n \ge 2$. Рассмотрим наборы множеств $\mathscr{I}_1, \mathscr{I}_2, \dots, \mathscr{I}_m$ и $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2, \dots, \mathscr{X}_m$, каждое из которых есть отрезок $[0,1]$ вещественной прямой. Пусть для каждого $j \in J = \{1,\dots,m\}$ на отрезке $\mathscr{I}_j$ задано стандартное сито $\mathscr{P}_j = \{a_j^{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \in I_0^\infty\}$, а на отрезке $\mathscr{X}$ задана сеть 1-го ранга $0 = b_j^{(1)} < \dots < b_j^{(n)} < 1$ с ячейками $\mathscr{X}_j^{(i)}$, $i \in I = \{1,\dots,n\}$, длины которых $L(\mathscr{X}_j^{(i)})$ обозначены символами $\lambda_j^{(i)}$.

Целочисленная функция $p(j,i) : J \times I \to J$ называется *структурной функцией*; сопоставляя каждой паре индексов (j,i) сохраняющие ориентацию линейные гомеоморфизмы $\varphi_j^{(i)} : \mathscr{I}_{p(j,i)} \to \mathscr{I}_j^{(i)}$ (с коэффициентом подобия $1/n$) и $f_j^{(i)} : \mathscr{X}_{p(j,i)} \to \mathscr{X}_j^{(i)}$ (с коэффициентом подобия $\lambda_j^{(i)}$), получаем две функциональные системы $\Phi = \{\varphi_j^{(i)}\}_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,n}$ и $F = \{f_j^{(i)}\}_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,n}$.

3.1. Замечание. Каждая из этих функциональных систем представляет собой простейший случай *граф-ориентированной геометрической конструкции* в терминологии [6] (см. также [9, 4.3]), а наборы компактных множеств $\mathscr{I}_1, \ldots, \mathscr{I}_m$ и $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_m$ являются аттракторами (инвариантными вектор-множествами (invariant lists)) для этих систем подобий. Из-за достаточной простоты рассматриваемой конструкции нам нет необходимости использовать графы Молдина — Вильямса (см. [9, 4.3, с. 115]) для описания самоподобной структуры этих инвариантных наборов. Кроме того, отметим, что каждая из рассматриваемых функциональных систем является простейшим *самоподобным жордановым мультициппером*, общие свойства которых описаны в работе Тетенова [7, § 2].

Структурная функция $p(j,i)$ естественно продолжается до функции $P : J \times I_0^\infty \to J_0^\infty$ следующим образом: для $j \in J$ и мультииндекса $\mathbf{i} = (i_1 i_2 \ldots i_N) \in I^N$ строится мультииндекс $P(j,\mathbf{i}) = (j_1 j_2 \ldots j_N)$, где $j_1 = j$, $j_2 = p(j_1, i_1)$, $\ldots$, $j_{N-1} = p(j_{N-2}, i_{N-2})$, $j_N = p(j_{N-1}, i_{N-1})$. После этого, положив $p(j,\mathbf{i}) \overset{\text{def}}{=} p(j_N, i_N)$, получаем продолжение структурной функции $p(j,i)$ до функции $p(j,\mathbf{i}) : J \times I_0^\infty \to J$.

Для каждого $j \in J$ и мультииндекса $\mathbf{i} = (i_1 i_2 \ldots i_N) \in I^N$ определены композиции

$$\varphi_j^{\mathbf{i}} = \varphi_j^{(i_1 \ldots i_N)} \overset{\text{def}}{=} \varphi_{j_1}^{(i_1)} \circ \varphi_{j_2}^{(i_2)} \circ \cdots \circ \varphi_{j_N}^{(i_N)} : \mathscr{I}_{p(j,\mathbf{i})} \to \mathscr{I}_j,$$

$$f_j^{\mathbf{i}} = f_j^{(i_1 \ldots i_N)} \overset{\text{def}}{=} f_{j_1}^{(i_1)} \circ f_{j_2}^{(i_2)} \circ \cdots \circ f_{j_N}^{i_N} : \mathscr{X}_{p(j,\mathbf{i})} \to \mathscr{X}_j,$$

где $(j_1 j_2 \ldots j_N) = P(j,\mathbf{i})$. При этом $\varphi_j^{\mathbf{i}}(\mathscr{I}_{p(j,\mathbf{i})}) = \mathscr{I}_j^{\mathbf{i}}$. Положив $\mathscr{X}_j^{\mathbf{i}} = f_j^{\mathbf{i}}(\mathscr{X}_{p(j,\mathbf{i})})$ и $b_j^{\mathbf{i}} = f_j^{(\mathbf{i})}\big(b_{p(j,\mathbf{i})}^{(1)} = 0 \in \mathscr{X}_{p(j,\mathbf{i})}\big)$, получим сита $\mathscr{Q}_j$ на отрезках $\mathscr{X}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, *порожденные граф-ориентированной функциональной системой* F. Для этого нужно проверить выполнение равенств

$$f_j^{\mathbf{i}}(1 \in \mathscr{X}_{p(j,\mathbf{i})}) = f_j^{\mathbf{i}+1}(0 \in \mathscr{X}_{p(j,\mathbf{i})}) = b_j^{\mathbf{i}+1}$$

при $\mathbf{i} \neq (nn \ldots n) \in I^N$ и

$$f_j^{\mathbf{i}}(1 \in \mathscr{X}_{p(j,\mathbf{i})}) = 1 \in \mathscr{X}_j$$

при $\mathbf{i} = (nn \ldots n) \in I^N$, что легко осуществляется индукцией по N. Длина $\lambda_j^{\mathbf{i}} = L\big(\mathscr{X}_j^{\mathbf{i}}\big)$ ячейки $\mathscr{X}_j^{\mathbf{i}}$ есть

$$\lambda_j^{\mathbf{i}} = \lambda_{j_1}^{(i_1)} \lambda_{j_2}^{(i_2)} \ldots \lambda_{j_N}^{(i_n)},$$

где $(i_1 i_2 \ldots i_N) = \mathbf{i}$ и $(j_1 j_2 \ldots j_N) = P(j,\mathbf{i})$. Отсюда следует, что все сита $\mathscr{Q}_j$ точные, поэтому, как отмечено в п. 1, они порождены гомеоморфизмами $h_j : \mathscr{I}_j \to \mathscr{X}_j$.

Система Φ порождает стандартное сито на каждом отрезке $\mathscr{I}_j$.

Набор гомеоморфизмов $\{h_1, \ldots, h_m\}$ осуществляет *структурную параметризацию* жорданова мультициппера F в том смысле, что для любого натурального N и любого мультииндекса $\mathbf{i} \in I^N$ при всех $j = 1, \ldots, m$ выполняются равенства

$$f_j^{\mathbf{i}} \circ h_{p(j,\mathbf{i})} \equiv h_j \circ \varphi_j^{\mathbf{i}}.$$

Замечание 3.2. В общем случае для жорданова мультициппера существование и единственность его структурной параметризации можно доказать так же, как это сделано в [10] для случая $m = 1$ (см. также [11, § 3.5]).

Теорема 3.3. *Пусть граф-ориентированная функциональная система F такова, что для каждого $N \le m(m+1)$ при любых $j = 1, \dots, m$ и $i = 2, \dots, n$ выполняется условие стыковки:*

$$\lambda^{(11\dots1)}_{p(j,i)} = \lambda^{(nn\dots n)}_{p(j,i-1)}, \tag{3.3.1}$$

где $(11\dots1) \in I^N$ и $(nn\dots n) \in I^N$. Если для любых $j = 1, \dots, m$ и $i = 2, \dots, n$ выполняется оценка

$$\frac{1}{q} \le \frac{\lambda^{(i)}_j}{\lambda^{(i-1)}_j} \le q, \tag{3.3.2}$$

то каждое сито $\mathscr{Q}_j$, порожденное этой системой, является q-квазисимметрическим ситом.

Доказательство. Шаг 1. Покажем, что равенство (3.3.2) выполняется при всех натуральных N. Для заданных $j \in \{1, \dots, m\}$ и $i \in \{2, \dots, n\}$ построим два бесконечных слова $(q_1q_2\dots.q_N\dots)$ и $(s_1s_2\dots s_N\dots)$ в алфавите $J = \{1, \dots, m\}$, положив $q_1 = p(j,i)$, $s_1 = p(j,i-1)$, $q_{N+1} = p(q_N,(1)) = p(p(j,i),(11\dots1))$ с $(11\dots1) \in I^N$ и $s_{N+1} = p(s_N,(n)) = p(p(j,i-1),(nn\dots n))$ с $(nn\dots n) \in I^N$. В слове $(q_1q_2\dots)$ найдется минимальный номер $V' > 1$, для которого $q_{V'} \in \{q_1, \dots, q_{V'-1}\}$. Так как в мультииндексе $(q_1\dots q_{V'-1})$ не должно быть совпадающих элементов, то $V' \le m+1$. Пусть $q_{V'} = q_V$, где $V < V'$. Положим $L_1 = V' - V$, $\mathbf{q}' = (q_Vq_{V+1}\dots q_{V+L-1}) \in I^{L_1}$. Тогда слово $(q_1q_2\dots)$ является периодическим и имеет вид $(q_1\dots q_{V-1})\mathbf{q}'\mathbf{q}'\dots\mathbf{q}'\dots$. Аналогично слово $(s_1s_2\dots)$ является периодическим и имеет вид $(s_1\dots s_{W-1})\mathbf{s}'\mathbf{s}'\dots\mathbf{s}'\dots$, где $W \le m$ и $\mathbf{s}' \in I^{L_2}$ с $L_2 \le m$. Тогда, положив $L = L_1 \cdot L_2$ и $\mathbf{q}_0 = (q_1\dots q_m)$, $\mathbf{q} = (q_{m+1}q_{m+2}\dots q_{m+L-1})$, мы можем записать слово $(q_1q_2\dots)$ в виде периодического слова $\mathbf{q}_0\mathbf{q}\dots\mathbf{q}\dots$. Аналогично, положив $\mathbf{s}_0 = (s_1s_2\dots s_m)$ и $\mathbf{s} = (s_{m+1}s_{m+2}\dots s_{m+L-1})$, можно представить слово $(s_1s_2\dots)$ в виде периодического слова $\mathbf{s}_0\mathbf{s}\dots.\mathbf{s}\dots$. Следовательно, для любого натурального $N > m+L$ имеется индекс $m < N' \le m+L$ такой, что $q_N = q_{N'}$ и $s_N = s_{N'}$. Тогда $\lambda^{(1)}_{q_N} = \lambda^{(1)}_{q_{N'}}$ и $\lambda^{(n)}_{s_N} = \lambda^{(n)}_{s_{N'}}$. Однако $\lambda^{(1)}_{q_{N'}} = \lambda^{(1)}_{p(p(j,i),(11\dots1))}$ с $(11\dots1) \in I^{N'-1}$ и поэтому

$$\lambda^{(1)}_{q_{N'}} = \lambda^{(11\dots1)(1)}_{p(j,i)} / \lambda^{(11\dots1)}_{p(j,i)}. \tag{3.3.3}$$

Аналогично $\lambda^{(n)}_{s_{N'}} = \lambda_{p(p(j,i-1),(nn\dots n))}$ с $(nn\dots n) \in I^{N'-1}$ и

$$\lambda^{(n)}_{s_{N'}} = \lambda^{(nn\dots n)(n)}_{p(j,i-1)} / \lambda^{(nn\dots n)}_{p(j,i-1)}. \tag{3.3.4}$$

Так как $N' - 1 \le m + L - 1 \le m(m+1) - 1$, в силу условия стыковки (3.3.1)

$$\lambda^{(11\dots1)}_{p(j,i)} = \lambda^{(nn\dots n)}_{p(j,i-1)}, \quad \lambda^{(11\dots1)(1)}_{p(j,i)} = \lambda^{(nn\dots n)(n)}_{p(j,i-1)},$$

благодаря чему левые части в (3.3.3) и (3.3.4) совпадают, т. е. $\lambda^{(1)}_{q_N} = \lambda^{(1)}_{q_{N'}} = \lambda^{(n)}_{s_{N'}} = \lambda^{(n)}_{s_N}$. Таким образом, для любого N верно равенство $\lambda^{(1)}_{q_N} = \lambda^{(n)}_{s_N}$. Следовательно, для любого натурального N при $(11\dots1) \in I^N$, $(nn\dots n) \in I^N$ справедливо равенство (3.3.1)

$$\lambda^{(11\dots1)}_{p(i,j)} = \prod_{k=1}^{N} \lambda^{(1)}_{q_k} = \prod_{k=1}^{N} \lambda^{(n)}_{s_k} = \lambda^{(nn\dots n)}_{p(j,i-1)}.$$

Шаг 2. Покажем теперь, что из условия стыковки (3.3.1) (при всех N) следует, что при любом $j = 1, \dots, m$ для любого не минимального мультииндекса $\mathbf{i}$ выполняется равенство

$$\lambda^{(11\dots1)}_{p(j,\mathbf{i})} = \lambda^{(nn\dots n)}_{p(j,\mathbf{i}-1)} \tag{3.3.5}$$

с мультииндексами $(11\dots1)$ и $(nn\dots n)$ одинакового ранга. Если $\mathbf{i} = (i)$, $i = 2, \dots, n$, то $\mathbf{i}-1 = (i-1)$, и требуемое равенство $\lambda^{(11\dots1)}_{p(j,i)} = \lambda^{(nn\dots n)}_{p(j,i-1)}$ непосредственно следует из условия (3.3.1). Пусть (3.3.5) доказано для всех мультииндексов ранга N. Возьмем произвольный не минимальный мультииндекс $\mathbf{i}$ ранга $N+1$. Тогда $\mathbf{i} = \mathbf{k}(s)$, где $\mathbf{k} \in I^N$ и $s \in I$.

Случай 1. Пусть $s > 1$. Тогда $\mathbf{i} - 1 = \mathbf{k}(s-1)$. Положив $j' = p(j, \mathbf{k})$, получаем равенства

$$\lambda^{(11\dots1)}_{p(j,\mathbf{i})} = \lambda^{(11\dots1)}_{p(j',s)}, \quad \lambda^{(nn\dots n)}_{p(j,\mathbf{i}-1)} = \lambda^{(nn\dots n)}_{p(j,\mathbf{k}(s-1))} = \lambda^{(nn\dots n)}_{p(j',s-1)},$$

правые части которых равны в силу условия (3.3.1). Следовательно, в этом случае получаем требуемое равенство (3.3.5) для мультииндекса $\mathbf{i} \in I^{N+1}$.

Случай 2. Пусть $s = 1$. Тогда мультииндекс $\mathbf{k}$ не является минимальным и $\mathbf{i} - 1 = (\mathbf{k} - 1)(n)$. Значит,

$$\lambda^{(11\dots1)}_{p(j,\mathbf{i})} = \lambda^{(11\dots1)}_{p(j,\mathbf{k}1)} = \lambda^{(11\dots1)}_{p(p(j,\mathbf{k}),1)}.$$

Умножив обе части этого равенства на $\lambda^{(1)}_{p(j,\mathbf{k})}$, получим равенство

$$\lambda^{(1)}_{p(j,\mathbf{k})} \cdot \lambda^{(11\dots1)}_{p(j,\mathbf{i})} = \lambda^{(11\dots1)(1)}_{p(j,\mathbf{k})}. \tag{3.3.6}$$

Аналогично, умножив обе части равенства

$$\lambda^{(nn\dots n)}_{p(j,\mathbf{i}-1)} = \lambda^{(nn\dots n)}_{p(j,(\mathbf{k}-1))(n)} = \lambda^{(nn\dots n)}_{p(p(j,\mathbf{k}-1),n)}$$

на $\lambda^{(n)}_{p(j,\mathbf{k}-1)}$, приходим к равенству

$$\lambda^{(n)}_{p(j,\mathbf{k}-1)} \cdot \lambda^{(nn\dots n)}_{p(j,\mathbf{i}-1)} = \lambda^{(nn\dots n)(n)}_{p(j,\mathbf{k}-1)}. \tag{3.3.7}$$

Правые части равенств (3.3.6) и (3.3.7) совпадают в силу предположения индукции. Равенство $\lambda^{(1)}_{p(j,\mathbf{k})} = \lambda^{(n)}_{p(j,\mathbf{k}-1)}$ также следует из предположения индукции. Тем самым и в этом случае (из (3.3.6) и (3.3.7)) получаем требуемое равенство (3.3.5) для мультииндекса $\mathbf{i} \in I^{N+1}$.

Шаг 3. Доказательство q-квазисимметричности сетей N-го ранга в ситах $\mathscr{Q}_j$ также проведем индукцией по N. Для сетей 1-го ранга в ситах $\mathscr{Q}_j$ свойство q-квазисимметричности постулируется условием (3.3.2). Пусть для некоторого N доказана q-квазисимметричность сети ранга N в каждом из сит $\mathscr{Q}_j$. Возьмем произвольный индекс $j \in \{1, \dots, m\}$ и докажем q-квазисимметричность сети ранга $N+1$ в сите $\mathscr{Q}_j$. Пусть мультииндекс $\mathbf{i} \in I^{N+1}$ не является минимальным. Представим его в виде $\mathbf{i} = \mathbf{k}(s)$, где $\mathbf{k} \in I^N$ и $s \in I$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Пусть $s \neq 1$. Тогда $\mathbf{i} - 1 = \mathbf{k}(s-1)$. Следовательно,

$$\lambda^{\mathbf{i}}_j = \lambda^{\mathbf{k}}_j \cdot \lambda^{(s)}_{p(j,\mathbf{k})}, \quad \lambda^{\mathbf{i}-1}_j = \lambda^{\mathbf{k}}_j \cdot \lambda^{(s-1)}_{p(j,\mathbf{k})}.$$

Положив $j' = p(j, \mathbf{k})$ и воспользовавшись условием (3.3.2), получаем требуемое соотношение

$$\frac{\lambda^{\mathbf{i}}_j}{\lambda^{\mathbf{i}-1}_j} = \frac{\lambda^{(s)}_{j'}}{\lambda^{(s-1)}_{j'}} \in [1/q, q].$$

Случай 2. Пусть $s = 1$. Тогда $\mathbf{i} - 1 = (\mathbf{k} - 1)(n)$. В этом случае

$$\lambda_j^{\mathbf{i}} = \lambda_j^{\mathbf{k}(1)} = \lambda_j^{\mathbf{k}} \cdot \lambda_{p(j,\mathbf{k})}^{(1)}, \quad \lambda_j^{\mathbf{i}-1} = \lambda_j^{\mathbf{k}-1} \cdot \lambda_{p(j,\mathbf{k}-1)}^{(n)}.$$

Так как $\lambda_{p(j,\mathbf{k})}^{(1)} = \lambda_{p(j,\mathbf{k}-1)}^{(n)}$ в силу соотношения (3.3.5), воспользовавшись предположением индукции, получаем требуемое:

$$\frac{\lambda_j^{\mathbf{i}}}{\lambda_j^{\mathbf{i}-1}} = \frac{\lambda_{p(j,\mathbf{k})}^{(1)}}{\lambda_{p(j,\mathbf{k}-1)}^{(n)}} \cdot \frac{\lambda_j^{\mathbf{k}}}{\lambda_j^{\mathbf{k}-1}} = \frac{\lambda_j^{\mathbf{k}}}{\lambda_j^{\mathbf{k}-1}} \in [1/q, q].$$

Таким образом, сеть ранга $N + 1$ в сите $\mathscr{Q}_j$ также является q-квазисимметрической. Следовательно, все сети в любом из сит $\mathscr{Q}_j$ являются q-квазисимметрическими. Теорема доказана.

4. Основная теорема и схема Тукиа. Соединяя теоремы 2.4, 2.6 и 3.3, сформулируем основной результат этой статьи.

Теорема 4.1. *Пусть $I = \{1, \dots, n\}$ $(n > 1)$, $J = \{1, \dots, m\}$ $(m \geq 1)$ и задана целочисленная функция $p : J \times I \to J$. Пусть отрезки $\mathscr{X}_j = [0, 1]$ разбиты точками $0 = b_j^{(1)} < b_j^{(2)} < b_j^{(3)} < \dots < b_j^{(n)} < 1$ на ячейки $\mathscr{X}_j^{(i)} = \big[b_j^{(i)}, b_j^{(i+1)}\big]$ $(i < n)$, $\mathscr{X}_j^{(n)} = [b_j^{(n)}, 1]$ с длинами $\lambda_j^{(i)}$. Пусть граф-ориентированная итерированная функциональная система F порождена набором линейных сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $f_j^{(i)} : \mathscr{X}_{p(j,i)} \to \mathscr{X}_j^{(i)}$, и пусть набор гомеоморфизмов $h_j : [0, 1] \to \mathscr{X}_j$ $(j \in J)$ является структурной параметризацией системы F.*

Пусть $q \geq 1$ таково, что для всех $j \in J$ и $i = 2, \dots, n$

$$\frac{1}{q} \leq \frac{\lambda_j^{(i)}}{\lambda_j^{(i-1)}} \leq q, \tag{4.1.1}$$

и пусть при любых $j \in J$ и $i = 2, \dots, n$ равенство

$$\lambda_{j_N}^{(1)} = \lambda_{k_N}^{(n)}, \tag{4.1.2}$$

где $j_1 = p(j, i)$, $j_2 = p(j_1, 1)$, ... , $j_N = p(j_{N-1}, 1)$ и $k_1 = p(j, i - 1)$, $k_2 = p(k_1, n)$, ... , $k_N = p(k_{N-1}, n)$, выполняется для всех $N \leq m(m + 1)$.

Тогда

(1) каждая из функций $h_j : [0, 1] \to \mathscr{X}_j$ является K-квазисимметрической с коэффициентом квазисимметричности $K \leq q(1 + q + \dots + q^{2n})$;

(2) для любого заданного $\delta \in (0, 1)$ при условии, что $q \leq q_0(\delta)$, где $q_0(\delta) > 1$ есть корень уравнения

$$(q - 1)^\delta q^{n-1}(1 + q + \dots + q^{n-1})(1 + q^{n-1}) = \frac{n - 1}{2n},$$

каждая из функций $h_j : [0, 1] \to \mathscr{X}_j$ является K-квазисимметрической с коэффициентом квазисимметричности

$$K \leq q^{2n-2} \frac{1 + (q - 1)^{1-\delta}}{1 - (q - 1)^{1-\delta}}, \tag{4.1.3}$$

стремящимся к 1 при $q \to 1$.

Пример 4.2. Пусть $m = 3$, $n = 2$ и $\alpha \in (0, 1/2]$. Положим $\mathscr{X}_1^{(1)} = [0, 1/2]$, $\mathscr{X}_1^{(2)} = [1/2, 1]$; $\mathscr{X}_2^{(1)} = [0, \alpha]$, $\mathscr{X}_2^{(2)} = [\alpha, 1]$; $\mathscr{X}_3^{(1)} = [0, 1 - \alpha]$, $\mathscr{X}_3^{(2)} = [1 - \alpha, 1]$. Тогда $\lambda_1^{(1)} = 1/2 = \lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(1)} = \alpha = \lambda_3^{(2)}$, $\lambda_2^{(2)} = 1 - \alpha = \lambda_3^{(1)}$ и условие (4.1.1) выполняется с константой $q = (1 - \alpha)/\alpha$. Структурную функцию $p(j, i)$ задаем следующим образом:

$$p(1, 1) = 2, \quad p(1, 2) = 3, \quad p(2, 1) = p(2, 2) = p(3, 1) = p(3, 2) = 1.$$

Проверим выполнение условия стыковки (4.1.2).

Для $j = 1, i = 2$ имеем $(j_1 j_2 j_3 \dots) = (3121212\dots)$, $(k_1 k_2 k_3 \dots) = (213131\dots)$, $\lambda_3^{(1)} = \lambda_2^{(2)}$, $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(1)} = \lambda_3^{(2)}$.

Для $j = 2, i = 2$ имеем $(j_1 j_2 \dots) = (121212\dots)$, $(k_1 k_2 k_3 \dots) = (131313\dots)$, $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(1)} = \lambda_3^{(2)}$.

Для $j = 3, i = 2$ имеем $(j_1 j_2 j_3 \dots) = (1212\dots)$, $(k_1 k_2 k_3 \dots) = (131313\dots)$, $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(1)} = \lambda_{(3)}^{2}$.

Таким образом, для системы F выполнены условия теоремы 4.1, и, следовательно, каждая из функций h_1, h_2, h_3, осуществляющих структурную параметризацию этой системы, является K-квазисимметрической с

$$K \leq \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\left[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^3 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^4\right].$$

Функция $h_1 : [0,1] \to [0,1]$ из этого примера была построена Тукиа в [5, (D), p. 154] с использованием модифицированной схемы Салема, и там же доказана ее квазисимметричность. Таким образом, представленная нами схема построения квазисимметрических функций является обобщением упомянутой схемы Тукиа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beurling A., Ahlfors L.* The boundary correspondence under quasiconformal mappings // Acta Math. 1956. V. 96, N 1–2. P. 125–142.
2. *Kelingos J. A.* Boundary correspondence under quasiconformal mappings // Michigan Math. J. 1966. V. 13, N 2. P. 235–249.
3. *Tukia P., Väisälä J.* Quasisymmetric embeddings of metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. 1980. V. 5, N 1. P. 97–114.
4. *Tukia P.* The space of quasisymmetric mappings // Math. Scand. 1977. V. 40, N 1. P. 127–142.
5. *Tukia P.* Hausdorff dimension and quasisymmetric mappings // Math. Scand. 1989. V. 65, N 1. P. 152–160.
6. *Mauldin R. D., Williams S. C.* Hausdorff dimension in graph directed constructions // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 309, N 2. P. 811–829.
7. *Тетенов А. В.* Самоподобные жордановы дуги и граф-ориентированные системы подобий // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 1147–1159.
8. *Асеев В. В., Тетенов А. В.* Применение граф-ориентированных систем к построению квазисимметрических функций // Актуальные проблемы математики и механики: Материалы междунар. конф. / Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Казанск. мат. о-во, 2004. Т. 25. С. 31–32.
9. *Edgar G.* Measure, topology, and fractal geometry. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1995.
10. *Асеев В. В., Тетенов А. В., Кравченко А. С.* О самоподобных жордановых дугах на плоскости // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 3. С. 481–492.
11. *Hutchinson J.* Fractals and self-similarity // Indiana Math. J. 1981. V. 30, N 5. P. 713–747.

Статья поступила 4 сентября 2008 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru