Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 517.54

NED–МНОЖЕСТВА, ЛЕЖАЩИЕ В ГИПЕРПЛОСКОСТИ

В. В. Асеев

Аннотация. Изучаются множества в пространстве $\mathbb{R}^n$, не влияющие на конформную емкость любого конденсатора со связными пластинами, не пересекающимися с этим множеством (NED-множества); такие множества, как известно, являются устранимыми особенностями для квазиконформных отображений, чем и вызван интерес к их изучению. Для компактов, лежащих на гиперплоскости, получен геометрический критерий свойства NED; указан простой достаточный признак NED-множества в терминах связной достижимости его точек из дополнения в гиперплоскости. Для компактов, лежащих на гиперсфере, получен критерий NED-множества в терминах приведенного модуля в паре точек из его дополнения. Установлено, что компакт на гиперсфере S, устранимый для емкости хотя бы в одном шаровом слое, концентричном с S и содержащем S, является NED-множеством.

Ключевые слова: модуль семейства кривых, NED-множество, квазиконформное отображение, устранимая особенность, емкость конденсатора, обобщенный приведенный модуль, емкостной дефект, достижимая граничная точка.

Академику РАН Ю. Г. Решетняку к 80-летию

Под устранимым множеством (устранимой особенностью) в заданном классе $\mathscr{F}$ отображений понимается компактное множество E такое, что для любой открытой окрестности $U \supset E$ и любого отображения $f \in \mathscr{F}$ с областью определения $U \setminus E$ существует отображение того же класса $\mathscr{F}$, заданное на U и совпадающее с f на $U \setminus E$. Проблема описания устранимых множеств встречается почти во всех разделах классической математики: общей топологии, математическом анализе, теории функций и т. д. Описание устранимых особенностей на плоскости в классе AD аналитических функций с ограниченным интегралом Дирихле (так называемых нуль-множеств) выполнено Альфорсом и Берлингом в 1950 г. [1]; в частности, ими установлено, что устранимые множества для аналитических функций класса AD совпадают с множествами, не меняющими модулей семейств кривых (NED-множества). Такой же результат получен для плоских квазиконформных отображений И. Н. Песиным в 1956 г. [2]. В 1962 г. Вяйсяля [3] дал описание основных свойств NED-множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$, а их устранимость для пространственных квазиконформных отображений установлена независимо в работах В. В. Асеева, А. В. Сычева [4] и С. К. Водопьянова, В. М. Гольдштейна [5]. Вопрос о том, всякое ли устранимое множество для квазиконформных отображений в $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ является NED-множеством, остается до сих пор открытым. Неизвестен ответ на этот вопрос и в частном случае для компактных множеств, расположенных на гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$. Примеры устранимых множеств такого типа в $\mathbb{R}^3$ даны А. П. Копыловым и И. Н. Песиным в 1969 г. [6, 7]; для более широкого класса компактов в $\mathbb{R}^n$ с нулевой $(n-1)$-мерной мерой Хаусдорфа (являющихся NED-множествами [3])

Вяйсяля доказал их устранимость для отображений с ограниченным искажением [8] (неоднолистных квазиконформных отображений); в еще более общей ситуации, для множеств с нулевыми проекциями, такое же свойство было получено В. М. Миклюковым [9] в том же 1969 г. Пример NED-множества, лежащего на гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ и имеющего ненулевую $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа, приведен автором в 1974 г. [10]. Вопрос об устранимости компакта E, лежащего в гиперплоскости, для p-емкости конденсаторов специального вида (противоположные грани в параллелепипеде с ребрами, параллельными координатным осям, содержащем компакт E) рассмотрен Хедбергом [11, § 7, с. 199, 200]; им было выведено достаточное условие устранимости в терминах множеств единственности в функциональном пространстве Бесова $\Lambda^{p,p}_{1/q}(\mathbb{R}^{n-1})$ и показано, что при $n = 2$ это условие дает критерий NED_p-множества на плоскости. Дальнейшее изучение множеств, устранимых в координатном параллелепипеде, проведено в цикле работ В. А. Шлыка («компакты, порождающие нормальные области по Гречу») [12–14] и др. В частности, им показано, что если компакт H в гиперплоскости P таков, что любая его точка $p \in H$ является концом некоторой жордановой дуги в $(P \setminus H) \cup \{p\}$, то он является NED-множеством.

В данной статье мы проводим исследование в терминах модулей семейств кривых, избегая некоторых нюансов в определении емкости, отмеченных П. Караманом (см. [15, 16]). В теореме 3.2 для компактных множеств H, лежащих на гиперплоскости $P \subset \mathbb{R}^n$, рассматривается модуль семейства $\Gamma_E(L_1, L_2; p)$ всех континуумов в $\mathbb{R}^n$, не пересекающихся с H, но пересекающих каждый из невырожденных прямолинейных отрезков L_1, L_2, ортогональных гиперплоскости P, имеющих общий конец в точке p и расположенных в разных полупространствах. Доказано, что бесконечность такого модуля в любой точке $p \in H$ есть критерий того, что H является NED-множеством. В теореме 3.4 дано простое геометрическое условие «связной достижимости» точек множества H из его дополнения на гиперплоскости P, которое достаточно для свойства NED; в частности, компактное множество H, не разбивающее гиперплоскость (т. е. $P \setminus H$ связно) и не имеющее внутренних точек относительно P, является NED-множеством — ситуация, охватывающая случаи, рассмотренные в [6, 7, 10]. Этому условию удовлетворяют и компактные множества в упомянутой выше теореме В. А. Шлыка.

В теореме 5.1 показано, что если замкнутое множество H, лежащее на гиперсфере, устранимо хотя бы в одном шаровом слое, симметричном относительно этой гиперсферы, то оно является NED-множеством. Наконец, применение результатов работы [17] позволяет получить (теорема 5.2) для компактов, расположенных на гиперсфере, критерий свойства NED в терминах приведенного модуля области $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus H$ в паре ее внутренних точек, симметричных относительно гиперсферы, — очень частный случай обобщенного приведенного модуля в конечной системе внутренних точек области, введенного В. Н. Дубининым (см. [18–20]). Этот критерий весьма близок к полному многомерному аналогу критерия NED-множеств, расположенных на окружности в $\mathbb{R}^2$, указанному в работе [1].

Основные результаты статьи анонсированы в тезисах [21].

Для удобства некоторые фрагменты доказательств, не содержащие существенно новых моментов, вынесены в конец статьи, в § 6.

§ 1. Терминология и обозначения

Евклидово n-мерное пространство обозначается символом $\mathbb{R}^n$, его одноточечная компактификация — символом $\overline{\mathbb{R}}^n$; через $|a - b|$ обозначается евклидово расстояние между точками $a, b \in \mathbb{R}^n$. Для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и точки $x \in \mathbb{R}^n$ полагаем $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$. Символом ∂A обозначается граница множества A, символом $\operatorname{Cl}(A)$ или $\overline{A}$ — замыкание множества A. Через $B(a, r)$ обозначается открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$, через $\overline{B}(a, r)$ — его замыкание; Ω_{n-1} есть $(n-1)$-мерная мера единичной гиперсферы в $\mathbb{R}^n$, а ω_n обозначает n-мерную меру Лебега единичного шара в $\mathbb{R}^n$; $\omega_n = \Omega_{n-1}/n$. Для $r > 0$ полагаем $S(x, r) = \partial B(x, r)$; $S(r) = S(0, r)$. Под континуумом всюду понимается компактное связное множество; континуум, содержащий более одной точки, считается невырожденным.

Пусть Γ есть некоторое семейство континуумов в $\mathbb{R}^n$. Неотрицательную борелевскую функцию $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ называем *допустимой метрикой* для семейства Γ, если для любого континуума $\gamma \in \Gamma$ верно неравенство

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, d\mathscr{H}^1 \geq 1,$$

где интегрирование выполняется по одномерной мере Хаусдорфа в пространстве $\mathbb{R}^n$. Совокупность всех допустимых метрик для заданного семейства Γ обозначаем символом $\operatorname{Adm}(\Gamma)$. *Модулем* семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{Adm}(\Gamma)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\rho(x)]^n\, dV,$$

где интеграл берется по n-мерной мере Лебега в $\mathbb{R}^n$. Следуя [22], назовем подсемейство $\mathscr{A} \subset \operatorname{Adm}(\Gamma)$ *достаточным* для Γ, если

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \mathscr{A}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\rho(x)]^n\, dV.$$

Например, для любого семейства континуумов Γ подсемейство всех полунепрерывных снизу метрик $\rho \in \operatorname{Adm}(\Gamma)$ является достаточным (см. [22, п. 4.2]).

Подсемейство Γ_0 в семействе континуумов Γ называем *полным* в Γ, если $M(\Gamma_0) = M(\Gamma)$. Например, в любом семействе континуумов Γ подсемейство всех континуумов с конечной одномерной мерой Хаусдорфа является полным.

Определение модуля распространяется на случай семейства континуумов Γ в пространстве $\overline{\mathbb{R}}^n$ равенством $M(\Gamma) = M(\Gamma')$, где Γ' — семейство всех тех континуумов $\gamma \in \Gamma$, которые лежат в $\mathbb{R}^n$.

1.1. Определение [3]. Компактное множество $H \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ называется NED-*множеством*, если для любых двух непересекающихся континуумов $E, F \subset \overline{\mathbb{R}}^n \setminus H$ выполняется равенство $M(\Gamma) = M(\Gamma_H)$, где Γ есть семейство всех континуумов $\gamma \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ таких, что $\gamma \cap E \neq \varnothing \neq \gamma \cap F$, а Γ_H — семейство всех континуумов $\gamma \in \Gamma$, для которых $\gamma \cap H = \varnothing$.

Наряду с модулем $M(\Gamma)$ семейству Γ сопоставляется величина

$$\Lambda(\Gamma) = \left(\frac{\Omega_{n-1}}{M(\Gamma)}\right)^{1/(n-1)},$$

называемая *экстремальной длиной* семейства Γ (в отличие от обычного определения (см. [23, с. 49]) сюда включен множитель $(\Omega_{n-1})^{1/(n-1)}$).

1.2. Определение [17]. Для компактного множества $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и достаточно больших $R > 0$ рассмотрим семейства $\Gamma_H(S(1/R), S(R))$ всех континуумов в $\mathbb{R}^n \setminus H$, пересекающихся с каждой из сфер $S(1/R)$ и $S(R)$. Тогда при $R \to +\infty$

существует (конечный или бесконечный) предел

$$\delta(H) = \lim_{R\to+\infty}[\Lambda(\Gamma_H(S(1/R), S(R))) - 2\,\mathrm{Ln}(R)], \tag{1.2.1}$$

названный в [17] *емкостным дефектом* множества H по мёбиусову направлению $(0,\infty)$.

Эта величина совпадает с обобщенным приведенным модулем (с точностью до множителя $(\Omega_{n-1})^{1/(n-1)}$) открытого множества $\overline{\mathbb{R}}^n\setminus H$ в паре его внутренних точек $(0,\infty)$ — частный случай обобщенного приведенного модуля в системе точек, введенного В. Н. Дубининым (см. [18–20]).

В данной статье, в частности, установлено, что для замкнутого собственного подмножества $H\subset S(1)$ равенство нулю емкостного дефекта по мёбиусову направлению $(0,\infty)$ равносильно принадлежности множества H классу NED-множеств в $\mathbb{R}^n$.

§ 2. Достаточность семейства кусочно линейных дуг

Континуум $\gamma\subset\mathbb{R}^n$ называем *кусочно линейным* на непустом открытом множестве $G\subset\mathbb{R}^n$, если для каждой точки $x\in\gamma\cap G$ имеется замкнутый шар $\overline{B}(x,r)\subset G$ такой, что множество $\overline{B}(x,r)\cap\gamma$ состоит из конечного числа прямолинейных отрезков.

2.1. Теорема. *Пусть непустые множества $E_0, E_1\subset\mathbb{R}^n$ имеют в $\overline{\mathbb{R}}^n$ непересекающиеся замыкания, и пусть Γ — семейство всех континуумов $\gamma\subset\mathbb{R}^n$, для которых $E_0\cap\gamma\neq\varnothing\neq E_1\cap\gamma$. Пусть G — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n\setminus(E_0\cup E_1)$ и Γ_G — семейство всех тех континуумов из Γ, которые кусочно линейны на G. Тогда*

(a) *семейство $\mathscr{A}$ всех тех допустимых метрик для Γ_G, которые непрерывны на G, является достаточным для Γ_G;*

(b) *семейство Γ_G является полным подсемейством в Γ.*

Доказательство. (a) На заданном открытом множестве G с непустой границей ∂G имеется вещественная неотрицательная функция $\Phi(x)$, локально кусочно линейная на G, для которой $c_1\,\mathrm{dist}(x,\partial G)\le\Phi(x)\le c_2\,\mathrm{dist}(x,\partial G)$ во всех точках $x\in G$, а в точках дифференцируемости выполняется оценка для модуля градиента $|\nabla\Phi(x)|\le M$; при этом константы c_1, c_2 и M зависят только от n (см. утверждение 6.1). Продолжив функцию Φ тождественным нулем на $\mathbb{R}^n$, рассмотрим функцию $\tilde r(x) = (2M\max\{1,c_2\})^{-1}\min\{\Phi(x),1\}$, которая локально кусочно линейна и положительна на G, непрерывна на $\mathbb{R}^n$ и имеет в точках дифференцируемости оценку для модуля градиента $|\nabla\tilde r(x)|\le 1/2$. Так как компакты $\overline{E}_0,\overline{E}_1\subset\overline{\mathbb{R}}^n$ не пересекаются, то (см. [23, п. 5.23]) $M_0 = M(\Gamma_G)\le M(\Gamma)<+\infty$. Поэтому для произвольно заданного $\varepsilon>0$ имеется полунепрерывная снизу допустимая метрика $\rho\in\mathrm{Adm}(\Gamma_G)$, для которой

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}[\rho(x)]^n\,dV < M_0+\varepsilon_0,$$

где ε_0 — положительный корень уравнения $2\varepsilon_0(1+M_0+\varepsilon_0)=\varepsilon$.

Положив $r(x) = (1-(1+\varepsilon_0)^{-1/n})\tilde r(x)$, применим к допустимой метрике ρ оператор усреднения с переменным ядром, использованный в [24] в аналогичной ситуации и детально изученный в [22]:

$$T[\rho](x) = \omega_n^{-1}\int\limits_{y\in B(0,1)}\rho(x+r(x)y)\,dV.$$

В силу известных свойств оператора T [22, лемма 4.3] функция $T[\rho](x)$ полунепрерывна снизу, непрерывна на множестве G, и так как $r(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $k = 1 - (1+\varepsilon_0)^{-1/n}$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (T[\rho](x))^n \, dV \le \frac{M_0 + \varepsilon_0}{(1-k)^n} = (1+\varepsilon_0)(M_0+\varepsilon_0) \le M_0 + \varepsilon. \tag{2.1.1}$$

При любом фиксированном $y \in B(0,1)$ преобразование $\Psi_y(x) = x + r(x)y$ локально кусочно аффинно на G, тождественно на $\mathbb{R}^n \setminus G$, при этом для всех $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$(1-k)|a-b| \le |\Psi_y(a) - \Psi_y(b)| = |a - b + (r(a) - r(b))y| \le (1+k)|a-b|,$$

т. е. Ψ_y — билипшицевый гомеоморфизм пространства $\mathbb{R}^n$, переводящий множество G в себя (ибо $r(x) < \tilde{r}(x) < \operatorname{dist}(x, \partial G)$ при всех $x \in G$). Следовательно, обратное отображение Ψ_y^{-1} также локально кусочно аффинно на G и тождественно вне этого множества. Поэтому образ любого континуума $\gamma \in \Gamma_G$ при преобразовании Ψ_y^{-1} остается локально кусочно линейным на G континуумом, соединяющим E_0 и E_1, т. е. $\Psi_y^{-1}(\gamma) \in \Gamma_G$. В силу допустимости метрики ρ для семейства Γ_G при любом $y \in B(0,1)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{t \in \Psi_y^{-1}(\gamma)} \rho(t) \, d\mathscr{H}^1 \ge 1. \tag{2.1.2}$$

Если $\gamma \in \Gamma_G$, то множество $G \cap \gamma$ можно представить в виде счетного объединения $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} l_j$ прямолинейных отрезков (открытых, замкнутых или полуоткрытых), попарно не налегающих друг на друга (т. е. $l_j \cap l_s$ содержит не более одной точки при $j \ne s$) и таких, что функция $r(x)$ линейна на каждом l_j. На каждом из отрезков l_j, учитывая совпадение одномерной меры Хаусдорфа $\mathscr{H}^1$ с линейной мерой Лебега $\mathscr{L}_1$, применяем теорему Тонелли к повторному интегралу от неотрицательной борелевской функции:

$$\int\limits_{x \in l_j} T[\rho](x) \, d\mathscr{L}^1 = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{x \in l_j} \left\{ \int\limits_{y \in B(0,1)} \rho(x + r(x)y) \, dV \right\} d\mathscr{L}^1$$
$$= \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{y \in B(0,1)} \left\{ \int\limits_{x \in l_j} \rho(\Psi_y(x)) \, d\mathscr{L}^1 \right\} dV \ge \dots .$$

Выполнив во внутреннем интеграле линейную замену переменной $x = \Psi_y^{-1}(z)$ с коэффициентом растяжения $(1+k)^{-1} \le k_j \le (1-k)^{-1}$, получим оценку

$$\int\limits_{x \in l_j} \rho(\Psi_y(x)) \, d\mathscr{L}^1 = \int\limits_{z \in \Psi_y^{-1}(l_j)} \rho(z) k_j \, d\mathscr{L}^1 \ge \frac{1}{1+k} \int\limits_{z \in \Psi_y^{-1}(l_j)} \rho(z) \, d\mathscr{L}^1,$$

с учетом которой продолжаем прерванное соотношение:

$$\dots \ge \frac{1}{(1+k)\omega_n} \int\limits_{y \in B(0,1)} \left\{ \int\limits_{x \in \Phi_y^{-1}(l_j)} \rho(x) \, d\mathscr{H}^1 \right\} dV.$$

Просуммировав полученное неравенство по всем j с учетом (2.1.2), приходим к оценке

$$\int\limits_{x\in\gamma} T[\rho](x)\,d\mathscr{H}^1$$

$$= \int\limits_{x\in\gamma\setminus G} \rho(x)\,d\mathscr{H}^1 + \int\limits_{x\in\gamma\cap G} T[\rho](x)\,d\mathscr{H}^1 = \int\limits_{x\in\gamma\setminus G} \rho(x)\,d\mathscr{H}^1 + \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{x\in l_j} T[\rho](x)\,d\mathscr{H}^1$$

$$\geq \frac{1}{(1+k)\omega_n}\int\limits_{y\in B(0,1)}\Bigg\{\int\limits_{x\in\gamma\setminus G=\Psi_y^{-1}(\gamma)\setminus G}\rho(x)\,d\mathscr{H}^1 + \int\limits_{x\in\Phi_y^{-1}(\gamma)\cap G}\rho(x)\,d\mathscr{H}^1\Bigg\}\,dV$$

$$= \frac{1}{(1+k)\omega_n}\int\limits_{y\in B(0,1)}\Bigg\{\int\limits_{x\in\Psi_y^{-1}(\gamma)}\rho(x)\,d\mathscr{H}^1\Bigg\}\,dV \geq \frac{1}{1+k}.$$

Следовательно, $\tilde\rho(x) = (1+k)T[\rho](x)$ является допустимой метрикой для семейства Γ_G, полунепрерывной снизу и непрерывной на множестве G, т. е. $\tilde\rho \in \mathscr{A}$. При этом с учетом (2.1.1) и неравенств $\varepsilon_0 < \varepsilon$, $k < 1-(1+\varepsilon)^{-1/n}$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}[\tilde\rho(x)]^n\,dV = (1+k)^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}T[\rho](x)^n\,dV \leq (2-(1+\varepsilon)^{-1/n})^n(M_0+\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\inf_{\rho\in\mathscr{A}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}[\rho(x)]^n\,dV \leq (2-(1+\varepsilon)^{-1/n})^n(M_0+\varepsilon).$$

Устремив ε к 0, получим соотношение

$$M(\Gamma_G) \leq \inf_{\rho\in\mathscr{A}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}[\rho(x)]^n\,dV \leq M_0 = M(\Gamma_G),$$

доказывающее достаточность подсемейства $\mathscr{A}$ допустимых метрик для семейства континуумов Γ_G.

(b) Поскольку семейство Γ' всех континуумов из Γ, имеющих конечную одномерную меру Хаусдорфа, полно в Γ, то $M(\Gamma) = M(\Gamma')$. Так как континуум с конечной одномерной мерой Хаусдорфа является дугообразно связным (см. утверждение 6.2), любой континуум $\gamma \in \Gamma'$ содержит жорданову дугу $\gamma_1 \subset \gamma$, имеющую концы в E_0 и E_1. Поскольку $\mathscr{H}^1(\gamma_1) \leq \mathscr{H}^1(\gamma) < +\infty$, то γ_1 — спрямляемая жорданова дуга. Следовательно, семейство Γ' минорируется семейством Γ_0 всех спрямляемых жордановых дуг из Γ, поэтому (см. [25, теорема 1(c)]) $M(\Gamma') \leq M(\Gamma_0)$. Обратное неравенство следует из включения $\Gamma_0 \subset \Gamma'$ и монотонности модуля (см. [25, теорема 1(a)]). Таким образом,

$$M(\Gamma) = M(\Gamma') = M(\Gamma_0). \tag{2.1.3}$$

Возьмем произвольную допустимую для Γ_G метрику $\rho \in \mathscr{A}$ и произвольную локально спрямляемую жорданову дугу $\gamma \in \Gamma_0$ и зададим произвольно малое $\delta > 0$. Множество $\gamma \cap G$ распадается в не более чем счетное объединение $\gamma \cap G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\tau_k$ открытых поддуг $\tau_k \subset G$ с концами $a_k, b_k \in \partial G$. Фиксируя на τ_k направление от a_k к b_k, зададим последовательность точек $\{q_{k,j}\} \subset \tau_k$, $j = 0, \pm1, \pm2, \dots$, таких, что $q_{k,j+1} > q_{k,j}$ и $q_{k,j} \to b_k$ при $j \to +\infty$, $q_{k,j} \to a_k$ при $j \to -\infty$. Эти точки разбивают дугу τ_k на поддуги $\tau_{k,j}$ с концами $q_{k,j}, q_{k,j+1}$.

Так как каждая дуга $\tau_{k,j}$ есть компактное подмножество в G, а функция $\rho(x)$ непрерывна в G, то (вещественный вариант леммы Гурса см., например, [26, п. 550]) существует ломаная $\lambda_{k,j} \subset G$ с концами в тех же точках $q_{k,j}$, $q_{k,j+1}$ такая, что

$$\int\limits_{x\in\lambda_{k,j}} \rho(x)\, d\mathscr{L}^1 \leq \int\limits_{x\in\tau_{k,j}} \rho(x)\, d\mathscr{L}^1 + \frac{\delta}{2^{|j|+2}2^k}.$$

Тогда для дуги τ_k и континуума $\lambda_k = \{a_k\} \cup \{b_k\} \cup \left(\bigcup\limits_{j=-\infty}^{+\infty} \lambda_{k,j}\right)$, кусочно линейного на G, имеем оценку

$$\int\limits_{x\in\lambda_k} \rho(x)\, d\mathscr{H}^1 \leq \int\limits_{x\in\tau_k} \rho(x)\, d\mathscr{H}^1 + \frac{3\delta}{4\cdot 2^k}.$$

Заметив, что континуум $\gamma' = (\gamma \setminus G) \cup \left(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k\right)$ пересекается с множествами E_0, E_1 и кусочно линеен на G (т. е. $\gamma' \in \Gamma_G$), получаем оценку

$$\begin{aligned} 1 \leq \int\limits_{x\in\gamma'} \rho(x)\, d\mathscr{H}^1 &= \int\limits_{x\in\gamma\setminus G} \rho(x)\, d\mathscr{H}^1 + \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{x\in\lambda_k} \rho(x)\, d\mathscr{H}^1 \\ &\leq \int\limits_{x\in\gamma\setminus G} \rho(x)\, d\mathscr{H}^1 + \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{x\in\tau_k} \rho(x)\, d\mathscr{H}^1 + 2\delta = \int\limits_{x\in\gamma} \rho(x)\, d\mathscr{H}^1 + 2\delta. \end{aligned}$$

В силу произвольной малости $\delta > 0$ отсюда следует, что

$$\int\limits_{x\in\gamma} \rho(x)\, d\mathscr{H}^1 \geq 1,$$

поэтому $\rho(x)$ — допустимая метрика для Γ_0, т. е. $\mathscr{A} \subset \mathrm{Adm}(\Gamma_0)$. Учитывая, что $\mathscr{A}$ — достаточное семейство для Γ_G, и используя (2.1.3), получаем соотношение

$$M(\Gamma) = M(\Gamma_0) \leq \inf_{\rho\in\mathscr{A}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\rho(x)]^n\, dV = M(\Gamma_G).$$

Обратное неравенство $M(\Gamma_G) \leq M(\Gamma)$ следует из включения $\Gamma_G \subset \Gamma$ и свойства монотонности модуля семейств континуумов. Таким образом, $M(\Gamma_G) = M(\Gamma)$, что и требовалось доказать.

2.2. В теореме 2.1 реализовано доказательство утверждения, схематически намеченного в [10, теорема 1]. Необходимое уточнение формулировки теоремы 1 в [10] заключается в замене требования «аналитичности» условием «кусочной линейности» (более сильным, чем условие «кусочной аналитичности»), что не влияет на истинность остальных утверждений в [10].

§ 3. Критерий NED-множества

3.1. Лемма. *Пусть P — гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$. Компактное множество $H \subset \overline{P}$ является NED-множеством в $\overline{\mathbb{R}}^n$ тогда и только тогда, когда для любой точки $p \in H \setminus \{\infty\}$ и любой пары L_1, L_2 замкнутых прямолинейных отрезков ненулевой длины с общим концом в точке p выполняется равенство*

$$M(\Gamma(L_1, L_2; \mathbb{R}^n \setminus H)) = +\infty, \tag{3.1.1}$$

где $\Gamma(L_1, L_2; \mathbb{R}^n \setminus H)$ — семейство всех спрямляемых жордановых дуг γ с концами $a(\gamma) \in L_1 \setminus \{p\}$, $b(\gamma) \in L_2 \setminus \{p\}$ таких, что $(\gamma \setminus \{a(\gamma), b(\gamma)\}) \cap H = \varnothing$.

Доказательство. Необходимость. Гиперплоскость P разбивает $\mathbb{R}^n$ на два открытых полупространства $\mathbb{R}^n_+$ и $\mathbb{R}^n_-$. Пусть $H \subset \overline{P}$ — NED-множество в $\overline{\mathbb{R}}^n$, $p \in H \setminus \{\infty\}$ и L_1, L_2 — замкнутые отрезки с общим концом в точке p и длинами $\geq d > 0$.

Случай 1. Пусть отрезки L_1 и L_2 лежат в одном и том же замкнутом полупространстве $\mathbb{R}^n_+ \cup P$ или $\mathbb{R}^n_- \cup P$. Не ограничивая общности, можно считать, что $L_1 \cup L_2 \subset \mathbb{R}^n_+ \cup P$. Пусть J — инверсия относительно гиперплоскости P. Для семейства $\Gamma(L_1, L_2; \mathbb{R}^n_+)$ всех спрямляемых жордановых дуг в $(\mathbb{R}^n_+ \cup L_1 \cup L_2) \setminus \{p\}$, пересекающихся с каждым из множеств $L_1 \setminus \{p\}$ и $L_2 \setminus \{p\}$, и семейства Γ^* всех спрямляемых жордановых дуг в $\mathbb{R}^n$, пересекающихся с каждым из множеств $(L_1 \cup J(L_1)) \setminus \{p\}$ и $(L_2 \cup J(L_2)) \setminus \{p\}$, выполняется в силу принципа симметрии (см., например, [27, предложение 19]) и соотношения [23, следствие 5.33], равенство

$$M(\Gamma(L_1, L_2; \mathbb{R}^n_+)) = (1/2)M(\Gamma^*) = \infty.$$

Семейство $\Gamma(L_1, L_2; \mathbb{R}^n \setminus H)$ содержит в себе подсемейство $\Gamma(L_1, L_2; \mathbb{R}^n_+)$ с бесконечным модулем, поэтому само имеет бесконечный модуль.

Случай 2. Пусть $L_1 \subset \mathbb{R}^n_+$, $L_2 \subset \mathbb{R}^n_-$. Для произвольного $\varepsilon \in (0, d/2)$ рассмотрим непересекающиеся замкнутые отрезки $L_1(\varepsilon) = L_1 \setminus B(p, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n_+$ и $L_2(\varepsilon) = L_2 \setminus B(p, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n_-$. Учитывая, что $H \in \mathrm{NED}$, и применяя лемму Вяйсяля (см. утверждение 6.3), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} M(\Gamma(L_1, L_2; \mathbb{R}^n \setminus H)) &\geq M(\Gamma(L_1(\varepsilon), L_2(\varepsilon); \mathbb{R}^n \setminus H)) \\ &= M(\Gamma(L_1(\varepsilon), L_2(\varepsilon))) \geq c_n \operatorname{Ln}(d/\varepsilon) \end{aligned}$$

с константой c_n, зависящей лишь от n. Устремив ε к нулю, получим требуемое равенство (3.1.1).

Достаточность. Пусть E и F — непересекающиеся невырожденные континуумы в $\mathbb{R}^n \setminus H$ и $G = \mathbb{R}^n \setminus (E \cup F)$. Рассмотрим семейство Γ' всех кусочно линейных в G спрямляемых жордановых дуг γ с концами $a(\gamma) \in E$, $b(\gamma) \in F$ таких, что $\gamma \setminus \{a(\gamma), b(\gamma)\} \subset G$. По теореме 2.1(b) справедливо равенство $M(\Gamma') = M(\Gamma(E, F))$, поэтому достаточно доказать, что

$$M(\Gamma') \leq M(\Gamma(E, F; \mathbb{R}^n \setminus H)). \tag{3.1.2}$$

Пусть $\rho(x)$ — произвольная допустимая метрика для семейства $\Gamma(E, F; \mathbb{R}^n \setminus H)$, для которой $\int\limits_{\mathbb{R}^n} [\rho(x)]^n \, dV = A < +\infty$. Положив $\rho_1(x) = \rho(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus P$ и $\rho_1(x) = +\infty$ при $x \in P$, получим допустимую метрику для того же семейства $\Gamma(E, F; \mathbb{R}^n \setminus H)$ с тем же самым объемным интегралом $\int\limits_{\mathbb{R}^n} [\rho_1(x)]^n \, dV = A$. Покажем, что $\rho_1(x) \in \mathrm{Adm}(\Gamma')$. Возьмем произвольно $\gamma \in \Gamma'$. Если хотя бы одно из звеньев, составляющих кусочно линейную дугу γ, лежит в гиперплоскости P, то $\int\limits_{\gamma} \rho_1(x) \, d\mathscr{H}^1 = +\infty > 1$. Допустим, что

$$\int\limits_{\gamma} \rho_1(x) \, d\mathscr{H}^1 = 1 - \delta < 1, \tag{3.1.3}$$

$\delta \in (0, 1)$. Тогда множество $\gamma \cap H \subset P$, состоящее из изолированных точек $Q_1, Q_2, \ldots$, не более чем счетно. В достаточно малой окрестности каждой такой точки Q_j дуга γ есть объединение двух невырожденных прямолинейных отрезков $L_{1,j}$ и $L_{2,j}$ с общим концом в точке Q_j. Так как $M(\Gamma(L_{1,j}, L_{2,j}; \mathbb{R}^n \setminus H)) = +\infty$, то функция $(2^{j+1}/\delta)\rho_1(x)$, суммируемая с n-й степенью на $\mathbb{R}^n$, не может быть допустимой метрикой для этого семейства. Значит, найдется континуум $\tau_j \subset \mathbb{R}^n \setminus H$ такой, что $\tau_j \cap L_{1,j} \neq \varnothing \neq \tau_j \cap L_{2,j}$, для которого

$$\frac{2^{j+1}}{\delta} \int\limits_{\tau_j} \rho_1(x)\, d\mathscr{H}^1 < 1. \tag{3.1.4}$$

Множество $\gamma \cup \tau_1 \cup \tau_2 \cup \dots$ содержит континуум τ, лежащий в $\mathbb{R}^n \setminus H$ и пересекающийся с каждым из множеств E и F, т. е. $\tau \in \Gamma(E, F; \mathbb{R}^n \setminus H)$. Так как в силу оценок (3.1.3), (3.1.4) выполняется неравенство

$$\int\limits_{\tau} \rho(x)\, d\mathscr{H}^1 \leq \int\limits_{\tau} \rho_1(x)\, d\mathscr{H}^1 \leq \int\limits_{\gamma} \rho_1(x)\, d\mathscr{H}^1 + \sum_j \int\limits_{\tau_j} \rho_1(x)\, d\mathscr{H}^1$$
$$\leq 1 - \delta + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{j+1}} = 1 - \delta + \frac{\delta}{2} < 1,$$

то мы получаем противоречие с тем, что ρ является допустимой метрикой для семейства $\Gamma(E, F; \mathbb{R}^n \setminus H)$. Следовательно, мы доказали, что $\int\limits_{\gamma} \rho_1(x)\, d\mathscr{H}^1 \geq 1$ для любой кривой $\gamma \in \Gamma'$, т. е. $\rho_1 \in \mathrm{Adm}(\Gamma')$. Это означает, что для любой допустимой метрики $\rho(x)$ семейства $\Gamma(E, F; \mathbb{R}^n \setminus H)$ выполняется неравенство

$$M(\Gamma') \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\rho_1(x)]^n\, dV = \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\rho(x)]^n\, dV.$$

Взяв в этом неравенстве инфимум по всем $\rho \in \mathrm{Adm}(\Gamma(E, F; \mathbb{R}^n \setminus H))$, получим требуемое соотношение (3.1.2). Лемма доказана.

3.2. Теорема. *Пусть гиперплоскость P разбивает пространство $\mathbb{R}^n$ на открытые полупространства $\mathbb{R}^n_+$ и $\mathbb{R}^n_-$. Пусть H — компактное подмножество в P. Для того чтобы H было NED-множеством, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $p \in H$ и любой пары невырожденных отрезков $L_1 \subset \mathbb{R}^n_+ \cup \{p\}$, $L_2 \subset \mathbb{R}^n_- \cup \{p\}$ с общим концом в точке p, ортогональных гиперплоскости P, выполнялось равенство*

$$M(\Gamma(L_1, L_2; \mathbb{R}^n \setminus H)) = +\infty, \tag{3.2.1}$$

где $\Gamma(L_1, L_2; \mathbb{R}^n \setminus H)$ — семейство всех континуумов $\gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus H$, пересекающихся с каждым из отрезков L_1 и L_2.

Доказательство. Необходимость следует из необходимости условия (3.1.1) в лемме 3.1.

Достаточность. Пусть $p \in H$, L_1 и L_2 — два отрезка ненулевой длины с общим концом в точке p. Если оба отрезка лежат в одном и том же замкнутом полупространстве ($\mathbb{R}^n_+ \cup P$ или $\mathbb{R}^n_- \cup P$), то равенство (3.1.1) выполняется (случай 1 в доказательстве леммы 3.1). Пусть $L_1 \subset \mathbb{R}^n_+ \cup \{p\}$ и $L_2 \subset \mathbb{R}^n_- \cup \{p\}$. Существует отображение Φ пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, тождественное на гиперплоскости P, аффинное на каждом из полупространств $\mathbb{R}^n_+$, $\mathbb{R}^n_-$ и такое, что отрезки $\Phi(L_1)$ и $\Phi(L_2)$ ортогональны гиперплоскости P, т. е. удовлетворяют условиям теоремы. Учитывая, что $\Phi(H) = H$, и используя свойство квазиинвариантности модуля семейства континуумов при K-квазиконформном отображении $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus H \to \mathbb{R}^n \setminus H$ (см., например, [28, теорема 34.1]), получаем неравенство

$$+\infty = M(\Phi(L_1), \Phi(L_2); \mathbb{R}^n \setminus H) \leq KM(L_1, L_2; \mathbb{R}^n \setminus H),$$

из которого следует, что $M(L_1, L_2; \mathbb{R}^n \setminus H) = +\infty$. Следовательно, выполняются условия достаточности в лемме 3.1, в силу которой H является NED-множеством. Теорема доказана.

Замечание. Условие достаточности в теореме 3.2 можно формально усилить, потребовав существования в каждой точке $p \in H$ какой-нибудь пары отрезков $L_1 \subset \mathbb{R}^n_+ \cup \{p\}$ и $L_1 \subset \mathbb{R}^n_- \cup \{p\}$ с общим концом в точке p, для которых выполняется равенство (3.2.1).

Простой достаточный признак NED-множества, лежащего на гиперплоскости P, формулируется в терминах геометрического условия, более слабого, чем сходное условие пористости множества относительно P.

3.3. Определение. Множество H, лежащее в гиперплоскости $P \subset \mathbb{R}^n$, *удовлетворяет условию* (A) (его можно назвать *условием связной достижимости*), если для любой $p \in H$ существует константа $s(p) > 0$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется невырожденный континуум $\gamma \subset B(p, \varepsilon) \cap (P \setminus H)$, у которого

$$\operatorname{diam}(\gamma) \geq s(p) \max_{x \in \gamma} |x - p|. \tag{3.3.1}$$

В частности, условие (A) выполняется с константой $s(p) = 1$, если $H \subset \mathrm{Cl}(P \setminus H)$ и для любой точки $p \in H$ имеется невырожденный континуум $\gamma' \subset (P \setminus H) \cup \{p\}$, содержащий эту точку. (Этот случай соответствует обычному определению достижимых граничных точек открытого в топологии гиперплоскости P множества $P \setminus H$, см. [29, гл. 2, § 3].) Условие (A) выполняется и в том случае, когда множество $P \setminus H$ плотно в P и имеет конечное число компонент связности.

3.4. Теорема. *Любое компактное множество H в гиперплоскости $P \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию* (A), *является* NED-*множеством в* $\mathbb{R}^n$. *В частности, если компактное множество H в гиперплоскости P не имеет внутренних точек в топологии P и множество $P \setminus H$ имеет конечное число компонент связности, то H есть* NED-*множество в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{R}^n \setminus P$ — объединение полупространств $\mathbb{R}^n_+$ и $\mathbb{R}^n_-$. Возьмем произвольно точку $p \in H$ и невырожденные отрезки $L_1 \subset \mathbb{R}^n_+ \cup \{p\}$ и $L_2 \subset \mathbb{R}^n_- \cup \{p\}$ с общим концом в точке p, ортогональные гиперплоскости P. Если мы покажем, что семейство $\Gamma(L_1, L_2; \mathbb{R}^n \setminus H))$ всех континуумов в $\mathbb{R}^n \setminus H$, пересекающихся с каждым из отрезков L_1 и L_2, имеет бесконечный модуль, то теорема 3.2 даст требуемое утверждение.

Допустим, что $M(\Gamma(L_1, L_2; \mathbb{R}^n \setminus H)) < +\infty$. Тогда для этого семейства континуумов найдется допустимая метрика $\rho(x)$, суммируемая на $\mathbb{R}^n$ с n-й степенью. Положим $\varepsilon = \tau(s(p))/2^{n+1}$, где $\tau(t)$ — функция Тейхмюллера в $\mathbb{R}^n$, выражающая конформную емкость экстремального кольца Тейхмюллера с параметром $t > 0$, см. [23, п. 7.18] (напомним, что это монотонно убывающая функция). Воспользовавшись абсолютной непрерывностью интеграла от суммируемой функции, найдем $\delta > 0$ такое, что $\delta < \min\{\text{длина}(L_1),\ \text{длина}(L_2)\}$ и

$$\int\limits_{B(p,\delta)} [\rho(x)]^n \, dV < \varepsilon.$$

Поскольку функция $\rho(x)$ остается допустимой метрикой и для семейства Γ_1 всех континуумов в $\overline{B}(p, \delta) \setminus H$, пересекающихся с каждым из отрезков L_1 и L_2, то

$M(\Gamma_1) < \varepsilon$.

Воспользовавшись условием (A), построим континуум $T \subset B(p,\delta)\setminus H$ такой, что $\operatorname{diam}(T) \geq s(p)\max\limits_{t\in T}|t-p|$, и отметим на нем точку t_0, для которой $|t_0-p| = \max\limits_{t\in T}|t-p|$. Тогда найдется точка $t_1 \in T$, для которой $|t_1-t_0| \geq s(p)|t_0-p|$. Обозначив символом J инверсию относительно сферы $\partial B(p,|t_0-p|)$, рассмотрим континуум $T\cup J(T)$. Для семейства Γ_2 всех континуумов в $\mathbb{R}^n$, пересекающихся как с $T\cup J(T)$, так и с прямой, содержащей отрезки L_1 и L_2, воспользуемся одной из известных нижних оценок модуля (см. [23, п. 7.34]):

$$M(\Gamma_2) \geq \tau\left(\frac{|t_0-p|}{|t_1-t_0|}\right) \geq \tau(s(p)) > 0. \tag{3.4.1}$$

В силу симметричности семейства Γ_2 относительно гиперплоскости P для модуля семейства Γ_3 всех континуумов из Γ_2, лежащих в $\mathbb{R}^n_+\cup(T\cup J(T))$, справедливо равенство (принцип симметрии см. в [27, предложение 19] или утверждение 6.5.1(I)) $M(\Gamma_3) = (1/2)M(\Gamma_2) \geq \tau(s(p))/2$. Семейство Γ_3 симметрично относительно сферы $\partial B(p,|t_0-p|)$; используя тот же принцип симметрии, для модуля семейства Γ_4 всех континуумов из Γ_3, лежащих в замкнутом шаре $\overline{B}(p,|t_0-p|)$, получаем равенство $M(\Gamma_4) = (1/2)M(\Gamma_3) \geq \tau(s(p))/4$. Наконец, для семейства Γ_5 всех континуумов, пересекающихся с каждым из отрезков L_1, L_2 и лежащих в $(\overline{B}(p,|t_0-p|)\setminus P)\cup T$, применение принципа симметрии (утверждение 6.5.1(II)) дает соотношение

$$M(\Gamma_5) = M(\Gamma_4)/2^{n-1} \geq \tau(s(p))/2^{n+1}.$$

Из включения $\Gamma_5 \subset \Gamma_1$ вытекает оценка $M(\Gamma_1) \geq s(p)/2^{n+1} = \varepsilon$, противоречащая ранее полученному неравенству $M(\Gamma_1) < \varepsilon$. Значит, $M(L_1, L_2; \mathbb{R}^n\setminus H) = +\infty$. Теорема доказана.

§ 4. Устранимость в шаровых слоях

4.1. Непустое множество K, лежащее в области $D \subset \mathbb{R}^n$, называем *некасательным к ∂D в точке $a \in \partial D$*, если существуют $r > 0$ и $0 < \alpha < \pi/4$ такие, что либо $K\cap B(a,r) = \varnothing$, либо для любого $x \in K\cap B(a,r)$ выполняется неравенство

$$\operatorname{dist}(x,\partial D) \geq |x-a|\sin\alpha. \tag{4.1.1}$$

4.2. Лемма. *Пусть гиперплоскость $P \subset \mathbb{R}^n$ является границей полупространства $\mathbb{R}^n_+$, $H \subset P$ — замкнутое множество и $a \in H$. Пусть $L \subset \mathbb{R}^n_+\cup\{a\}$ — отрезок ненулевой длины, $a \in L$, ортогональный гиперплоскости P, и $K \subset \mathbb{R}^n_+$ — непустое множество, некасательное к P в точке a. Пусть $\Gamma(L)$ — семейство всех континуумов $\gamma \subset \mathbb{R}^n_+\cup(P\setminus H)$, пересекающихся с каждым из множеств $P\setminus H$ и L, а $\Gamma(K,r)$ — семейство (возможно, пустое) всех континуумов в $\mathbb{R}^n_+\cup(P\setminus H)$, пересекающихся с каждым из множеств $P\setminus H$ и $K\cap\overline{B}(a,r)$. Если $M(\Gamma(L)) < +\infty$, то $M(\Gamma(K,r)) \to 0$ при $r \to 0$.*

Доказательство. Используя конечность $M(\Gamma(L))$, найдем допустимую метрику $\rho(x)$ для семейства $\Gamma(L)$, суммируемую на $\mathbb{R}^n$ со степенью n. Пусть l — длина отрезка L. Выберем $0 < r' < l$ и $0 < \alpha < \pi/4$ так, что для любой точки $x \in K\cap B(a,r')$ выполняется неравенство $\operatorname{dist}(x,P) \geq |x-a|\sin\alpha$.

Положим $\beta = 2^{-n}c_n\operatorname{Ln}(1+\operatorname{tg}\alpha)$, где c_n — константа из утверждения 6.3.

Из суммируемости $[\rho(x)]^n$ на $\mathbb{R}^n$ следует существование $r_0 < r'$ такого, что

$$\int\limits_{B(a,r_0)} [\rho(x)]^n \, dV < \beta/2. \tag{4.2.1}$$

Положим $r_1 = r_0/6$. Допустим, что нашелся континуум τ из семейства $\Gamma(K, r_1)$, для которого

$$\int\limits_{\tau} \rho(x) \, d\mathscr{H}^1 < 1/2. \tag{4.2.2}$$

Отметим какую-нибудь точку $b' \in \tau \cap K \cap B(a, r_1)$ и построим точку $b \in \mathbb{R}^n_+$ такую, что отрезок с концами b и b' ортогонален гиперплоскости P и $\operatorname{dist}(b, P) = \operatorname{dist}(b', P) + \operatorname{dist}(b', L)$. Заметив, что $\operatorname{dist}(b', P) \le |b' - a| < r_1$ и $\operatorname{dist}(b', L) \le |b' - a| < r_1$, получаем оценки $\operatorname{dist}(b', P) + \operatorname{dist}(b', L) < 2r_1$ и $|b - a| \le \operatorname{dist}(b, P) + \operatorname{dist}(b', L) < 3r_1$, в силу которых замкнутый шар $\overline{B}(b, \operatorname{dist}(b', P) + \operatorname{dist}(b', L))$ содержится в открытом шаре $B(a, 5r_1) \subset B(a, r_0)$. Рассмотрим шаровой слой

$$\mathscr{R} = \{x : \operatorname{dist}(b', L) \le |x - b| \le \operatorname{dist}(b', L) + \operatorname{dist}(b', P)\},$$

лежащий в шаре $B(a, r_0)$. Континуум τ пересекается с каждой из сфер, ограничивающих шаровой слой $\mathscr{R}$; это же верно и для отрезка L. Поэтому (см. утверждение 6.3) для семейства Γ_0 всех континуумов в $\mathscr{R}$, пересекающихся как с L, так и с τ, справедлива оценка

$$M(\Gamma_0) \ge c_n \operatorname{Ln} \frac{\operatorname{dist}(b', L) + \operatorname{dist}(b', P)}{\operatorname{dist}(b', L)} = c_n \operatorname{Ln} \left(1 + \frac{\operatorname{dist}(b', P)}{\operatorname{dist}(b', L)}\right).$$

Так как $\operatorname{dist}(b', P) \ge |b' - a| \sin(\alpha) = \operatorname{dist}(b', L) \operatorname{tg} \alpha$, то

$$M(\Gamma_0) \ge c_n \operatorname{Ln}(1 + \operatorname{tg} \alpha) = \beta 2^n. \tag{4.2.3}$$

Для любого $\gamma \in \Gamma_0$ континуум $\gamma \cup \tau$ принадлежит семейству $\Gamma(L)$, и в силу допустимости метрики ρ для этого семейства имеем оценку

$$1 \le \int\limits_{\gamma} \rho(x) \, d\mathscr{H}^1 + \int\limits_{\tau} \rho(x) \, d\mathscr{H}^1 < \int\limits_{\gamma} \rho(x) \, d\mathscr{H}^1 + \frac{1}{2},$$

из которой следует, что функция $\tilde{\rho}(x) = \{2\rho(x)$ при $x \in B(a, r_0)$; 0 при $|x - a| \ge r_0\}$ является допустимой метрикой для семейства Γ_0. Тогда из (4.2.1) и (4.2.3) вытекает неравенство

$$\frac{2^n \beta}{2} > 2^n \int\limits_{B(a,r_1)} [\rho(x)]^n \, dV \ge \beta 2^n,$$

дающее противоречие: $1/2 > 1$. Таким образом, неравенство (4.2.2) невозможно, поэтому функция $2\rho(x)$ служит допустимой метрикой для семейства $\Gamma(K, r_1)$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Воспользовавшись суммируемостью функции $[\rho(x)]^n$, найдем $r_2 < r_1$ такое, что

$$\int\limits_{B(a,r_2)} [2\rho(x)]^n \, dV < \varepsilon/2, \tag{4.2.4}$$

и выберем $r_3 < r_2$ так, чтобы

$$M(\Gamma(r_2, r_3)) = \frac{\Omega_{n-1}}{[\operatorname{Ln}(r_2/r_3)]^{n-1}} < \varepsilon/2, \tag{4.2.5}$$

где $\Gamma(r_2, r_3)$ — семейство всех континуумов в $\mathbb{R}^n$, пересекающихся с каждой из сфер $\{|x-a| = r_2\}$ и $\{|x-a| = r_3\}$. Для семейства Γ_1 всех континуумов из семейства $\Gamma(K, r_3)$, содержащихся в шаре $B(a, r_2)$, функция $\rho_1(x) = \{2\rho(x)$ при $x \in \overline{B}(a, r_2); 0$ при $|x-a| > r_2\}$ является, как показано выше, допустимой метрикой. Поэтому из (4.2.4) получаем неравенство

$$M(\Gamma_1) \leq \int\limits_{B(a,r_2)} [2\rho(x)]^n \, dV < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2.6}$$

Любой континуум $\gamma \in \Gamma(K, r_3)$ либо принадлежит семейству $\Gamma(r_2, r_3)$, либо содержится в шаре $B(a, r_2)$ и, следовательно, принадлежит семейству Γ_1, т. е. $\Gamma(K, r_3) \subset \Gamma(r_2, r_3) \cup \Gamma_1$. Свойство полуаддитивности модулей $M(\Gamma(K, r_3)) \leq M(\Gamma(r_2, r_3)) + M(\Gamma_1)$ и неравенства (4.2.5) и (4.2.6) приводят к оценке $M(\Gamma(K, r)) \leq M(\Gamma(K, r_3)) < \varepsilon$, справедливой при всех $r < r_3$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $M(\Gamma(K, r)) \to 0$ при $r \to 0$. Лемма доказана.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ введем следующие обозначения: $W(r_1, r_2) = \{x : r_1 < |x| < r_2\}$; для точки $e \in S(1)$ и $0 < \beta < \pi/2$ символом $\Phi(e, \beta)$ обозначаем замкнутый конус с вершиной в точке e, осью $\{x : x = te, 1 \leq t < +\infty\}$ и углом при вершине, равном β; для $r > 1$ полагаем $\Phi(e, \beta; r) = \Phi(e, \beta) \cap \overline{B}(0, r)$.

4.3. Лемма. *Пусть H — непустое замкнутое множество на сфере $S(1)$, $e \in H$. Пусть $r_0 > 1$ и*

$$M(\Gamma_H(S(r_0), S(1/r_0))) = M(\Gamma(S(r_0), S(1/r_0))), \tag{4.3.1}$$

где $\Gamma(S(r), S(1/r))$ — семейство всех континуумов в $\overline{W}(1/r_0, r_0)$, пересекающихся с каждой из сфер $S(r)$ и $S(1/r)$; а $\Gamma_H(S(r), S(1/r))$ — его подсемейство, состоящее из континуумов, не пересекающихся с H. Тогда найдется $\beta \in (0, \pi/2)$ такое, что при любом $r > 1$ семейство $\Gamma(r)$ всех континуумов $\gamma \subset W(1, r) \cup (S(1) \setminus H)$, пересекающихся с каждым из множеств $S(1) \setminus H$ и $\Phi(e, \beta; r)$, имеет бесконечный модуль, т. е. $M(\Gamma(r)) = +\infty$.

Доказательство. В силу [17, лемма 2.1] из (4.3.1) следует, что для любого $r > 1$

$$M(\Gamma_H(S(r), S(1/r)) = M(\Gamma(S(r), S(1/r))). \tag{4.3.2}$$

Рассмотрим семейство $\Gamma_H(S(1), S(r))$ всех континуумов в $W(1, r) \cup S(r) \cup (S(1) \setminus H)$, пересекающихся с каждым из множеств $S(1) \setminus H$ и $S(r)$. Из принципа симметрии (утверждение 6.5.1(II)) и равенства (4.3.2) следует, что для любого $r > 1$

$$\begin{aligned} M(\Gamma_H(S(1), S(r))) &= 2^{n-1} M(\Gamma_H(S(1/r), S(r))) \\ &= 2^{n-1} M(\Gamma(S(1/r), S(r))) = M(\Gamma(S(1), S(r))). \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Учитывая, что $t^{n-2}/(t-1)^{n-1} \to 0$ при $t \to +\infty$, найдем $t_0 > 2$, для которого

$$\frac{\Omega_{n-2}}{\omega_{n-1}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \frac{t_0^{n-2}}{(t_0 - 1)^{n-1}} < \frac{1}{2}, \tag{4.3.4}$$

и покажем, что $\beta = \operatorname{arctg} t_0 \in (0, \pi/2)$ обладает требуемыми свойствами.

Допустим противное: пусть $M(\Gamma(r^*)) < +\infty$ для некоторого $r^* > 1$. Тогда имеется метрика $\rho \in \operatorname{Adm}(\Gamma(r^*))$, суммируемая на $\mathbb{R}^n$ со степенью n. Для любого $h < r^* - 1$ функция $\rho_h(x)$, совпадающая с $\rho(x)$ при $1 \leq |x| \leq 1 + h$ и равная 0 в остальных точках, является допустимой метрикой для семейства $\Gamma(1 + h)$, в силу чего

$$M(\Gamma(1+h)) \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\rho_h(x)]^n\, dV = \int\limits_{\overline{W}(1,1+h)} [\rho(x)]^n\, dV.$$

Благодаря абсолютной непрерывности интеграла от суммируемой функции, правая часть этого неравенства стремится к нулю при $h \to 0$. Поэтому

$$M(\Gamma(1+h)) \to 0 \ \text{ при } h \to +0. \tag{4.3.5}$$

Для угла ϕ между радиус-векторами точек e и $x \in \Phi(e,\beta) \cap S(1+h)$ выполняется соотношение $((1+h)\cos\phi - 1)\operatorname{tg}\beta = (1+h)\sin\phi$, которое определяет функцию $\phi(h)$ в достаточно малом интервале $0 \le h < h_0$. При этом $\phi(0) = 0$ и $\phi'(0) = \operatorname{tg}\beta = t_0 > 2$. Следовательно, найдется $0 < h_1 < h_0$ такое, что при всех $h \in (0, h_1)$ выполняется неравенство $\phi(h) - h > 0$.

Построим открытые конусы $\Phi_1(h)$ и $\Phi_2(h)$ с вершиной в точке 0, с осью, заданной радиус-вектором точки e, и с углами при вершине $\phi(h)$ и $\phi(h) - h$ соответственно. Символом $\sigma(h)$ обозначим $(n-1)$-мерную меру сферической шапочки $S(1) \cap \Phi_2(h)$ и отметим, что

$$\omega_{n-1}[\sin(\phi(h) - h)]^{n-1} \le \sigma(h). \tag{4.3.6}$$

Рассмотрим следующие семейства континуумов: $\Gamma_3(h)$ — семейство всех континуумов в $W(1,h) \cup S(1+h) \cup (S(1) \setminus H)$, пересекающихся с каждым из множеств $S(1) \setminus H$ и $\overline{\Phi}_1(h) \cap S(1+h)$; $\Gamma_4(h)$ — семейство всех континуумов в $W(1,h) \cup S(1+h) \cup (S(1) \setminus H)$, пересекающихся с каждым из множеств $S(1) \setminus H$ и $S(1+h) \setminus \Phi_1(h)$; $\Gamma_5(h)$ — семейство всех континуумов в $\overline{W}(1,h)$, пересекающихся с каждым из множеств $S(1)$ и $S(1+h) \setminus \Phi_1(h)$.

Используя формулу для модуля семейства кривых в шаровом слое [28, п. 7.7], равенство (4.3.3) и полуаддитивность модуля семейств кривых [28, п. 6.2(3)], получаем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_{n-1}}{[\mathrm{Ln}(1+h)]^{n-1}} &= M(\Gamma(S(1), S(1+h))) = M(\Gamma_H(S(1), S(1+h))) \\ &\le M(\Gamma_3(h)) + M(\Gamma_4(h)) \le M(\Gamma(1+h)) + M(\Gamma_5(h)), \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$M(\Gamma(1+h)) \ge \Omega_{n-1}/[\mathrm{Ln}(1+h)]^{n-1} - M(\Gamma_5(h)). \tag{4.3.7}$$

Для оценки сверху величины $M(\Gamma_5(h))$ рассмотрим два семейства континуумов: $\Gamma_6(h)$ — семейство всех континуумов в $\overline{W}(1, 1+h) \cap \overline{\Phi}_1(h)$, пересекающих каждое из множеств $\partial\Phi_2(h)$ и $\partial\Phi_1(h)$; $\Gamma_7(h)$ — семейство всех континуумов в $\overline{W}(1, 1+h) \setminus \Phi_2(h)$, пересекающихся с каждым из множеств $S(1) \setminus \Phi_2(h)$ и $S(1+h) \setminus \Phi_2(h)$.

Монотонность и полуаддитивность модулей дают оценку

$$M(\Gamma_5(h)) \le M(\Gamma_6(h)) + M(\Gamma_7(h)).$$

Так как (см. [28, п. 7.7]) $M(\Gamma_7(h)) = [\Omega_{n-1} - \sigma(h)]/[\mathrm{Ln}(1+h)]^{n-1}$, из (4.3.7) вытекает оценка

$$M(\Gamma(1+h)) \ge \frac{\sigma(h)}{[\mathrm{Ln}(1+h)]^{n-1}} - M(\Gamma_6(h)). \tag{4.3.8}$$

Из (4.3.6) следует неравенство

$$\liminf_{h\to 0} \frac{\sigma(h)}{[\mathrm{Ln}(1+h)]^{n-1}} \ge \omega_{n-1}(\operatorname{tg}\beta - 1)^{n-1} = \omega_{n-1}(t_0 - 1)^{n-1}. \tag{4.3.9}$$

Воспользовавшись оценкой (6.4.1) в § 6, получим неравенство

$$M(\Gamma_6(h)) \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \Omega_{n-2} \frac{\operatorname{Ln}(1+h)}{h} \left(\frac{\phi(h)}{h}\right)^{n-2},$$

из которого имеем оценку

$$\limsup_{h\to 0} M(\Gamma_6(h)) \le (\pi/2)^{n-1}\Omega_{n-2} t_0^{n-2}. \tag{4.3.10}$$

Таким образом, из (4.3.8)–(4.3.10) и (4.3.4) (с учетом того, что $t_0 > 2$) вытекает соотношение

$$\liminf_{h\to 0} M(\Gamma(1+h)) \ge \omega_{n-1}(t_0-1)^{n-1}\left[1 - \frac{\Omega_{n-2}}{\omega_{n-1}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \frac{t_0^{n-2}}{(t_0-1)^{n-1}}\right] \ge \frac{\omega_{n-1}}{2},$$

противоречащее соотношению (4.3.5). Лемма доказана.

§ 5. Основные теоремы

5.1. Теорема. *Пусть H — непустое замкнутое подмножество единичной сферы $S(1) = \{x : |x| = 1\}$. Пусть для некоторых $0 < r_1 < 1 < r_2 < +\infty$*

$$M(\Gamma_H(S(r_1), S(r_2))) = M(\Gamma(S(r_1), S(r_2))), \tag{5.1.1}$$

где $\Gamma(S(r_1), S(r_2))$ — семейство всех континуумов в $\mathbb{R}^n$, пересекающихся с каждой из сфер $S(r_1)$ и $S(r_2)$, а $\Gamma_H(S(r_1), S(r_2))$ — семейство всех тех континуумов из $\Gamma(S(r_1), S(r_2))$, которые не пересекаются с множеством H. Тогда H является NED-*множеством в $\overline{\mathbb{R}}^n$.*

Доказательство. Допустим, что H не является NED-множеством. Из (5.1.1) следует, в частности, что $H \ne S(1)$. Возьмем некоторую точку $q \in S(1) \setminus H$ и мёбиусово преобразование $\mu : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$, переводящее точку q в ∞, а сферу $S(1)$ — в гиперплоскость P. Так как свойство NED сохраняется при мёбиусовых преобразованиях (см. [3, § 3]), то ограниченное замкнутое множество $\mu(H) \subset P$ также не является NED-множеством. Тогда по теореме 3.2 найдется точка $p \in \mu(H)$ и пара невырожденных отрезков $L_1 \subset \mathbb{R}^n_+ \cup \{p\}$, $L_2 \subset \mathbb{R}^n_- \cup \{p\}$, для которых

$$M(\Gamma(L_1, L_2; \mathbb{R}^n \setminus \mu(H))) < +\infty, \tag{5.1.2}$$

где $\Gamma(L_1, L_2; \mathbb{R}^n \setminus \mu(H))$ — семейство всех континуумов в $\mathbb{R}^n \setminus \mu(H)$, пересекающихся с каждым из отрезков L_1 и L_2. Положим $e = \mu^{-1}(p)$. Из равенства (5.1.1) и [17, лемма 2.1]) следует, что существует $r_0 \in (1, 2)$, при котором выполняется условие (4.3.1) леммы 4.3. В силу этой леммы имеется $\beta \in (0, \pi/2)$ такое, что при любом $r \in (1, r_0)$ для семейства $\Gamma(r)$ всех континуумов в $\{x : |x| > 1\} \cup (S(1) \setminus H)$, пересекающихся с каждым из множеств $S(1) \setminus H$ и $\Phi(e, \beta; r)$, верно равенство $M(\Gamma(r)) = +\infty$. Компактное множество $K(r) = \mu(\Phi(e, \beta; r)) \subset \mathbb{R}^n_+ \cup \{p\}$ является некасательным к P в точке p в силу консерватизма углов при мёбиусовых отображениях. Для семейства $\Gamma_0(r)$ всех континуумов в $\mathbb{R}^n_+ \cup \{P \setminus \mu(H)\}$, пересекающихся как с $P \setminus \mu(H)$, так и с множеством $K(r)$, при всех $r \in (1, r_0)$ выполняется равенство

$$M(\Gamma_0(r)) = M(\Gamma(r)) = +\infty. \tag{5.1.3}$$

Однако из условия (5.1.2) и леммы 4.2 следует, что $M(\Gamma_0(K(r))) \to 0$ при $r \to 1$, и это противоречит соотношению (5.1.3). Следовательно, H является NED-множеством. Теорема доказана.

5.2. Теорема. *Собственное замкнутое подмножество H единичной сферы $S(1) \subset \mathbb{R}^n$ является NED-множеством в том и только в том случае, когда оно* *имеет нулевой емкостной дефект по мёбиусову направлению* $(0,\infty)$ (*см. определение* 1.2).

Доказательство. Если H является NED-множеством, то при любом $R>1$ верно равенство $\Lambda(\Gamma_H(S(1/R),S(R)))=\Lambda(S(1/R),S(R))=2\,\mathrm{Ln}(R)$ для экстремальных длин семейства $\Gamma(S(1/R),S(R))$ всех континуумов в $\mathbb{R}^n$, пересекающихся с каждой из сфер $S(1/R)$ и $S(R)$, и его подсемейства $\Gamma_H(S(1/R),S(R))$, состоящего из континуумов, не пересекающихся с H. Формула (1.2.1) для емкостного дефекта дает в этом случае равенство $\delta(H)=0$.

Пусть теперь $\delta(H)=0$. В [17, теорема 2.2]) доказано, что отсюда следует равенство $M(\Gamma_H(S(1/R),S(R)))=M(\Gamma(S(1/R),S(R)))$ и при любом $R>1$. По теореме 5.1 это означает, что H является NED-множеством в $\mathbb{R}^n$. Теорема доказана.

Для компактного множества $H\subset\overline{\mathbb{R}}^n$ и пары различных точек $a,b\in\overline{\mathbb{R}}^n\setminus H$ емкостный дефект $\delta(H;(a,b))$ по мёбиусову направлению (a,b), введенный в [17], совпадает с величиной $\delta(\mu(H))$, где $\mu:\overline{\mathbb{R}}^n\to\overline{\mathbb{R}}^n$ — произвольное мёбиусово преобразование, переводящее a в 0 и b в ∞. С использованием этого понятия из теоремы 5.2 непосредственно вытекает

5.3. Следствие. *Если собственное замкнутое подмножество H гиперсферы $S(1)\subset\mathbb{R}^n$ имеет нулевой емкостный дефект по некоторому мёбиусову направлению (a,a^*), заданному парой точек $a,a^*\notin S(1)$, симметричных относительно $S(1)$, то H является NED-множеством и имеет нулевой емкостной дефект $\delta(H;(b,c))$ по любому мёбиусову направлению (b,c), где $b,c\notin H$.*

Вопрос. Автору неизвестно, останется ли верным заключение в следствии 5.3, если в посылке не требовать симметричности точек $a,a^*\in\overline{\mathbb{R}}^n\setminus S(1)$ относительно сферы $S(1)$.

§ 6. Дополнения

В независимых от предыдущего текста обозначениях приведем обоснование следующего утверждения.

6.1. Утверждение. *Для любого открытого множества $G\subset\mathbb{R}^n$ с непустой границей $F=\partial G$ существует такая вещественная неотрицательная функция $\Delta(x)$, что*

(a) $c_1\operatorname{dist}(x,F)\le\Delta(x)\le c_2\operatorname{dist}(x,F)$ *для всех* $x\in G$;

(b) $\Delta(x)$ *является локально кусочно линейной функцией в G и в точках дифференцируемости имеет оценку $|\nabla\Delta(x)|\le M$, где константы M,c_1,c_2 зависят лишь от n.*

Доказательство. Построение требуемой функции проводим по тексту книги [30, гл. 6, § 1, 2]. Изменение в этот текст вносятся после завершения доказательства предложения 3, с. 202, строка 22 сверху:

«Положим $\varepsilon=1/8$. Пусть теперь Q_0 обозначает куб единичной длины с центром в начале координат. Возьмем кусочно линейную функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\in Q_0,\\ (1+\varepsilon-2\max\{|x_1|,\dots,|x_n|\})/2\varepsilon & \text{при } x=(x_1,\dots,x_n)\in(1+\varepsilon)Q_0\setminus Q_0,\\ 0 & \text{при } x\notin(1+\varepsilon)Q_0\end{cases}$$

... (далее по тексту) .... Следует заметить, что в точках дифференцируемости функции $\varphi_k(x)$

$$|\nabla\varphi_k(x)|\le A(\operatorname{diam}Q_k)^{-1},$$

где константа A зависит лишь от n ... (далее по тексту до конца §1).»

Текст теоремы 2 в § 2 на с. 203 следует заменить текстом нашего утверждения 6.1. Текст доказательства теоремы 2 до с. 204, строка 8 сверху включительно остается без изменений. Последнюю фразу (строки 8, 9 сверху) заменяем фразой «Это дает нам желаемый результат с $M = AN$». Таким образом, получаем полный текст доказательства утверждения 6.1.

6.2. Утверждение. *В метрическом пространстве любой невырожденный континуум (т. е. компактное связное множество) γ с конечной одномерной мерой Хаусдорфа является дугообразно связным, т. е. любую пару его точек можно соединить в нем жордановой спрямляемой дугой.*

Доказательство. Допустим, что нашлась точка $p \in \gamma$, в которой γ не является локально связным. Тогда по теореме Мура — Заранкевича — Урысона [31, гл. 6, § 49.VI, теорема 1] существует невырожденный континуум сходимости (см. определение в [31, гл. 6, § 49.VI]) $\tau \subset \gamma$, $\operatorname{diam}(\tau) = d > 0$, содержащий точку p. Это значит, что имеется последовательность попарно не пересекающихся континуумов $\tau_j \subset \gamma$, сходящаяся к τ. Так как начиная с некоторого номера j_0 диаметры этих континуумов не менее $d/2$, то $\mathscr{H}^1(\gamma) \geq \sum\limits_{j=j_0}^{\infty}(d/2) = +\infty$, что противоречит условию конечности $\mathscr{H}^1(\gamma)$. Таким образом, мы показали, что γ является локально связным в каждой своей точке. Тогда по теореме Мазуркевича — Мура — Менгера [31, гл. 6, § 50.I, теорема 2] континуум γ является локально дугообразно связным, а следовательно (см. [31, гл. 6, § 50.I, теорема 2]), и (глобально) дугообразно связным. Утверждение доказано.

6.3. Утверждение (см., например, [23, п. 5.32]). *Пусть $0 < a < b$ и множества $E, F \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что любая сфера $\partial B(0,t)$ с $t \in (a,b)$ пересекает каждое из них. Тогда для семейства $\Gamma(E,F;\overline{B}(0,b) \setminus B(0,a))$ всех континуумов $\gamma \in \overline{B}(0,b) \setminus B(0,a)$, пересекающихся с каждым из множеств E и F, выполняется оценка*

$$M(\Gamma(E,F;\overline{B}(0,b) \setminus B(0,a))) \geq c_n \operatorname{Ln}(b/a),$$

где положительная константа c_n зависит лишь от n.

6.4. Оценка модуля семейства кривых в коническо-сферическом слое. В $\mathbb{R}^n$ с фиксированным ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_n$ и точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ введем сферическо-цилиндрическую систему координат (ρ, φ, ω) следующим образом. Полагаем $\rho(x) = |x| = \left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{1/2}$; для $x \in \mathbb{R}^n \setminus Ox_1$ символом $\varphi(x) \in (0,\pi)$ обозначаем угол между радиус-вектором точки x и координатным ортом e_1; $\omega(x) = (x_2, \dots, x_n)/\left(x_2^2 + \dots + x_n^2\right)^{1/2} \in S_{n-2}$, где S_{n-2} есть гиперсфера единичного радиуса в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$. При этом для точки $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$x_1 = \rho\cos\varphi; \quad (x_2, \dots, x_n) = \omega\rho\sin\varphi.$$

Коническо-сферическим слоем в пространстве $\mathbb{R}^n \setminus Ox_1$ называем множество

$$Q(\rho_1, \rho_2; \varphi_1, \varphi_2) = \{x : 0 < \rho_1 < \rho(x) < \rho_2;\ 0 < \varphi_1 < \varphi(x) < \varphi_2 < \pi/2\}.$$

Отображение $F(x) = (\omega(x) \cdot \varphi(x), \operatorname{Ln}\rho(x)) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^1$ осуществляет диффеоморфизм области $Q = Q(\rho_1, \rho_2; \varphi_1, \varphi_2)$ на цилиндрическое кольцо $\{z \in \mathbb{R}^{n-1} : \varphi_1 < |z| < \varphi_2\} \times \{\operatorname{Ln}\rho_1 < t < \operatorname{Ln}\rho_2\}$. Введем в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ полярную систему координат (r, ω), где $r(z) = |z|$ и $\omega \in S_{n-2}$, и вычислим коэффициент квазиконформности отображения F.

Для любой фиксированной точки $(\rho_0, \varphi_0, \omega_0) \in Q$ отображение F переводит $(n-2)$-мерную сферу $\{x : \rho(x) = \rho_0, \varphi(x) = \varphi_0\}$ радиуса $\rho_0 \sin\varphi_0$ в $(n-1)$-мерную сферу $\{|z| = \varphi_0\}$ растяжением с коэффициентом $k_1 = \varphi_0/(\rho_0 \sin\varphi_0)$. Дугу окружности $\{x : \rho(x) = \rho_0, \omega(x) = \omega_0\}$ длины $\rho_0(\varphi_2 - \varphi_1)$ отображение F переводит в отрезок $\{\omega = \omega_0, \varphi_1 < r < \varphi_2\}$ подобием с коэффициентом растяжения $k_2 = 1/\rho_0$. Наконец, радиальный отрезок $\{x : \varphi(x) = \varphi_0,\ \omega(x) = \omega_0,\ \rho_1 < \rho(x) < \rho_2\}$ оно переводит в отрезок $\{(z,t) : z = \omega_0\varphi_0,\ \operatorname{Ln}\rho_1 < t < \operatorname{Ln}\rho_2\}$ по формуле $t = \operatorname{Ln}\rho$. В исследуемой точке осуществляется растяжение с коэффициентом $k_3 = 1/\rho_0$. Так как в точке $(\rho_0, \varphi_0, \omega_0)$ диффеоморфизм F переводит ортогональный репер из n направлений в ортогональный репер, то касательное отображение dF в этой точке с точностью до преобразований вращения есть растяжение по n взаимно ортогональным направлениям с коэффициентами $\varphi_0/(\rho_0 \sin\varphi_0)$ по одному из направлений и $1/\rho_0$ по всем остальным направлениям. Следовательно, для внутреннего и внешнего коэффициентов квазиконформности отображения F имеем при $\varphi_2 < \pi/2$ оценку

$$K_I[F] = \max_{\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2} \frac{\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\varphi_2}{\sin\varphi_2} \le \frac{\pi}{2}; \quad K_O[f] \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}.$$

Найдем верхнюю оценку для модуля семейства Γ всех континуумов в $\overline{Q}(\rho_1, \rho_2; \varphi_1, \varphi_2)$, пересекающихся с каждым из множеств (конические грани) $\{x \in \overline{Q} : \varphi(x) = \varphi_1\}$ и $\{x \in \overline{Q} : \varphi(x) = \varphi_2\}$. Так как

$$M(\Gamma) \le K_O[F] M(F(\Gamma)) \le (\pi/2)^{n-1} M(F(\Gamma)),$$

задача сводится к вычислению модуля семейства $F(\Gamma)$.

В пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ для n-модуля (не конформного) $m(\Gamma')$ семейства Γ' всех континуумов, соединяющих граничные компоненты шарового слоя $\{z \in \mathbb{R}^{n-1} : \varphi_1 < |z| < \varphi_2\}$, имеется формула [32, лемма 2]

$$m(\Gamma') = \frac{\Omega_{n-2}}{(n-1)^{n-1}} \frac{1}{\left(\varphi_2^{1/(n-1)} - \varphi_1^{1/(n-1)}\right)^{n-1}}$$

(см. также первую формулу в [33, предложение 6.4]), в которой вместо $p - n/(p-1)$ следует поставить $(p-n)/(p-1)$). Следовательно, для семейства $F(\Gamma)$ всех континуумов в $F(Q)$, соединяющих «боковые» поверхности $\{(z,t) : |z| = \varphi_1, \operatorname{Ln}\rho_1 \le t \le \operatorname{Ln}\rho_2\}$ и $\{(z,t) : |z| = \varphi_2,\ \operatorname{Ln}\rho_1 \le t \le \operatorname{Ln}\rho_2\}$ цилиндрического слоя, имеем формулу

$$\begin{aligned} M(F(\Gamma)) &= \frac{\Omega_{n-2}}{(n-1)^{n-1}} \frac{\operatorname{Ln}(\rho_2/\rho_1)}{\left(\varphi_2^{1/(n-1)} - \varphi_1^{1/(n-1)}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\Omega_{n-2} \operatorname{Ln}(\rho_2/\rho_1)}{(n-1)^{n-1}(\varphi_2 - \varphi_1)^{n-1}} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \varphi_1^{\frac{k}{n-1}} \varphi_2^{\frac{n-2-k}{n-1}}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

(для случая $n = 3$ см. формулу (11) в [34, пример 5]). В частности,

$$M(F(\Gamma)) \le \frac{\Omega_{n-2} \operatorname{Ln}(\rho_2/\rho_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)^{n-1}} \varphi_2^{n-2}.$$

Таким образом, для модуля семейства Γ с учетом коэффициента квазиконформности отображения F получаем верхнюю оценку

$$M(\Gamma) \le (\pi/2)^{n-1} \frac{\Omega_{n-2} \operatorname{Ln}(\rho_2/\rho_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)^{n-1}} \varphi_2^{n-2}, \tag{6.4.1}$$

на которую и делается ссылка в доказательстве леммы 4.3.

6.5. Под «кривой» в пространстве $\mathbb{R}^n$ понимается не более чем счетное объединение невырожденных континуумов σ-конечной одномерной меры Хаусдорфа.

6.5.1. Утверждение (принципы симметрии, см. [17]). *Пусть* $S \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ *есть* $(n-1)$*-мерная сфера в* $\overline{\mathbb{R}}^n$ *и* D^+, D^- *— компоненты связности* $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus S$*. Пусть* Γ_0 *— некоторое семейство «кривых» в* $D^+ \cup S$ *и* J *— инверсия относительно сферы* S.

(I) *Пусть семейство «кривых»* Γ *содержит в себе объединение семейств* $\Gamma_0 \cup J(\Gamma_0)$ *и состоит из множеств вида* $\gamma \cup \gamma'$, $\gamma \cup J(\gamma') \in \Gamma_0$ *и каждое из множеств* γ, γ' *либо пусто, либо является «кривой». Тогда* $M(\Gamma) = 2M(\Gamma_0)$.

(II) *Пусть семейство «кривых»* Γ *содержит в себе все множества вида* $\gamma \cup J(\gamma)$*, где* $\gamma \in \Gamma_0$*, и любая «кривая» из* Γ *содержит подмножество вида* $\gamma \cup J(\gamma')$*, где* $\gamma, \gamma' \in \Gamma_0$*. Тогда* $M(\Gamma) = M(\Gamma_0)/2^{n-1}$.

Автор глубоко признателен рецензенту за очень полезные критические замечания и указание на возможное обобщение полученных результатов для множеств, лежащих на липшицевой гиперповерхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlfors L., Beurling A.* Conformal invariants and functional-theoretic null-sets // Acta Math. 1950. V. 83. P. 100–129.
2. *Песин И. Н.* Метрические свойства Q-квазиконформных отображений // Мат. сб. 1956. Т. 40, № 3. С. 281–294.
3. *Väisälä J.* On the null-sets for extremal distances // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. 1962. N 322. P. 1–12.
4. *Асеев В. В., Сычев А. В.* О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 6. С. 1213–1227.
5. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Критерий устранимости множеств для пространств W_p^1, квазиконформных и квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 1. С. 48–68.
6. *Копылов А. П.* Об устранимости плоских множеств в классе трехмерных квазиконформных отображений // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наукова думка, 1969. Вып. 1. С. 21–23.
7. *Копылов А. П., Песин И. Н.* Устранимость некоторых множеств в классе трехмерных квазиконформных отображений // Мат. заметки. 1970. Т. 7, № 6. С. 717–722.
8. *Väisälä J.* Removable sets for quasiconformal mapping // J. Math. Mech. 1969. V. 19, N 1. P. 49–51.
9. *Миклюков В. М.* Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 3. С. 525–527.
10. *Асеев В. В.* Пример NED-множества в n-мерном эвклидовом пространстве, имеющего положительную $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216, № 4. С. 717–720.
11. *Hedberg L. I.* Removable singularities and condenser capacities // Ark. Mat. 1974. V. 12, N 2. P. 181–201.
12. *Шлык В. А.* Геометрия устранимых множеств для пространства FD^p, $p \in (1, \infty)$, и нормальные области по Хедбергу // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312, № 3. С. 546–549.
13. *Шлык В. А.* Строение компактов, порождающих нормальные области и устранимые особенности для пространства $L_p^1(D)$ // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 11. С. 1558–1572.
14. *Шлык В. А.* Нормальные области и устранимые особенности // Изв. АН. Сер. мат. 1993. Т. 87, № 4. С. 93–117.
15. *Caraman P.* About the equality between the p-module and the p-capacity in $\mathbb{R}^n$ // Analytic functions. Proc. of conf. Blazejewko, 1982. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1983. P. 32–83. (Lect. Notes Math.; 1039).
16. *Caraman P.* Relations between p-capacity and p-module // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1994. V. 39, N 6. P. 509–577.

17. *Асеев В. В.* Обобщенный приведенный модуль в пространственных задачах емкостной томографии // Дальневосточн. мат. журн. 2007. Т. 7, № 1–2. С. 17–29.
18. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов в геометрической теории функций. Владивосток: Изд-во Дальневосточн. ун-та, 2003.
19. *Дубинин В. Н.* Симметризация в геометрической теории функций // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 1. С. 3–76.
20. *Дубинин В. Н., Эйрих Н. В.* Обобщенный приведенный модуль // Дальневосточн. мат. журн. 2002. Т. 3, № 2. С. 150–164.
21. *Асеев В. В.* Описание NED-множеств, лежащих на гиперсфере // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней мат. школы «Понтрягинские чтения-17», Воронеж: ОАО «Центр.-Черноземн. кн. изд-во», 2006. С. 9.
22. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Ark. Mat. 1975. V. 13, N 1. P. 131–144.
23. *Vuorinen M.* Conformal geometry and quasiregular mappings. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1988. (Lect. Notes Math.; V. 1319).
24. *Асеев В. В.* Об одном свойстве модуля // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 3. С. 513–514.
25. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. 1957. V. 98, N 3–4. P. 171–219.
26. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 3.
27. *Caraman P.* n-Dimensional quasiconformal (QCf) mappings. Kent: Editura Acad. Bucureşti, Romania; Abacus Press Tunbridge Wells, 1974.
28. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 229).
29. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1969.
30. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
31. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.
32. *Миклюков В. М.* Об одном мультипликативном неравенстве для пространственных отображений с ограниченным искажением // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наукова думка, 1969. Вып. 1. С. 162–184.
33. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
34. *Сычев А. В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983.

Статья поступила 15 февраля 2008 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru