Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 514.772

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЕ НЕЖЕСТКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. А. Александров

Аннотация. С помощью формулы Грина вариация интегральной средней кривизны гладкой поверхности в $\mathbb{R}^3$ преобразована к криволинейному интегралу от некоторого векторного поля. В качестве следствия получена известная теорема, согласно которой интегральная средняя кривизна замкнутой гладкой поверхности в $\mathbb{R}^3$ стационарна при любом бесконечно малом изгибании.

Ключевые слова: бесконечно малое изгибание, векторное поле, поток векторного поля, циркуляция векторного поля, формула Грина.

Посвящается Юрию Григорьевичу Решетняку

Гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ называется *изгибаемой*, если существует гладкое отображение $\boldsymbol{\varphi} : S \times (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ такое, что

(1) для каждой гладкой кривой $\gamma \subset S$ и каждого $t \in (-1,1)$ длина кривой $\{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t) \mid \boldsymbol{x} \in \gamma\}$ равна длине кривой γ;

(2) для каждого $t \neq r$ найдутся две точки $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ такие, что евклидово расстояние между точками $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ и $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y},t)$ не равно евклидову расстоянию между точками $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},r)$ и $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y},r)$.

Другими словами, гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ называется *изгибаемой*, если существует семейство $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$ гладких поверхностей $S_t \subset \mathbb{R}^3$ такое, что (a) $S_0 = S$; (b) S_t изометрично S_0 во внутренних метриках (подробнее см., например, в [1]) для всех t; (c) S_t и S_r не конгруэнтны, если $t \neq r$.

Легко проверить, что плоский круг изгибаем. Однако старая гипотеза, все еще остающаяся открытой, утверждает, что в $\mathbb{R}^3$ не существует гладкой замкнутой изгибаемой поверхности (см., например, [2, проблема 50]. Читателя, интересующегося аналогичной проблемой для многогранных поверхностей, отсылаем к [3].

Если поверхность S ориентирована, то *интегральная средняя кривизна* поверхности S_t задается классической формулой

$$H(S_t) = \int\limits_{S_t} \frac{1}{2}(\kappa_1(\boldsymbol{x}) + \kappa_2(\boldsymbol{x}))\, d(S_t), \tag{1}$$

где $\kappa_1(\boldsymbol{x})$ и $\kappa_2(\boldsymbol{x})$ — главные кривизны поверхности S_t в точке $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$.

Гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ называется *нежесткой*, если на ней существует гладкое векторное поле $\boldsymbol{v} : S \to \mathbb{R}^3$ такое, что

Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (код проекта НШ–8526.2008.1).

(i) гладкое отображение $\boldsymbol{\psi} : S \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$, задаваемое формулой $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, таково, что для любой гладкой кривой $\gamma \subset S$ длина кривой $\{\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t) \mid \boldsymbol{x} \in \gamma\}$ стационарна при $t = 0$;

(ii) векторное поле $\boldsymbol{v}$ не порождено никаким непрерывным семейством движений поверхности S как твердого тела.

Такое поле $\boldsymbol{v}$ называется (*нетривиальным*) *бесконечно малым изгибанием* поверхности S. Нежесткие замкнутые поверхности в $\mathbb{R}^3$ существуют и изучались многими авторами (см, например, [4, 5] и указанную там библиографию). Известно, в частности, что если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$ — параметризация поверхности S и $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(u, v)$ — бесконечно малое изгибание S, то

$$\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{v}_u = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{v}_v + \boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{v}_u = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{v}_v = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

где $\cdot$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Пусть S — гладкая замкнутая ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$. Для всех t, достаточно близких к нулю, поверхность $\boldsymbol{\psi}(S, t) = \{\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t) \mid \boldsymbol{x} \in S\}$ также является гладкой и ориентируемой. Обозначим через $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, t)$ единичный нормальный вектор к поверхности $\boldsymbol{\psi}(S, t)$ в точке $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t)$ и через $\boldsymbol{n}'(\boldsymbol{x}, t)$ — вектор скорости вектор-функции $t \mapsto \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, t)$, т. е. положим по определению

$$\boldsymbol{n}'(\boldsymbol{x}, t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, t).$$

Определим векторное поле $\boldsymbol{m}$ на поверхности S формулой $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}'(\boldsymbol{x}, 0) \times \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, 0)$, где $\times$ обозначает векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. (Отметим, что $\boldsymbol{n}'$ и $\boldsymbol{m}$ являются касательными векторными полями на поверхности S, хотя мы не будем пользоваться этими фактами ниже.) Наконец, положим по определению

$$H'(S) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(\boldsymbol{\psi}(S, t)).$$

По очевидным причинам мы называем $H'(S)$ *вариацией* интегральной средней кривизны поверхности S.

Основным результатом данной заметки является следующая

Теорема. *Для любой компактной ориентированной гладкой поверхности S в $\mathbb{R}^3$ и любого ее бесконечно малого изгибания $\boldsymbol{v}$ вариация интегральной средней кривизны поверхности S равна половине контурного интеграла от векторного поля $\boldsymbol{m}$ по границе ∂S поверхности S, т. е.*

$$H'(S) = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial S} \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x}.$$

Подразумевается, что ориентация кривой ∂S, по которой вычисляется криволинейный интеграл, согласована с ориентацией поверхности S.

Доказательство. Достаточно доказать теорему «локально», т. е. для случая, когда поверхность S покрыта единственной картой. Более того, без потери общности мы можем считать, что S задается явной параметризацией $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(u, v) = (\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v))$. Тогда уравнения (2) принимают вид

$$\xi_u = -f_u\zeta_u, \quad \xi_v + \eta_u = -f_v\zeta_u - f_u\zeta_v, \quad \eta_v = -f_v\zeta_v. \tag{3}$$

Дифференцируя (3) по u и v, после преобразований имеем

$$\begin{cases} \xi_{uu} = -f_{uu}\zeta_u - f_u\zeta_{uu}, \\ \xi_{uv} = -f_{uv}\zeta_u - f_u\zeta_{uv}, \\ \xi_{vv} = -f_{vv}\zeta_u - f_u\zeta_{vv}, \\ \eta_{uu} = -f_{uu}\zeta_v - f_v\zeta_{uu}, \\ \eta_{uv} = -f_{uv}\zeta_v - f_v\zeta_{uv}, \\ \eta_{vv} = -f_{vv}\zeta_v - f_v\zeta_{vv}. \end{cases} \tag{4}$$

Для определенности считаем, что S ориентировано с помощью следующего поля единичных нормалей: $\bigl(1+f_u^2+f_v^2\bigr)^{-1/2}(-f_u,-f_v,1)$. Используя уравнения (3) и (4), обычным образом получаем

$$2H'(S) = \iint\limits_D \bigl[\bigl(1+f_v^2\bigr)\zeta_{uu} - 2f_uf_v\zeta_{uv} + \bigl(1+f_u^2\bigr)\zeta_{vv}\bigr]\,dudv. \tag{5}$$

С другой стороны, прямые вычисления показывают, что

$$\boldsymbol{m}(u,v) = \frac{1}{1+f_u^2+f_v^2}\bigl(f_u\xi_v + f_v\eta_v - \zeta_v, -f_u\xi_u - f_v\eta_u + \zeta_u, \\ -\bigl(f_u^2+f_v^2\bigr)\eta_u + f_v\zeta_u - f_u\bigl(1+f_u^2+f_v^2\bigr)\zeta_v\bigr)$$

и

$$\int\limits_{\partial S} \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial D} \bigl(-f_u\eta_u - \bigl(1+f_u^2\bigr)\zeta_v\bigr)\,du + (\zeta_u - f_v\eta_u - f_uf_v\zeta_v)\,dv. \tag{6}$$

Применяя теперь формулу Грина

$$\int\limits_{\partial D} P\,du + Q\,dv = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) dudv$$

к правой части равенства (6) и используя формулы (3) и (4), преобразуем правую часть формулы (6) к правой части формулы (5). Теорема доказана.

Следствие 1. *Для любой компактной ориентированной гладкой поверхности S без края в $\mathbb{R}^3$ и любого ее бесконечно малого изгибания вариация интегральной средней кривизны поверхности S равна нулю.*

Следствие 2. *Любая компактная изгибаемая поверхность без края в $\mathbb{R}^3$ сохраняет интегральную среднюю кривизну в процессе изгибания.*

Конечно, здесь имеются в виду поверхности, для каждой точки которых могут быть введены локальные координаты (u,v) такие, что радиус-вектор поверхности, а также его первые и вторые производные по переменным u и v имеют непрерывную относительно параметра деформации t первую производную по t.

Оба следствия немедленно вытекают из доказанной выше теоремы. На самом деле оба следствия доказаны другими авторами в гораздо более общей ситуации, а именно, они доказаны для кусочно гладких гиперповерхностей в многомерных евклидовых пространствах и пространствах Лобачевского (см. [6–8]). Однако указанный выше прием непосредственного свед́ения вариации интегральной средней кривизны к криволинейному интегралу, ра́вно как и сам вид векторного поля $\boldsymbol{m}$, циркуляцию которого нужно вычислять, является новым и может быть полезным при изучении вопроса о том, какие еще функции остаются неизменными при непрерывной деформации поверхности. Например, известно, что многогранники в процессе изгибания сохраняют свой объем (см. [3] и указанную там библиографию).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948.
2. *Yau S.-T.* Problem section // Seminar on differential geometry / ed. S.-T. Yau. Ann. Math. Stud. 1982. V. 102. P. 669–706.
3. *Сабитов И. Х.* Обобщенная формула Герона — Тарталья и некоторые ее следствия // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 10. С. 105–134.
4. *Решетняк Ю. Г.* О нежестких поверхностях вращения // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 4. С. 591–604.
5. *Сабитов И. Х.* Локальная теория изгибания поверхностей // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 48. С. 196–270. (Итоги науки и техники).
6. *Almgren F. J., Rivin I.* The mean curvature integral is invariant under bending // The Epstein birthday schrift / eds. I. Rivin et al. Univ. of Warwick, 1992. P. 1–21.
7. *Schlenker J.-M., Souam R.* Higher Schläfli formulas and applications // Compos. Math. 2003. V. 135, N 1. P. 1–24.
8. *Souam R.* The Schläfli formula for polyhedra and piecewise smooth hypersurfaces // Differ. Geom. Appl. 2004. V. 20, N 1. P. 31–45.

Статья поступила 11 февраля 2009 г.

Александров Виктор Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
alex@math.nsc.ru