Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 514.74

О РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С МАЛОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

И. Х. Сабитов

Аннотация. Классическое описание строения развертывающихся поверхностей типа торса формально возможно только начиная с гладкости C^3. Рассмотрены развертывающиеся поверхности класса C^2 и показано, что на них направления образующих в точках границы поверхности принадлежат касательной контингенции граничной кривой. В аналитических терминах дано необходимое и достаточное условие принадлежности C^1-гладких поверхностей с локально евклидовой метрикой введенному в работах Ю. Д. Бураго и С. З. Шефеля классу так называемых нормально развертывающихся поверхностей.

Ключевые слова: локально евклидовая метрика, развертывающаяся поверхность, образующие, горловая линия, асимптотическая параметризация.

Юрию Григорьевичу Решетняку
в знак искреннего уважения

1. Напомним, что поверхность называется *развертывающейся*, если ее метрика локально евклидова, т. е. у каждой точки поверхности есть окрестность, изометричная кругу со стандартной евклидовой метрикой dx^2+dy^2. Изучаемые в классической геометрии развертывающиеся поверхности в $\mathbb{R}^3$ бывают трех типов: цилиндрические, конические и торсы, они же развертки касательных к некоторой пространственной кривой. Одно из обоснований этой классификации получается из природы так называемой *горловой линии* развертывающейся поверхности: в первом случае горловая линия отсутствет вовсе, случаю конической поверхности соответствует вырождение горловой линии в точку, и лишь торсы характеризуются наличием «настоящей» горловой линии как некоторой гладкой пространственной кривой (см., например, [1]). Однако доказательство этих утверждений обычно проводится в предположении достаточно высокой гладкости поверхности, а именно, нужна гладкость не менее чем класса C^3. Дело в том, что формула для радиус-вектора $\mathbf{R}$ горловой линии

$$\mathbf{R}(u) = \boldsymbol{\rho}(u) - \frac{\boldsymbol{\rho}'(u)\mathbf{l}'(u)}{\mathbf{l}'^2(u)}\mathbf{l}(u) \tag{1}$$

выводится с использованием асимптотической параметризации

$$\mathbf{r}(u,v) = \boldsymbol{\rho}(u) + v\mathbf{l}(u) \tag{2}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобразования РФ (грант РНП 2.1.1.3704) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–09–00179).

рассматриваемой поверхности, где $\boldsymbol{\rho}(u)$ — радиус-вектор направляющей кривой L, а $\mathbf{l}(u)$ — единичный направляющий вектор образующих, нигде не касающийся направляющей линии. В общем случае можно считать, что кривая L имеет гладкость не меньше, чем сама поверхность[1)], а вот для векторной функции $\mathbf{l}(u)$ может оказаться, что у нее нет даже первой производной, хотя поверхность и является C^∞-гладкой в некоторых других регулярных координатах (см. пример в [2] и его подробное исследование в [3]). Значит, в общем случае даже для поверхностей гладкости C^∞ просто нет возможности выписать аналитически уравнение (1) горловой линии. Однако если предположить, что поверхность не имеет точек уплощения, то в асимптотической параметризации (2) направляющие образующих имеют гладкость на единицу меньше, чем гладкость поверхности [4]. Следовательно, если поверхность имеет гладкость класса C^2, то для радиус-вектора горловой линии гарантирована только его непрерывность, и мы не можем говорить о том, что образующие являются для нее касательными. Первая цель данной работы — показать, что на самом деле и в этом случае образующие имеют какое-то «касательное» отношение к горловой линии, а именно, будет доказана

Теорема 1. *Пусть развертывающаяся поверхность $S \in C^2$ с невырожденной горловой линией Γ не имеет точек уплощения. Тогда в каждой точке M линии Γ направление приходящей в эту точку образующей поверхности S принадлежит контингенции касательных линии Γ в точке M.*

В случае гладкости C^3 и выше известно также строение поверхности в окрестности горловой линии, а именно, горловая линия является ребром развертывающейся поверхности S, состоящей из двух полостей S^+ и S^-, образованных противоположно направленными лучами касательных к горловой линии, причем сечение поверхности S ортогональной к ее ребру плоскостью дает в сечении кривую с точкой возврата первого рода. Оказывается, в классе гладкости C^2 строение поверхности в окрестности горловой линии «во многих случаях» тоже аналогично классическому случаю.

Теорема 2. *Пусть для некоторой точки M_0 на горловой линии Γ развертывающейся поверхности S, $S \setminus \Gamma \in C^2$, без точек уплощения найдется плоскость P_0, проходящая через точку M_0 и пересекающая в этой точке образующую и обе полости S^+ и S^- поверхности S, которая не имеет в достаточно малой окрестности точки M_0 других общих точек с Γ. Тогда для кривой $\Gamma_0 = S \cap P_0$ точка M_0 будет точкой возврата 1-го рода.*

В приведенных выше теоремах линейчатое строение развертывающейся поверхности априори не предполагается, оно получается как следствие ее C^2-гладкости. Однако при меньшей гладкости развертывающиеся поверхности в $\mathbb{R}^3$ могут иметь непривычное нам строение без прямолинейных образующих. Первый пример такой поверхности, не содержащей ни одного прямолинейного отрезка, построен Лебегом [5, с. 325]. У этой поверхности почти в каждой ее точке есть касательная плоскость, и она даже является поверхностью вращения. Ю. Ф. Борисов, уточняя известные результаты Нэша — Кейпера об изгибаемости любой поверхности в классе гладкости C^1, показал [6], что плоскость можно

[1)] Говоря о гладкости «самой» поверхности, мы имеем в виду ее максимальную гладкость, которая может быть при некотором другом выборе регулярных внутренних координат. Эта максимальная гладкость обязательно совпадает с гладкостью поверхности в представлении $z = f(x, y)$.

непрерывно деформировать в классе поверхностей гладкости $C^{1,\alpha}$ ($\alpha < 1/7$) так, чтобы в процессе деформации получались поверхности с локально евклидовой метрикой, не содержащие прямолинейных образующих.

С другой стороны, в работах А. В. Погорелова [7], Ю. Д. Бураго [8] и С. З. Шефеля [9, 10] изучены C^1-гладкие поверхности с априорными условиями на их сферический образ, из которых следует, что эти поверхности имеют локально евклидову метрику и через каждую точку поверхности проходит образующая со стационарной вдоль нее касательной к поверхности плоскостью. Такие поверхности попадают в введенный Ю. Д. Бураго и С. З. Шефелем класс *нормальных развертывающихся поверхностей* (НРП)[2]. Их тоже можно задать в асимптотической параметризации (2), но для них неизвестна даже непрерывность векторов $\mathbf{l}(u)$, и вследствие этого неизвестно, как вычислять в асимптотических координатах нормаль к поверхности и как проверить ее постоянство вдоль образующих. Иначе говоря, неизвестно, как проверить по векторам $\boldsymbol{\rho}(u)$ и $\mathbf{l}(u)$, во-первых, имеет ли поверхность S с радиус-вектором (2) C^1-гладкость, во-вторых, является ли ее метрика локально евклидовой, в-третьих, стационарна ли ее касательная плоскость вдоль образующих, т. е. для работы с этими поверхностями нет аналитического аппарата. Но, оказывается, для НРП имеет место неожиданное свойство «дополнительной» гладкости, отмеченное в следующем утверждении.

Теорема 3. *Для C^1-гладких нормальных развертывающихся поверхностей в окрестности каждой точки можно ввести асимптотическую параметризацию (2) с C^1-гладкой направляющей кривой L и $C^{0,1}$-регулярным полем единичных векторов $\mathbf{l}(u)$ образующих с выполнением условия*

$$(\boldsymbol{\rho}'(u), \mathbf{l}(u), \mathbf{l}'(u)) = 0 \tag{3}$$

в точках существования производной $\mathbf{l}'(u)$.

Более того, верно и обратное утверждение.

Теорема 4. *Линейчатая поверхность с асимптотической параметризацией (2), в которой $\boldsymbol{\rho}(u) \in C^1$, $\mathbf{l}(u) \in C^{0,1}$ и выполнено равенство (3) всюду в точках существования производной $\mathbf{l}'(u)$, является C^1-гладкой нормальной развертывающейся поверхностью.*

Таким образом, теоремы 3 и 4 полностью решают вопрос об аналитическом описании строения нормальных развертывающихся поверхностей: если C^1-гладкая поверхность из класса НРП, то на ней есть асимптотическая параметризация (2) с $\boldsymbol{\rho}(u) \in C^1$, $\mathbf{l}(u) \in C^{0,1}$ с выполнением равенства (3) и, обратно, если поверхность задана в виде уравнения (2) с $\boldsymbol{\rho}(u) \in C^1$, $\mathbf{l}(u) \in C^{0,1}$ с выполнением равенства (3), то она принадлежит классу C^1-гладких НРП.

Эта теорема очень естественно дополняет результат Лебега из [5, с. 338], где приведен пример C^1-гладкой пространственной кривой, развертка касательных которой не является развертывающейся поверхностью, хотя эта поверхность

[2] Такие поверхности определяются следующим образом [8]. Сначала вводится определение *нормальной поверхности неотрицательной кривизны* как поверхности, на которой в каждой ее точке P выполнено хотя бы одно из условий: (а) точка P имеет окрестность в виде (нестрого) выпуклой поверхности; (б) через точку P проходит прямолинейная образующая, вдоль которой касательная плоскость к поверхности стационарна. Если теперь предположить, что нормальная поверхность неотрицательной кривизны не имеет точек строгой выпуклости, то она называется нормально развертывающейся поверхностью.

имеет в каждой точке касательные плоскости, стационарные вдоль образующих. Объяснение этого феномена у Лебега совпадает со смыслом нашей теоремы 3, так как он для своего примера специально выбрал кривую, у которой производные радиус-вектора — направления образующих поверхности — являются функциями неограниченной вариации, т. е. они не удовлетворяют условию Липшица, поэтому эта поверхность действительно не может иметь локально евклидовой метрики.

Замечание 1. Приведем три нерешенные задачи, связанные с рассмотренными теоремами.

1. C^1-гладкие нормальные развертывающиеся поверхности являются поверхностями внешней ограниченной положительной кривизны в смысле Бураго (см. [10]). Теперь теоремы 3 и 4 дают надежду доказать, что они являются также поверхностями внешней ограниченной кривизны в смысле Погорелова.

2. Упомянутое в начале статьи разбиение развертывающихся поверхностей на три класса проведено для случая гладкости C^2 и выше. Однако для случая C^1-гладких нормальных развертывающихся поверхностей пока нет формального доказательства, что они исчерпываются этими тремя классами.

3. Имея существование производной $\mathbf{l}'(u)$ почти всюду, мы можем формально выписать уравнение (1) горловой линии, но вопрос о ее строении и ее отношении к образующим остается открытым. В частности, может ли быть, что существует много отрезков образующих, обоими своими концами «упирающихся» в особые точки?

2. Докажем теорему 1. Пусть дана развертывающаяся поверхность $S \in C^2$. Пусть в окрестности некоторой точки она представлена в виде $z = z(x, y) \in C^2$, где функция $z(x, y)$ является решением тривиального уравнения Монжа — Ампера

$$z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = 0. \tag{4}$$

В работе [11] показано, что решения этого уравнения допускают параметрическое представление

$$\begin{gathered} x(u,v) = g(u) - vf'(u), \quad y(u,v) = v, \\ z(u,v) = ux(u,v) + vf(u) - G(u), \quad G(u) = \int_{u_0}^{u} g(t)\,dt, \end{gathered} \tag{5}$$

где $g(u)$ и $f(u)$ — заданные на некотором интервале (u_1, u_2) функции класса C^1 и C^2 соответственно, причем $g'(u) \neq 0$. И хотя формально, например, $x(u, v)$ не является C^2-гладкой функцией от u, тем не менее оказывается, что поверхность S, определяемая радиус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\},$$

имеет гладкость класса C^2 (более подробно, чем в [11], и с некоторыми уточнениями этот вопрос рассмотрен в [12, гл. 3], а о происхождении такого представления см. в конце статьи в п. 6).

Имеем

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = \{-u, -f, 1\} x_u. \tag{6}$$

Значит, представление (5) является регулярным для части поверхности S, соответствующей точкам, не лежащим на кривой $L : x_u = g'(u) - vf''(u) = 0$, которая, если существует, разбивает полосу $\Pi : u_1 < u < u_2,\ -\infty < v < +\infty$ на две области $\Pi^+ : g'(u) - vf''(u) > 0$ и $\Pi^- : g'(u) - vf''(u) < 0$. Соответственно поверхность S оказывается состоящей из двух полостей S^+ и S^-. Нетрудно проверить, что прямым $u = \mathrm{const}$ на обеих полостях $S^\pm$ соответствуют образующие, на объединении которых v изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ и которые имеют направления векторов

$$\mathbf{l}(u) = \{-f'(u), 1, f(u) - uf'(u)\}. \tag{7}$$

По условию $g'(u) \neq 0$. Пусть для определенности $g'(u) > 0$. Тогда отрезок $v = 0$ попадает в область Π^+. На линии L, если она существует, всюду $f''(u) \neq 0$. На участке, где $f''(u) > 0$ ($f''(u) < 0$), образующим на S^+ соответствуют лучи $u = \mathrm{const}$ со значениями v, изменяющимися от $-\infty$ ($+\infty$) до $v = \frac{g'(u)}{f''(u)} > 0$ (< 0). Тем самым в обоих случаях линии $L : g(u) - vf''(u) = 0$ соответствует общий *край* Γ каждой из поверхностей $S^\pm$, за который ни одна из них не продолжима как гладкая развертывающаяся поверхность[3]. Рассмотрим более подробно возможное строение множества Γ.

На разделяющей области Π^+ и Π^- кривой $L : g'(u) - vf''(u) = 0$ возможны следующие случаи.

(a) Пусть $f''(u) \equiv 0$. Тогда $f'(u) = c = \mathrm{const}$, $f = cu + c_1$, линии $L : g'(u) - vf''(u) = 0$ нет и область Π^+ совпадает со всей полосой $\Pi : u_1 < u < u_2$, $-\infty < v < +\infty$. В этом случае все образующие параллельны постоянному направлению $\{-c, 1, c_1\}$, поверхность является цилиндром и края, куда приходят образующие, у нее нет.

(b) Пусть теперь есть дуга линии $L : g'(u) - vf''(u) = 0$. Так как $g'(u) \neq 0$, на этой линии $v \neq 0$, $f''(u) \neq 0$. Представим ее в виде $v = \frac{g'(u)}{f''(u)}$. Кривой $L : g' - vf'' = 0$ на поверхности S соответствует некоторая линия L^* с радиус-вектором $\mathbf{r}^* = \mathbf{a}(u) + \frac{g'(u)}{f''(u)}\mathbf{l}(u)$. Рассмотрим два возможных случая.

(b_1) $\frac{g'(u)}{f''(u)} \equiv c = \mathrm{const}$. В этом случае на линии L имеем $g = cf' + c_1$, $y = v = c$, $x = g - vf' = c_1$, т. е. вся линия L отображается в точку $(x, y, z) = (c_1, c, c_2 = \mathrm{const})$ и поэтому линии L на поверхности S соответствует одна точка, в которой пересекаются все образующие — поверхность S является конусом, состоящим из двух полостей.

(b_2) Пусть отношение $\frac{g'(u)}{f''(u)}$ не равно постоянной ни на одном интервале. Особую линию в области параметров можно представить в виде графика функции $v = v(u) = \frac{g'(u)}{f''(u)}$. Сначала, как и в [11], предположим, что $\frac{g'(u)}{f''(u)} \in C^1$ (например, так будет, если поверхность класса C^3). Тогда особой линии L на поверхности S будет соответствовать некоторая кривая $\Gamma : \mathbf{r}(u) = \{x(u), y(u), z(u)\}$ с C^1-гладкими координатами точек, где

$$x(u) = g(u) - \frac{g'(u)f'(u)}{f''(u)}, \quad y(u) = \frac{g'(u)}{f''(u)}, \quad z(u) = ux(u) - \frac{g'(u)f(u)}{f''(u)} - G(u),$$

для которых

$$\mathbf{r}'(u) = v'(u)\mathbf{l}(u), \tag{8}$$

здесь вектор $\mathbf{l}$ дается выражением (7). Следовательно, для поверхностей класса C^3 в точках, где $v'(u) \neq 0$, образующие на поверхности S касаются кривой Γ,

[3]В работе [13] исследован интересный вопрос о том, когда кусочно гладкая поверхность имеет локально евклидову метрику в полной окрестности точек ребра.

причем множество возможных особых точек с $v'(u) = 0$ нигде не плотно. В этих особых точках Γ, как правило, имеет точки возврата, см. [14] (в нашем случае для изолированных особых точек с изменением знака $v'(u)$ это легко усматривается из (8)). Таким образом, между возможными особыми точками кривая Γ является, по терминологии [14], C^1-гладким участком огибающей семейства образующих поверхности S, которая в этом случае представляет собой торс.

Сложнее обстоит дело для поверхностей гладкости класса C^2. В этом случае для геометрического места Γ особых точек выполняется данное в [14] определение дискриминанты, представляющее собой только необходимое условие того, чтобы это геометрическое место точек было огибающей. В общем случае мы можем сразу лишь сказать, что Γ является непрерывной кривой, у которой априори может не быть касательной ни в одной точке, и поэтому нельзя будет говорить о поверхности S как о развертке касательных к некоторой кривой. Но на самом деле в нашем случае кривая Γ обладает следующим неожиданно «хорошим» свойством: в каждой точке $u = u_0$, в которой контингенция кривой L не содержит горизонтального направления $v = \mathrm{const} = v(u_0)$, контингенция кривой Γ вся состоит из единственного направления, совпадающего с направлением той образующей на поверхности, которая приходит в эту точку кривой Γ, и тем самым Γ в этих точках или имеет касательную, или у нее есть односторонние полукасательные, имеющие коллинеарные направления (под направлением мы понимаем не вектор, а линию действия вектора). Если же в соответствующей точке контингенция кривой L содержит горизонтальное направление (или даже состоит только из горизонтального направления), в контингенции кривой Γ найдется направление, совпадающее с направлением образующей, так что в любом случае образующую можно считать как-то «касающейся» особой линии Γ. Действительно, образующая, приходящая в точку поверхности с внутренними координатами (u_0, v_0), имеет направление вектора $\mathbf{l} = \{-f'(u_0), 1, f(u_0) - u_0 f'(u_0)\}$ (см. (7)). Пусть по последовательности точек $(u_n, v_n) \in L \subset \Pi$, в которой u_n монотонно стремится к u_0, имеем $\frac{v_n - v_0}{u_n - u_0} \to a$, $n \to \infty$, где $0 < |a| < \infty$. По выбору точки (u_0, v_0) будет $g'(u_0) - v_0 f''(u_0) = 0$. Учитывая это равенство, непосредственным вычислением находим, что

$$\frac{x_n - x_0}{u_n - u_0} = \frac{g(u_n) - g(u_0)}{u_n - u_0} - \frac{v_n - v_0}{u_n - u_0} f'(u_n) - v_0 \frac{f'(u_n) - f'(u_0)}{u_n - u_0} \xrightarrow{(n\to\infty)} g'(u_0) - a f'(u_0) - v_0 f''(u_0) = a f'(u_0).$$

Аналогичные вычисления для отношений $\frac{y_n - y_0}{u_n - u_0}$ и $\frac{z_n - z_0}{u_n - u_0}$ приводят к тому, что $\frac{\mathbf{r}(u_n) - \mathbf{r}(u_0)}{u_n - u_0} \to a\mathbf{l}$, т. е. направление образующей обязательно входит в контингенцию кривой Γ в точке, где эта образующая встречается с Γ. Более того, теперь покажем, что всегда в контингенции касательных к Γ есть направление образующей. Пусть $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ — монотонная по аргументу u последовательность точек из Γ, сходящаяся к рассматриваемой точке $M_0 \in \Gamma$, вдоль которой есть предельное положение соответствующих секущих лучей $M_0 M_n$. Этой последовательности на кривой $L \in \Pi$ соответствует последовательность точек $\widetilde{M}_n(u_n, v_n)$. Если в этой последовательности некоторая подпоследовательность лучей $\widetilde{M}_0 \widetilde{M}_n$ (где $\widetilde{M}_0 \in L$ — прообраз точки $M_0 \in \Gamma$) определяет невертикальное и негоризонтальное направление вектора, входящее в контингенцию кривой L, то по рассмотренному выше случаю соответствующее направление на Γ будет совпадать с направлением образующей. Если же все сходящиеся подпоследовательности в $\{\widetilde{M}_n\}$ определяют вертикальное направление, т. е. $\frac{|v_n - v_0|}{|u_n - u_0|} \to \infty$,

$n \to \infty$, то с некоторого номера будет $v_n \neq v_0$ и на кривой Γ направления рассматриваемых секущих можно представить через параллельные им векторы $\mathbf{t}_n = \frac{u_n - u_0}{v_n - v_0} \frac{\mathbf{r}(u_n) - \mathbf{r}(u_0)}{u_n - u_0}$. Простыми вычислениями находим, что пределом векторов $\mathbf{t}_n$ будет вектор $\mathbf{l}$, что и требовалось показать. Если контингенция кривой L в точке $u = u_0$ содержит горизонтальное и некоторое негоризонтальное направления, то этому негоризонтальному направлению в контингенции кривой Γ соответствует направление, совпадающее с направлением образующей в соответствующей точке. Наконец, пусть вся контингенция кривой L состоит только из горизонтального направления. Введем справа от $u = u_0$ непрерывную неубывающую функцию $\tilde{v}(u) = \max|v(t) - v_0|$, $u_0 \leq t \leq u$. Имеем $\tilde{v}(u_0) = 0$, $\tilde{v}(u) > 0$, $u > u_0$ и $\tilde{v}(u) \geq |v(u) - v(u_0)|$, причем равенство достигается по крайней мере на счетном множестве точек u_n с предельной точкой u_0. Так как $\tilde{v}(u) > 0$, в этих точках $v_n = v(u_n) \neq v_0$. Рассмотрим для кривой Γ предельные положения лучей, определяемых точками $\mathbf{r}(M_0)$ и $\mathbf{r}(M_n)$, $M_0 = (u_0, v_0)$, $M_n = (u_n, v_n)$, $M_n \to M_0$ при $n \to \infty$. Поскольку $v_n \to v_0$, можем считать, что взята такая подпоследовательность, для которой разность $v_n - v_0$ постоянного знака и монотонна. Чтобы не усложнять обозначений, считаем, что это выполнено уже для самой последовательности. Исследуем поведение векторов $\frac{\mathbf{r}(u_n) - \mathbf{r}(u_0)}{v_n - v_0}$. Имеем

$$\frac{x(u_n) - x(u_0)}{v_n - v_0} = -f'(u_n) + \frac{g(u_n) - g(u_0) - v_0(f'(u_n) - f'(u_0))}{v_n - v_0}. \tag{9}$$

Так как $f'' \neq 0$ на линии L, числитель дроби в правой части можно представить в виде

$$\int\limits_{u_0}^{u_n} (g'(t) - v_0 f''(t))\,dt = \int\limits_{u_0}^{u_n} f''(t)(v(t) - v_0)\,dt.$$

Следовательно, подынтегральное выражение допускает оценку сверху величиной $K_n|v(t) - v_0| \leq K_n \tilde{v}(t) \leq K_n \tilde{v}(u_n) = K_n|v(u_n) - v_0|$, где $K_n = \max|f''(t)|$, $0 \leq t \leq u_n$, что не превосходит $\max|f''(u)|$ на всей полосе Π. Теперь уже из уравнения (9) видно, что его левая часть при $u_n \to u_0$ стремится к $-f'(u_0)$. Отношение $(y_n - y_0)/(v_n - v_0)$ равно 1, поэтому его предел тоже равен 1. А для отношения $(z_n - z_0)/(v_n - v_0)$ предел можно вычислить, рассуждая так же, как при рассмотрении уравнения (9), и он получается равным $f(u_0) - u_0 f'(u_0)$, т. е. в итоге для направления секущей к Γ в точке $\mathbf{r}(M_0)$ получается предельное положение, совпадающее с направлением приходящей в эту точку образующей. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. В классе гладкости C^2 о строении поверхности $S^+ \cup S^-$ в окрестности точек из кривой Γ можно получить хотя бы часть информации, аналогичной для случая поверхностей гладкости C^3 и выше. Во-первых, из формулы (6) усматриваем, что для обеих регулярных полостей S^+ и S^- на их общей границе Γ существуют предельные положения нормалей, имеющие противоположные направления. Во-вторых, если в полосе Π существует гладкая кривая $\gamma : v = V(u)$, пересекающая особую линию $L : v = g'(u)/f''(u)$ в некоторой точке $u = u_0$ и такая, что ее образ $\gamma_* : x = x_*(u)$, $y = y_*(u)$, $z = z_*(u)$ на S трансверсален образующей в соответствующей точке, то окажется, что в точке пересечения кривой γ_* с образующей имеем $\{x'_*(u_0), y'_*(u_0), z'_*(u_0)\} = V'(u_0)\mathbf{l}(u_0)$, т. е. в этой точке обязательно $V'(u_0) = 0$ и $x'_*(u_0) = y'_*(u_0) = z'_*(u_0) = 0$, значит, для любой кривой на S, трансверсальной образующей на S в ее концевой точке, точки дискриминанты (или кривой Γ) особые. Далее, если найдется плоскость P_0, проходящая через некоторую точку $M_0 \in \Gamma$ и пересекающая в этой точке образующую и обе полости S^+ и S^-, которая не имеет в достаточно малой окрестности точки M_0 других общих точек с Γ (так будет, например, если у линии $L \subset \Pi$ есть изолированная точка пересечения с каким-либо отрезком $v = \mathrm{const}$), то для кривой $\Gamma_0 = S \cap P_0$ точка M_0 будет точкой возврата 1-го рода. Действительно, пусть точка M_0 имеет координаты (x_0, y_0, z_0) с прообразом в точке $(u_0, v_0) \in \Pi$. Пусть $\{a, b, c\}$ — нормаль к плоскости P_0. Так как P_0 пересекает образующую в точке M_0, то $-af'(u_0)+b+c(f(u_0)-uf'(u_0)) \neq 0$, поэтому в достаточно малой окрестности точки (u_0, v_0) кривая γ_0 — прообраз сечения поверхности S плоскостью P_0 — имеет уравнение $v = V(u) \in C^1$. Вычисляя $V'(u)$ из этого уравнения или, проще, из соотношения

$$a(x(u, V(u)) - x_0) + b(V(u) - y_0) + c(z(u, V(u)) - z_0) = 0, \tag{10}$$

получим

$$V'(u) = \frac{a + cu)(g'(u) - V(u)f''(u))}{af'(u) - b - c(f(u) - uf'(u))},$$

следовательно, $V'(u_0) = 0$. Значит, для кривой

$$\Gamma_0 : (x_0(u), y_0(u), z_0(u)) = (x(u, V(u)), y(u, V(u)), z(u, V(u))) \subset S$$

имеем направление касательной

$$\{x_0'(u), y_0'(u), z_0'(u)\} = A(u)\{-(b + cf), (a + cu), (af - bu)\}, \tag{11}$$

где

$$A(u) = \frac{g'(u) - V(u)f''(u)}{af' - b + c(uf' - f)}.$$

Функция $A(u)$ при переходе через точку $u = u_0$ изменяет свой знак, а вектор в правой части соотношения (11) не равен нулю (действительно, если он в точке u_0 равен нулю, то окажется, что $af'(u_0) - b + c(u_0 f'(u_0) - f(u_0)) = 0$; противоречие). Как итог получаем, что для кривой Γ_0 в особой точке существуют полукасательные справа и слева и они имеют совпадающие направления. Кроме того, теперь покажем, что дуги кривой Γ_0 в окрестности точки M_0 располагаются на плоскости P_0 по разные стороны от их общей полукасательной в M_0. Для этого проведем через полукасательную к Γ_0 в точке M_0 плоскость P_1, перпендикулярную плоскости Π_0. Плоскость P_1 имеет уравнение $(\mathbf{n}, \mathbf{l}_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, где $\mathbf{n} = \{a, b, c\}$ — нормаль к плоскости P_0, а $\mathbf{l}_0$ — направление полукасательной к Γ_0 в точке M_0 с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$. Предположив для простоты счета, что $u_0 = 0$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, для плоскости P_1 получаем уравнение

$$a(bf(u_0) - c)x - (a^2 f(u_0) + bc + c^2 f(u_0))y + (a^2 + b^2 + bcf_0)z = 0.$$

Подставим в левую часть уравнения плоскости P_1 уравнение кривой Γ_0. С учетом того, что эта кривая лежит на плоскости P_0, получим выражение $F(u) = (a^2 + b^2 + c^2)(y(u)f(u_0) - z(u)) = (a^2 + b^2 + c^2)(V(u)f(u_0) - u(g(u) - V(u)f'(u)) + G(u))$. Имеем $F(u_0) = 0$, а производная $F'(u)$ оказывается вида $u(g'(u) - vf''(u))(1 + o(u))$, т. е. она знакопостоянна в окрестности точки $u_0 = 0$, поэтому $F(u)$ при переходе через точку $u = u_0$ изменяет знак, значит, в окрестности точки M_0 кривая Γ_0 лежит по разные стороны от ее полукасательной, имея в M_0 точку возврата 1-го рода. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Из доказательства теоремы 1 видно, что условие отсутствия на поверхности точек уплощения приводит к тому, что каждая образующая на развертывающейся C^2-гладкой поверхности при полном своем продолжении является или прямой, или лучом, причем в окрестности каждой внутренней точки образующей поверхность сохраняет свою регулярность (по-другому это выражается утверждением, что на одной образующей не бывает двух особых точек). Но без условия отсутствия точек уплощения это уже неверно. В приведенном в [2] примере есть одна образующая, имеющая две особые точки (в [10] есть подробное обсуждение этого примера).

Замечание 3. Для справедливости данного в теореме 2 описания строения развертывающейся поверхности в окрестности горловой линии существенно предположение о существовании плоскости P_0 с упомянутыми ее свойствами. Действительно, в случае гладкости класса C^2 может оказаться, что на поверхности S нет ни одной плоской (и вообще никакой) кусочно гладкой кривой с гладким прообразом $v = V(u)$ в полосе Π, которая пересекала бы особое множество Γ в некоторой изолированной точке M_0 трансверсально образующей (имеется в виду, что дуга кривой на каждой полости $S^{\pm}$ в достаточно малой окрестности точки M_0 гладкая с возможным нарушением гладкости только в точке M_0). Это доказывается существованием примера нигде не дифференцируемой непрерывной функции $v = v_0(u) = g'(u)/f''(u) = \sum 2^{-n}\sin(8^n u)$, у которой в каждой точке контингенция касательных совпадает с замкнутой полуплоскостью, значит, никакая гладкая кривая $v = V(u)$ не может пересекать кривую $v = v_0(u)$ в изолированной точке (о существовании примера такой функции мне любезно сообщил Т. П. Лукашенко). Для таких поверхностей теорема 1 остается справедливой, но описание строения поверхности около горловой линии должно быть дано, по-видимому, в новых терминах.

4. Переходим к доказательству теоремы 3. Для краткости будем называть C^1-гладкие нормальные развертывающиеся поверхности *торсами*. Напомним, что точка на торсе называется *планарной*, если у нее есть плоская окрестность. Напомним также некоторые свойства образующих[4)].

1. Через каждую непланарную точку торса проходит единственная образующая, идущая от края до края поверхности.

2. Если одна точка образующей является непланарной, то все остальные ее точки тоже непланарные.

3. Образующая с непларными точками не может быть изолированной.

4. Множество точек границы плоской области на поверхности, являющихся внутренними точками поверхности, состоит из конечного или счетного числа образующих.

Если рассматриваемая точка планарная, то теорема очевидна. Пусть рассматривается окрестность непланарной точки M_0 на поверхности S, и пусть система координат выбрана так, что M_0 является началом координат, образующая, проходящая через M_0, идет по оси y, а касательная плоскость совпадает с плоскостью xy. Проведя сечение поверхности плоскостью xz, получим некоторую кривую $\gamma : (x, 0, z(x, 0))$ гладкости C^1. Множество планарных точек на этой кривой или пусто, или состоит из не более чем счетного множества открытых дуг, а непланарные точки не могут быть изолированными. Проведем через все непланарные точки проходящие через них единственные образующие.

4) Доказательства можно найти, например, в [12].

Считаем, что поверхность S рассматривается над квадратом $Q : |x| \le \varepsilon$, $|y| \le \varepsilon$. Ни одна образующая не может располагаться на плоскости xz, так как в противном случае в Q над осью Ox окажутся две точки поверхности $z = z(x, y)$: одна на образующей, другая — на кривой γ. Следовательно, все образующие будут иметь единичные направления вида $\{a(x), b(x), c(x)\}$, где $b(x) \ne 0$. Поделив на $b(x)$, представим направления образующих в виде $\{l_1(x), 1, l_3(x)\}$, где $l_3(x) = l_1(x)z_x(x, 0)+z_y(x, 0)$. Так как образующие идут от края до края поверхности, их проекции идут от края до края квадрата Q; далее, на поверхности с однозначной проекцией на плоскость xy нет пересечения не только образующих на поверхности, но и их проекций на плоскости xy (иначе над точкой пересечения проекций образующих были бы две точки поверхности $z = z(x, y)$). Из этого следует, что для компоненты $l_1(x)$ должно выполняться неравенство $|l_1(x)| < |x|/\varepsilon$, т. е. при $x \to 0$ имеем $l_1(x) \to 0 = l_1(0)$. Таким образом, если непланарная точка M_0 расположена над некоторым интервалом $(-\delta, \delta) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$, над которым дуга γ состоит из непланарных точек, то непрерывность в M_0 семейства образующих доказана. Пусть теперь такой дуги нет. По упомянотому выше свойству 3 образующие с непланарными точками не могут быть изолированными. Следовательно, на дуге γ существует сходящаяся к M_0 последовательность непланарных точек M_n с абсциссами $x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Образующие, проходящие через M_n, не пересекаются между собой и с осью Oy как с образующей. Поэтому для точек M_n имеем, как и выше, неравенство $|l_1(x_n)| < |x_n|/\varepsilon$. Далее, планарные точки на γ образуют не более чем счетное число интервалов, которым на S соответствуют плоские полосы с границами, являющимися образующими с непланарными точками. Следовательно, прямолинейные границы этих полос не могут пересекаться между собой в квадрате Q, и в пределах каждой полосы эти границы можно соединить непрерывным семейством не пересекающихся между собой образующих. Так как эти образующие не могут пересекаться с осью Oy, снова имеем прежнее неравенство $|l_1(x)| < |x|/\varepsilon$. Таким образом, непрерывность компоненты $l_1(x)$ в точке $x = 0$ доказана. Теперь из равенства $l_3(x) = l_1(x)z_x(x, 0)+z_y(x, 0)$ приходим к непрерывности компоненты $l_3(x)$. Выбирая $b(x) = 1/\sqrt{1 + l_1^1 + l_3^2} > 0$, получаем непрерывные единичные направления образующих.

Внутри квадрата Q нет пересекающихся проекций образующих. Пусть есть две проекции, проходящие через точки $M_1(x_1, 0)$ и $M_2(x_2, 0)$, $0 < x_1 < x_2 < \varepsilon/2$. Обозначим эти прямые соответственно через L_1 и L_2. Их угловые коэффициенты равны $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{l_1(x_1)}$ и $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1}{l_1(x_2)}$. Для угла φ пересечения прямых L_1 и L_2 имеем формулу

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{l_1 - l_2}{1 + l_1 l_2},$$

откуда

$$|l_1(x_2) - l_1(x_1)| = |1 + l_1(x_1)l_1(x_2)| \operatorname{tg}\varphi. \tag{12}$$

Так как пересечение может происходить только вне квадрата Q, угол φ меньше угла φ_0 пересечения L_1 с прямой L_0, соединяющей точку M_2 с точкой M_0, в которой прямая L_1 пересекает одну из горизонтальных сторон квадрата Q с $|y| = \varepsilon$. Для площади S треугольника $\Delta M_1M_2M_0$ имеем два равенства

$$2S = (x_2 - x_1)\varepsilon, \quad 2S = |M_1M_0||M_2M_0| \sin\varphi_0,$$

из которых выводим оценки

$$|\sin\varphi_0| = \frac{\varepsilon(x_2 - x_1)}{|M_1M_0||M_2M_0|} < \frac{x_2 - x_1}{\varepsilon} < \frac{1}{2}.$$

Теперь из (12) получаем

$$|l_1(x_2) - l_1(x_1)| < \frac{2}{\sqrt{3}\varepsilon}\Big(1 + \frac{x_1x_2}{\varepsilon^2}\Big)|x_2 - x_1|,$$

т. е. функция $l_1(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Повернув поверхность на достаточно малый угол φ вокруг оси Oy (чтобы оставалась однозначная проектируемость поверхности на квадрат размером $2\varepsilon \times 2\varepsilon$ на новой плоскости $\tilde{x}Oy$), получим возможность установить выполнение условия Липшица для комбинации вида $l_1(x)\cos\varphi + l_3(x)\sin\varphi$, а отсюда имеем, что $l_3(x)$ тоже удовлетворяет условию Липшица. Затем умножением на $b(x) = 1/\sqrt{1 + l_1^2 + l_3^2} \in C^{0,1}$ завершаем построение поля единичных векторов $\mathbf{l}(u) \in C^{0,1}$ направлений образующих. Выполнение при этом равенства вытекает из условия, что вдоль образующих нормаль к поверхности имеет постоянное направление. Теорема 3 доказана.

5. Теперь докажем теорему 4. Выберем на поверхности с уравнением (2) некоторую точку и расположим оси координат таким образом, чтобы ось Ox была направлена в этой точке по касательной к направляющей линии, а ось Oz — по нормали к поверхности. При таком выборе осей координат образующая не будет располагаться на плоскости xOz. Тогда направляющую линию можно параметризовать значениями x:

$$x = t, \quad y = f(t), \quad z = g(t).$$

Компоненты радиус-вектора $\mathbf{r}(t, v)$ поверхности примут вид

$$x(t, v) = t + va(t), \quad y = f(t) + vb(t), \quad z = g(t) + vc(t),$$

где a, b, c — компоненты вектора $\mathbf{l}(t)$ по направлению образующих. Так как $b(0) \neq 0$ и $b(t) \in C^{0,1}$, вводя новые внутренние координаты $t = t$, $V = v/b(t)$, уравнение поверхности можно записать окончательно в виде

$$\mathbf{r}(t, V) = \{x(t, V), y(t, V), z(t, V)\} = \{t + VA(t), f(t) + V, g(t) + VC(t)\}, \qquad (13)$$

где $f(t), g(t) \in C^1$, $A(t), C(t) \in C^{0,1}$ и $f'(0) = g'(0) = 0$. Условие (3) приводит к уравнению

$$C'(t)(1 - A(t)f'(t)) + C(t)A'(t)f'(t) - A'(t)g'(t) = 0. \qquad (14)$$

Единственная серьезная проблема — доказать, что поверхность на самом деле является C^1-гладкой. Для этого рассмотрим ее представление в явном виде $z = z(x, y)$. Из уравнений

$$t - VA(t) - x = 0, \quad V + f(t) - y = 0$$

имеем

$$F(x, y, t) = t - (y - f(t))A(t) - x = 0, \quad V = y - f(t).$$

Так как функция A принадлежит $C^{0,1}$, т. е. ее существующие производные ограничены, функция $F(x, y, t)$ при достаточно малых значениях аргументов монотонна по t. Тогда применима теорема о неявной функции (см. [15, т. 1]), которая дает существование непрерывной неявной функции $t = t(x, y)$. Теми же рассуждениями, как и регулярном случае, легко показать, что для значений t, в которых есть производная $A'(t)$, функция $t(x, y)$ имеет частные производные, вычисляемые по обычным правилам

$$t'_x = \frac{1}{1 - (A(t)f(t))' + yA'(t)}, \quad t'_y = \frac{-A(t)}{1 - (A(t)f(t))' + yA'(t)}, \quad t = t(x, y). \quad (15)$$

Тогда функция $V = V(x,y) = y - f(t(x,y))$ непрерывна и тоже почти всюду имеет частные производные, вычисляемые по формулам

$$V'_x = -f'(t)t'_x(x,y), \quad V'_y = 1 + -f'(t)t'_y, \quad t = t(x,y).$$

Покажем, что у функции $z = z(x,y) = z(t(x,y), V(x,y))$ есть непрерывные частные производные. В точках, где у функций $t(x,y)$ и $V(x,y)$ существуют производные, имеем

$$z'_x(x,y) = (g'(t) + (y - f(t))C'(t) - C(t)f'(t))\, t'_x(x,y), \quad t = t(x,y).$$

Подставим сюда значение $t'_x(x,y)$ из формулы (15) и учтем уравнение (14), предварительно умножив и разделив исследуемое выражение на $(1 - Af'(t)) \neq 0$. Тогда числитель чудесным образом разлагается на два сомножителя, один из которых в точности оказывается равным знаменателю в выражении (15) для $t'_x(x,y)$, а в другом нет производных от $\mathbf{l}(t)$. В итоге получаем, что производная z'_x имеет вид

$$z'_x(x,y) = \frac{g'(t) - C(t)f'(t)}{1 - A(t)f'(t)}, \quad t = t(x,y). \tag{16}$$

Значит, $z'_x(x,y)$ непрерывна на множестве точек своего существования, а так как она существует почти всюду, ее по непрерывности можно продолжить на все точки выражением (16). Аналогично доказывается непрерывность и производной $z'_y(x,y)$. Значит, мы имеем линейчатую C^1-гладкую поверхность, у которой нормаль идет в постоянном направлении вдоль каждой образующей, а такие поверхности имеют локально евклидову метрику (это следует из работ [8, 9], а прямое доказательство можно найти в [12]).

6. Добавление. Приведем рассуждения, которые можно считать пояснением происхождения формул (5). Пусть развертывающаяся C^2-гладкая поверхность пересечена некасательной к ней плоскостью, не содержащей проходящую через данную точку образующую. Эту плоскость примем за плоскость xOz, а рассматриваемую точку — за начало координат. Направляющая плоская кривая L принадлежит классу C^2. Предполагаем, что в достаточно малой окрестности начала координат она однозначно проектируется на ось Ox. Параметризуем ее точки значениями u отношения dz/dx, которое не может быть постоянным ни на каком интервале, так как в противном случае на поверхности будет плоская область, что противоречит предположению отсутствия на ней точек уплощения. Положим $x = g(u)$, $z = z(x) = z(g(u))$; тогда

$$z'_u = ug', \quad z = ug(u) - \int g(t)\, dt.$$

По выбору параметра u имеем $g'(u) \neq 0$. Теперь ищем асимптотическое представление поверхности в виде $\{g(u), 0, z(u)\} + v\{a(u), 1, b(u)\}$ (такое представление направления образующих возможно, поскольку они не касательны к плоскости xOz). Условие развертываемости поверхности приводит к уравнению $b' = ua'$. Положив $a = -f'$, получаем $b = f - uf'$ и приходим к приведенному в формуле (5) представлению развертывающейся поверхности класса C^2.

Замечание 4. Как видно из формулы (1), для нормальных развертывающихся поверхностей тоже можно написать уравнение горловой линии, но в силу возможного существования разрывов производной $\mathbf{l}'(u)$ эта линия может не быть непрерывной и может оказаться, что на одной образующей есть две особые точки. Интересно было бы построить примеры поверхностей, на которых есть много образующих с двумя особыми точками, так что поверхность в целом имеет не две полости, а три или даже больше. Задача эта не кажется тривиальной, так как нужно научиться находить гладкие функции $f(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие уравнению (14) с разрывными коэффициентами $A'(t)$ и $C'(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехиздат, 1956.

2. *Klingenberg W.* A course in differential geometry. Berlin etc.: Springer-Verl., 1978.

3. *Ushakov V.* Parametrization of developable surfaces by asymptotic lines // Bull. Austral. Math. Soc. 1996. V. 54. P. 411–421.

4. *Hartman Ph., Nirenberg L.* On spherical image maps whose Jacobians do not change sign // Amer. J. Math. 1959. V. 81, N 4. P. 901–920.

5. *Lebesgue H.* Intégral. Longueur. Aire // Ann. Mat. 1902. V. 7. Ser. III. P. 227–359.

6. *Борисов Ю. Ф.* Нерегулярные поверхности класса $C^{1,\beta}$ с аналитической метрикой // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 1. С. 25–61.

7. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1968.

8. *Бураго Ю. Д.* Геометрия поверхностей в евклидовых пространствах // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 48. Геометрия-3. С. 5–97. (Итоги науки и техники).

9. *Шефель С. З.* C^1-гладкие изометрические погружения // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 6. С. 1372–1393.

10. *Шефель С. З.* C^1-гладкие поверхности ограниченной внешней положительной кривизны // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 5. С. 1122–1123.

11. *Ushakov V.* The explicit general solution of trivial Monge–Ampère equation // Comment. Math. Helv. 2000. V. 75, N ????. P. 125–133.

12. *Sabitov I. Kh.* Isometric immersions and embeddings of locally Euclidean metrics. Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2009.

13. *Штогрин М. И.* Кусочно-гладкие развертывающиеся поверхности // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2008. Т. 263. С. 227–250.

14. *Залгаллер В. А.* Теория огибающих. М.: Физматгиз, 1975.

15. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1958.

Статья поступила 18 апреля 2009 г.

Сабитов Иджад Хакович
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, Москва 119992 ГСП-2
isabitov@mail.ru