Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 514.172:517.982:519.81:519.855

МНОГОЦЕЛЕВЫЕ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОЙ ГЕОМЕТРИИ

С. С. Кутателадзе

Аннотация. Рассмотрен новый класс экстремальных задач выпуклой геометрии, в которых требуется добиться наилучшего результата при наличии противоречивых целей, например, при заданной площади поверхности выпуклой фигуры максимизировать ее объем и минимизировать толщину. Эти задачи трактуются в духе теории многокритериального принятия решений. Даны описания Парето-оптимальных решений векторных задач изопериметрического типа на основе техники пространства выпуклых множеств, линейной мажоризации и смешанных объемов.

Ключевые слова: изопериметрическая задача, векторная оптимизация, оптимум Парето, смешанный объем, александровская мера, линейная мажоризация, задача Урысона, эффект Лейденфроста.

Ю. Г. Решетняку к его 80-летию

Рождение теории экстремальных задач принято связывать с мифической финикийской принцессой Дидоной. В первой главе «Энеиды» Вергилий приводит рассказ о бегстве Дидоны от ее вероломного брата. Дидона должна была принять решение о выборе земельного участка для строительства будущего Карфагена, подчиняясь известному ограничению: «сколько можно одною шкурой быка охватить (потому и название Бирса)». Согласно легенде финикийцы разрезали шкуру на ремни и охватили обширный участок. Теперь принято считать, что дело было сведено к изопериметрической задаче — поиску фигуры наибольшей площади при условии, что она ограничена кривой, имеющей наперед заданную длину. Не исключено, что Дидона и ее подданные решали практические варианты этой задачи, когда крепость строилась на побережье и часть границы в каком-то виде была предписана. Основание Карфагена принято относить к IX веку до нашей эры, когда евклидовой геометрии не было и в помине, составление земельного кадастра было уделом гарпедонаптов, а обмер участков использовался для принятия управленческих решений. Измерение площадей с помощью натягивания веревок вокруг колышков приводит к выпуклым фигурам. В классе таких фигур решение задачи Дидоны единственно, если фиксированная непустая часть границы представляет собой выпуклую ломаную.

В XX веке принятие решений стало разделом науки. Главной особенностью современных управленческих ситуаций является наличие большого числа противоречивых условий и конфликтующих интересов. Согласование интересов в подобных обстоятельствах представляет собой особую, исключительно сложную гуманитарную проблему, не имеющую кандидатов на единственное решение.

Экстремальные задачи, в которых требуется одновременно оптимизировать многие параметры, относят к *векторной* или *многоцелевой оптимизации*. Поиск управлений в подобных ситуациях называют *многокритериальным принятием решений*. Математический аппарат этих дисциплин в настоящее время не слишком изощрен (см. [1, 2] и приведенную там библиографию).

Бо́льшая часть исследований нашего времени связана с понятием *оптимальности в смысле Парето* или *Парето-оптимальности* (см., например, [3–6]). Поясним эту концепцию примером коллектива экономических агентов, каждый из которых стремится максимизировать собственный свой доход. Принцип Парето состоит в том, что эффективным согласованием конфликтующих интересов группы служит такое состояние, в котором никто не может повысить свой доход иначе, как понизив доход хотя бы одного из своих конкурентов. С формальной точки зрения речь идет о поиске максимального элемента в множестве, составленном из наборов доходов участников группы в каждом состоянии, т. е. векторов конечномерного пространства, наделенного покоординатным порядком. Понятно, что концепция Парето-оптимальности давно обобщена на случай общих упорядоченных векторных пространств (подробности в [7–10]).

Вариационные принципы механики, ставшие основой вариационного исчисления, были призваны, хотя бы отчасти, обосновать христианские установки об уникальности и красоте акта творения. Экстремальные задачи, в огромном количестве изученные в разных разделах математики, используют только скалярные целевые функции. Многоцелевые постановки задач возникли сравнительно недавно, причем вне математики, что объясняет значительный разрыв в сложности и эффективности математических средств, разработанных для одноцелевых и многоцелевых задач. В этой связи представляется целесообразным расширить внутриматематический запас задач векторной оптимизации.

Проще всего начать с задач, использующих понятие оптимальности по Парето. Дело в том, что такие задачи фактически эквивалентны параметрическому семейству одноцелевых задач, которые могут быть исследованы классическими средствами. Например, существует кривая, соединяющая полиномы Лежандра и Чебышёва и состоящая из «Парето-оптимальных» полиномов относительно равномерной и среднеквадратичной метрик. Нетрудно понять, что некоторые физические процессы допускают осмысление в рамках векторной оптимизации. Например, эффект Лейденфроста — процесс испарения жидкости в сфероидальном состоянии (см. [11, с. 300–303]) — можно трактовать как задачу одновременной минимизации площади поверхности и толщины капли данного объема.

В настоящей работе анализируется класс геометрически содержательных задач векторной оптимизации, решение которых удается указать достаточно явно в терминах условий на поверхностные функции. В качестве модельных примеров даны явные решения задач Урысона, усложненных условием уплощения в заданном направлении или требованием оптимизации выпуклой оболочки нескольких фигур. С технической точки зрения дело сводится к параметрическому программированию задач изопериметрического типа со многими ограничениями на основе подхода, развитого в [12, 13]. В то же время используемая здесь техника функционально-аналитического исследования экстремальных задач выпуклой геометрии по-прежнему не слишком известна, так что ее необычные применения могут оказаться полезными при заполнении брешей между исследованиями внутри математики и ее приложениями к теории и практике многокритериального принятия решений.

1. Пространство выпуклых множеств

1.1. Как известно, классическая *двойственность Минковского* состоит в отождествлении *выпуклой фигуры*, т. е. выпуклого компактного подмножества $\mathfrak{x}$ пространства $\mathbb{R}^N$ и его *опорной функции* $\mathfrak{x}(z) := \sup\{(x, z) \mid x \in \mathfrak{x}\}$ для $z \in \mathbb{R}^N$. Рассматривая элементы $\mathbb{R}^N$ как одноточечные фигуры, считают, что $\mathbb{R}^N$ включено в совокупность всех выпуклых фигур $\mathscr{V}_N$ пространства $\mathbb{R}^N$. Двойственность Минковского индуцирует в $\mathscr{V}_N$ структуру конуса в пространстве $C(S_{N-1})$ непрерывных функций на единичной евклидовой сфере S_{N-1} — границе шара $\mathfrak{z}_N$. Эту параметризацию называют *структурой Минковского.* Сложению опорных функций при этом соответствует переход к их алгебраической сумме, называемой *суммой Минковского.* Полезно отметить, что *линейная оболочка* $[\mathscr{V}_N]$ конуса $\mathscr{V}_N$ плотна в $C(S_{N-1})$. Все эти обстоятельства отмечены в классических работах А. Д. Александрова по теории смешанных объемов, который широко использовал в своих геометрических сочинениях идеи и аппарат функционального анализа. Впоследствии погружением классов выпуклых фигур в функциональные пространства занимались многие авторы.[1]

1.2. *Выпуклым телом* называют выпуклую фигуру с непустой внутренностью. Границу выпуклого тела называют (*полной*) *выпуклой поверхностью.* Класс эквивалентных с точностью до переноса выпуклых поверхностей $\{z + \mathfrak{x} \mid z \in \mathbb{R}^N\}$ отождествляют с соответствующей мерой на сфере — с *поверхностной функцией* этого класса $\mu(\mathfrak{x})$. Полной многогранной выпуклой поверхности, заданной единичными нормалями $z_1, \dots, z_m$ ее $(N-1)$-мерных граней, имеющих площади $s_1, \dots, s_m$, сопоставляют взвешенную сумму мер Дирака в точках $z_1, \dots, z_m$. Иными словами, $\sum_{k=1}^m s_k \varepsilon_{z_k}$. Поверхностную функцию произвольного выпуклого тела $\mathfrak{x}$ можно определить как слабый предел поверхностных функций сети вписанных в $\mathfrak{x}$ выпуклых многогранников. Поверхностная функция представляет собой *александровскую меру.* Так называют положительную меру на сфере, не сосредоточенную ни в одном сечении сферы гиперподпространством и аннулирующую точки (т. е. обращающуюся в нуль на следах линейных функционалов над $\mathbb{R}^N$ на сферу S_{N-1}). Корректность отождествления класса транслятов выпуклого тела и его поверхностной функции основана на классической теореме Александрова (см. [14, с. 106]) о возможности восстановления выпуклой поверхности по заданной поверхностной функции. Эта теорема опубликована в 1938 г.

Александровская мера является инвариантным относительно сдвигов функционалом на конусе $\mathscr{V}_N$. В контексте теории выпуклых тел последнее свойство меры называют *инвариантностью относительно сдвигов.* Конус положительных инвариантных относительно сдвигов мер в *сопряженном пространстве* $C'(S_{N-1})$ обозначают через $\mathscr{A}_N$. Уточним некоторые из используемых понятий.

1.3. Пусть $\mathscr{V}_N$ — множество выпуклых фигур в $\mathbb{R}^N$. Для $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathscr{V}_N$ символическая запись $\mathfrak{x} =_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{y}$ означает совпадение $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ с точностью до параллельного переноса. Можно сказать, что $=_{\mathbb{R}^N}$ — отношение эквивалентности, связанное с предпорядком $\geq_{\mathbb{R}^N}$ в $\mathscr{V}_N$, выражающим вместимость одной фигуры в другую при помощи параллельного переноса. Рассмотрим фактор-множество $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$, составленное из классов транслятов элементов $\mathscr{V}_N$. Ясно, что $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ — конус

[1]В геометрических исследованиях по умолчанию $n \geq 2$. Случай $n = 1$ дает *интервальную арифметику.*

в фактор-пространстве $[\mathscr{V}_N]/\mathbb{R}^N$ векторного пространства $[\mathscr{V}_N]$ по подпространству $\mathbb{R}^N$.

1.4. Между $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ и $\mathscr{A}_N$ существует естественная биекция. Класс точек отождествляется с нулевой мерой. Классу, содержащему отрезок с концами x и y, сопоставляется мера $|x-y|(\varepsilon_{(x-y)/|x-y|}+\varepsilon_{(y-x)/|x-y|})$, где $|\cdot|$ — евклидова длина вектора из $\mathbb{R}^N$. Если размерность аффинной оболочки $\operatorname{aff}(\mathfrak{x})$ представителя $\mathfrak{x}$ класса поверхностей из $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ больше единицы, то считаем, что $\operatorname{aff}(\mathfrak{x})$ — подпространство $\mathbb{R}^N$ и класс отождествляем с поверхностной функцией $\mathfrak{x}$ в $\operatorname{aff}(\mathfrak{x})$, являющейся в данном случае некоторой мерой на $S_{N-1}\cap\operatorname{aff}(\mathfrak{x})$. Продолжая эту меру тривиальным способом до меры на S_{N-1}, получаем элемент из $\mathscr{A}_N$, отвечающий классу, порожденному $\mathfrak{x}$. Биективность этого соответствия легко вытекает из теоремы Александрова.

Структура векторного пространства в множестве регулярных борелевских мер индуцирует в $\mathscr{A}_N$ и, следовательно, в $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ структуру конуса, точнее, структуру $\mathbb{R}_+$-операторной коммутативной полугруппы с сокращением. Эту структуру в $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ называют *структурой Бляшке.* Подчеркнем, что сумма поверхностных функций выпуклых тел $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ порождает единственный класс $\mathfrak{x}\#\mathfrak{y}$, называемый *суммой Бляшке* $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$. В деталях эти конструкции описал Файри [15]. О процедурах построения сумм Бляшке см. также [16].

1.5. Пусть $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$ — фактор-пространство пространства $C(S_{N-1})$ по подпространству следов линейных функционалов на S_{N-1}. Обозначим через $[\mathscr{A}_N]$ пространство $\mathscr{A}_N-\mathscr{A}_N$ инвариантных относительно сдвигов мер. Легко видеть, что $[\mathscr{A}_N]$ представляет собой также и линейную оболочку множества александровских мер. Пространства $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$ и $[\mathscr{A}_N]$ приведены в двойственность канонической билинейной формой

$$\langle f,\mu\rangle=\frac{1}{N}\int\limits_{S_{N-1}} f\,d\mu\quad (f\in C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N,\ \mu\in[\mathscr{A}_N]).$$

Для $\mathfrak{x}\in\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ и $\mathfrak{y}\in\mathscr{A}_N$ величина $\langle\mathfrak{x},\mathfrak{y}\rangle$ совпадает со *смешанным объемом* $V_1(\mathfrak{y},\mathfrak{x})$. В частности, если $\mathfrak{z}_N$ — единичный евклидов шар в $\mathbb{R}^N$, то величина $V_1(\mathfrak{x},\mathfrak{z}_N)$ пропорциональна *площади поверхности* $\mathfrak{x}$, а величина $V_1(\mathfrak{z}_N,\mathfrak{x})$ — *интегральной ширине* $\mathfrak{x}$. Напомним, что *ширина* $b_z(\mathfrak{x})$ выпуклой фигуры $\mathfrak{x}$ в направлении $z\in\mathbb{R}_N$ определяется формулой $b_z(\mathfrak{x}):=\frac{1}{2}(\mathfrak{x}(z)+\mathfrak{x}(-z))$. Отметим также, что $V_1(\mathfrak{x},\mathfrak{x})$ — *объем* $\mathfrak{x}$. Пространство $[\mathscr{A}_N]$ принято рассматривать со слабой топологией, порожденной указанной двойственностью с $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$.

Значение приведенных конструкций выходит за пределы нового определения суммы выпуклых поверхностей. Наличие двойственной пары нерефлексивных банаховых пространств удивительно сочетается с теоремой Александрова, устанавливающей необычный содержательный изоморфизм между упорядочивающими конусами в этих пространствах. Названные обстоятельства для функционального анализа совершенно исключительны и открывают дополнительные возможности для применения абстрактных методов. Рассматривая выпуклые поверхности $\mathfrak{x}$ с данным *носителем* $\operatorname{supp}(\mathfrak{x})$ поверхностной функции $\mu(\mathfrak{x})$, мы видим, что это конус (с выколотой вершиной) в структуре Бляшке. Для носителя, состоящего из конечного числа точек, речь идет о классе многогранников с заданными направлениями внешних нормалей к граням. В геометрии хорошо известна *задача Линделёфа* в этом классе, приводящая к экстремальному свойству многогранника, описанного вокруг шара.

1.6. Различие между выпуклым компактом, соответствующим классом транслятов в $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ и отвечающей этому классу мерой в $\mathscr{A}_N$ не проводится в случаях, когда это не должно вызвать недоразумений. При этом единое обозначение нередко используют для всех названных ипостасей геометрического объекта.

Можно отметить, что в случае структуры Минковского *объем* $V(\mathfrak{x}) := \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle$ является однородным полиномом степени N. По этой причине вычисление его субдифференциала не вызывает затруднений. При сложении поверхностей по Бляшке в пространстве размерности $N \geq 3$ объем перестает быть однородным полиномом.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями $p : \mathfrak{x} \mapsto V^{1/N}(\mathfrak{x})$ для $\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ и $\hat{p} : \mathfrak{x} \mapsto V^{(N-1)/N}(\mathfrak{x})$ для $\mathfrak{x} \in \mathscr{A}_N$. Таким образом, *неравенство Минковского* переписывается в виде $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle \geq p(\mathfrak{x})\hat{p}(\mathfrak{y})$. По теореме Брунна — Минковского функционал p, определенный на конусе $\mathscr{V}_N$, суперлинеен. Отсюда следует, что функционал $\hat{p}$, определенный на конусе $\mathscr{A}_N$, также суперлинеен. Поскольку *площадь поверхности* $\mathfrak{x}$ записывается в виде $S(\mathfrak{x}) = N\langle \mathfrak{z}_N, \mathfrak{x} \rangle$, то изопериметрическая задача[2] в структуре Бляшке превращается в выпуклую программу.

1.7. Изопериметрическая задача:

$$\mathfrak{x} \in \mathscr{A}_N;\ \langle \mathfrak{z}_N, \mathfrak{x} \rangle = \langle \mathfrak{z}_N, \bar{\mathfrak{x}} \rangle;\ \hat{p}(\mathfrak{x}) \to \sup.$$

Простейшей выпуклой программой в структуре Минковского служит *задача Урысона*, состоящая в максимизации объема при заданной интегральной ширине (см. [17]).

1.8. Задача Урысона:

$$\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N;\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N \rangle = \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N \rangle;\ p(\mathfrak{x}) \to \sup.$$

Напомним также, что для выпуклого множества U в векторном пространстве X и точки $\bar{x}$ из U определен конус

$$K_{\bar{x}} := \mathrm{Fd}(U, \bar{x}) := \{h \in X \mid (\exists \alpha \geq 0)\ x + \alpha h \in U\},$$

называемый *конусом допустимых направлений* к U в точке $\bar{x}$. Понятно, что анализ оптимальных решений в названных задачах требует нахождения производных по допустимым направлениям конусов $\mathscr{V}_N$ и $\mathscr{A}_N$. Пусть $p_{\bar{\mathfrak{x}}}$ — производная функционала $\mathfrak{y} \in \mathscr{V}_N \mapsto \hat{p}(\bar{\mathfrak{x}})p(\mathfrak{y})$ в точке $\bar{\mathfrak{x}}$. Аналогично обозначим через $\hat{p}_{\bar{\mathfrak{x}}}$ производную функционала $\mathfrak{y} \in \mathscr{A}_N \mapsto \hat{p}(\mathfrak{y})p(\mathfrak{x})$ в точке $\bar{\mathfrak{x}}$.

1.9. *Имеют место представления:*
(1) $\hat{p}_{\bar{\mathfrak{x}}}(\mathfrak{g}) = \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{g} \rangle$ *для всякого направления* $\mathfrak{g} \in \mathscr{A}_{N,\bar{\mathfrak{x}}}$*;*
(2) $p_{\bar{\mathfrak{x}}}(g) = \langle g, \bar{\mathfrak{x}} \rangle$ *для всякого направления* $g \in \mathscr{V}_{N,\bar{\mathfrak{x}}}$ (*см.* [18]).

1.10. Детали и литературные подробности, касающиеся выпуклой геометрии, представлены в [19]. Теория Брунна — Минковского обстоятельно отражена в [20–22].

2. Линейная мажоризация и двойственные конусы

2.1. Под *двойственным конусом* K^* к данному конусу K в векторном пространстве X, приведенном в двойственность с пространством Y, понимают

[2] Термин «изопифанная задача» представляется несколько педантичным.

совокупность положительных линейных функционалов на K, т. е. $K^* := \{y \in Y \mid \langle x, y\rangle \geq 0\}$.

В рассматриваемой нами ситуации известно описание всех необходимых двойственных конусов.

2.2. *Двойственный конус $\mathscr{A}_N^*$ является конусом положительных элементов в $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$.*

2.3. *Пусть $\bar{\mathfrak{x}} \in \mathscr{A}_N$. Для конуса $\mathscr{A}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}^*$, двойственного к конусу допустимых направлений в точке $\bar{\mathfrak{x}}$, имеет место представление $\mathscr{A}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}^* = \{f \in \mathscr{A}_N^* \mid \langle \bar{\mathfrak{x}}, f\rangle = 0\}$.*

2.4. В далеком 1954 г. Ю. Г. Решетняк предложил в своей неопубликованной диссертации [23] сравнивать положительные меры на евклидовой сфере S_{N-1} следующим образом.

Мера μ *линейно мажорирует* меру ν при условии, что любому разбиению S_{N-1} на конечное число попарно непересекающихся борелевских множеств $U_1, \dots, U_m$ соответствуют меры $\mu_1, \dots, \mu_m$, в сумме составляющие μ и такие, что каждая разность $\mu_k - \nu|_{U_k}$ аннулирует любые сужения на S_{N-1} линейных функционалов на пространстве $\mathbb{R}^N$. В такой ситуации мы будем писать, что $\mu \gg_{\mathbb{R}^N} \nu$.

2.5. Ю. Г. Решетняк доказал, что

$$\int\limits_{S_{N-1}} p\,d\mu \geq \int\limits_{S_{N-1}} p\,d\nu$$

для любого сублинейного функционала p на $\mathbb{R}^N$ как только $\mu \gg_{\mathbb{R}^N} \nu$. Тем самым им был найден важный прием порождения положительных линейных функционалов над различными классами выпуклых поверхностей и функций.

2.6. В рамках теории Шоке аналогичная идея предложена Люмисом в 1962 г. (см. [24]).

Мера μ *аффинно мажорирует* меру ν (обе эти меры заданы на компактном выпуклом подмножестве Q некоторого локально выпуклого пространства X при условии, что любому разбиению ν в конечное число слагаемых $\nu_1, \dots, \nu_m$ соответствуют меры $\mu_1, \dots, \mu_m$, составляющие в сумме μ и такие, что каждая разность $\mu_k - \nu_k$ аннулирует все ограничения на Q аффинных функций на X. При этом пишут $\mu \gg_{\mathrm{Aff}(Q)} \nu$. Многие приложения аффинной мажоризации представлены в [25].

Картье, Фелл и Мейер доказали в [26], что неравенство

$$\int\limits_Q f\,d\mu \geq \int\limits_Q f\,d\nu$$

имеет место для любой непрерывной выпуклой функции f на Q в том и только том случае, если $\mu \gg_{\mathrm{Aff}(Q)} \nu$. Аналогичное утверждение в сторону необходимости для линейной мажоризации установлено в [27].

Применяя линейную мажоризацию, несложно вывести представления двойственных конусов, необходимых для анализа экстремальных задач выпуклой геометрии.

2.7. *Пусть $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ — выпуклые тела.*
(1) $\mu(\mathfrak{x}) - \mu(\mathfrak{y}) \in \mathscr{V}_N^* \leftrightarrow \mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^N} \mu(\mathfrak{y})$.
(2) *Если* $\mathfrak{x} \geq_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{y}$, *то* $\mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^N} \mu(\mathfrak{y})$.

(3) $\mathfrak{x} \geq_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{y} \leftrightarrow \mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^2} \mu(\mathfrak{y})$.
(4) *Если* $\mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{x}} \in \mathscr{A}^*_{N,\bar{\mathfrak{x}}}$, *то* $\mathfrak{y} =_{\mathbb{R}^N} \bar{\mathfrak{x}}$.
(5) *Если* $\mu(\mathfrak{y}) - \mu(\bar{\mathfrak{x}}) \in \mathscr{V}^*_{N,\bar{\mathfrak{x}}}$, *то* $\mathfrak{y} =_{\mathbb{R}^N} \bar{\mathfrak{x}}$.
(6) *Если* $\bar{\mathfrak{x}}$ *— регулярная выпуклая поверхность, то* $\mathscr{V}^*_{N,\bar{\mathfrak{x}}} = 0$.

2.8. Геометрический смысл соотношения $\mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^N} \mu(\mathfrak{y})$ при $N \geq 3$ остается неясным. Полезно помнить, что обращение 2.7 (2) в общем случае не справедливо. Например, не сравнимы по включению трансляты выпуклых тел $\mathfrak{x} := \mathfrak{z}_N$ и $\mathfrak{y} := \mathfrak{z}_N + \alpha\mathfrak{z}_{N-2}$, где $\alpha = \beta^{1/(N-2)}$, а число β выбрано из условия $2^{N-1}/(2^{N-1}-1) > \beta > 1$. При этом $\mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^N} \mu(\mathfrak{y})$.

На самом деле приложения требуют следующую детализированную версию мажоризации (см. [28]).

2.9. Теорема декомпозиции. *Пусть* $H_1, \dots, H_m$ *— конусы в векторной решетке* X, *а* f, g *— положительные функционалы над* X.

Неравенство

$$f(h_1 \vee \dots \vee h_m) \geq g(h_1 \vee \dots \vee h_m)$$

имеет место для всех $h_k \in H_k$ $(k := 1, \dots, m)$ *в том и только том случае, если для всякого разбиения* g *в сумму* m *положительных слагаемых* $g = g_1 + \dots + g_m$ *найдется разбиение* f *в сумму* m *положительных слагаемых* $f = f_1 + \dots + f_m$ *такое, что*

$$f_k(h_k) \geq g_k(h_k) \quad (h_k \in H_k;\ k := 1, \dots, m).$$

Эту теорему можно применять для вычисления субдифференциала и производной по направлению интегральной ширины выпуклой оболочки нескольких выпуклых фигур и аналогичных агрегатов с другими смешанными объемами.

2.10. *Пусть* $\nu_1, \dots, \nu_m$ *— положительные борелевские меры на* S_{N-1}. *Неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{S_{N-1}} \mathfrak{x}_k d\nu_k \leq \int\limits_{S_{N-1}} \operatorname{co}\{\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m\} d\mu(\mathfrak{z}_N)$$

имеет место для всех $\mathfrak{x}_k \in \mathscr{V}_N$ $(k := 1, \dots, m)$, *в том и только том случае, если найдутся положительные борелевские меры* $\mu_1, \dots, \mu_m$ *на* S_{N-1} *такие, что*

$$\mu_1 + \dots + \mu_m = \mu(\mathfrak{z}_N);\ \mu_k \gg_{\mathbb{R}^N} \nu_k\ (k := 1, \dots, m).$$

Доказательство. В правой части интересующего нас неравенства стоит сублинейный функционал по совокупности $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m$, фигурирующий в 2.9, а левая часть — элемент субдифференциала этого сублинейного функционала на $(\mathscr{V}_N)^m$. Осталось сослаться на 2.7(1) и 2.9.

3. Оптимальность в смысле Парето

Обсудим некоторые современные понятия оптимальности в задачах многокритериального принятия решений более формально.

3.1. Пусть X — векторное пространство, E — упорядоченное векторное пространство, $f : X \to E$ — выпуклый оператор и $C \subset X$ — выпуклое множество. *Векторной выпуклой программой* называют пару (C, f), записывая ее символически в виде

$$x \in C; \quad f(x) \to \inf.$$

Векторную программу принято называть также *многоцелевой* или *многокритериальной экстремальной задачей.* Оператор f называют *целью программы,* а множество C — *ограничением.* Точки $x \in C$ именуют *допустимыми элементами.* Указанная выше запись векторной программы отражает то обстоятельство, что рассматривается экстремальная задача: *найти точную нижнюю границу оператора f на множестве C*. В случае, когда $C = X$, говорят о безусловной задаче или задаче без ограничений.

Ограничения в экстремальной задаче задают по-разному, обычно в виде уравнений и неравенств. Пусть $g : X \to F$ — выпуклый оператор, Λ — линейный оператор, элемент пространства $L(X, Y)$, и $y \in Y$, где Y — векторное пространство, а F — упорядоченное векторное пространство. Если ограничения C_1 и C_2 имеют вид

$$C_1 := \{x \in C \mid g(x) \le 0\};$$
$$C_2 := \{x \in X \mid g(x) \le 0,\ \Lambda x = y\};$$

то вместо (C_1, f) и (C_2, f) пишут соответственно (C, g, f) и (Λ, g, f) или же более выразительно:

$$x \in C;\quad g(x) \le 0;\quad f(x) \to \inf;$$
$$\Lambda x = y;\quad g(x) \le 0;\quad f(x) \to \inf.$$

3.2. Элемент $e := \inf_{x \in C} f(x)$ (если он существует) называют *значением программы* (C, f). Допустимый элемент x_0 называют *идеальным оптимумом* или *решением*, если $e = f(x_0)$. Таким образом, x_0 — идеальный оптимум в том и только том случае, если $f(x_0)$ — наименьший элемент образа $f(C)$, т. е. $f(C) \subset f(x_0) + E^+$. Как обычно, E^+ — конус положительных элементов E.

Может показаться, что идеальный оптимум наблюдается только у числовых задач. В самом деле, маловероятно, что несколько числовых функций достигают минимума в одной и той же точке. Вопреки сказанному, нетрудно придумать абстрактный формализм, в котором различные точки минимума разных функций воспринимаются как единый элемент. Такую абстракцию следует считать *обобщением разжижением* (как указывает Вейль, этот термин принадлежит Полиа). С содержательной точки зрения идеал обычно недостижим, и как приближение к нему нужно рассматривать один из минимальных допустимых элементов.

3.3. Сформулируем соответствующую концепцию оптимальности точнее. Удобно допустить, что E — предупорядоченное векторное пространство, т. е. конус положительных элементов E^+ не обязательно острый. Тем самым подпространство $E_0 := E^+ \cap (-E^+)$, вообще говоря, не сводится к одному нулевому элементу. Взяв $u \in E$, положим $[u] := \{v \in E : u \le v,\quad v \le u\}$. Запись $u \sim v$ означает, что $[u] = [v]$. Допустимую точку x_0 называют *ε-Парето-оптимальной* в программе (C, f), где ε — положительный элемент пространства целей E, если $f(x_0)$ — минимальный элемент множества $f(C) + \varepsilon$, т. е. если $(f(x_0) - E^+) \cap (f(C) + \varepsilon) = [f(x_0)]$. Более подробно, ε-Парето-оптимальность точки x_0 означает, что $x_0 \in C$ и для любой точки $x \in C$ неравенство $f(x_0) \ge f(x) + \varepsilon$ влечет $f(x_0) \sim f(x) + \varepsilon$. Если $\varepsilon = 0$, то говорят просто о *Парето-оптимальности* или об *оптимальности по Парето.* При изучении Парето-оптимальности часто используют *метод скаляризации*, т. е. сведение рассматриваемой программы к скалярной — одноцелевой — экстремальной задаче. Скаляризацию можно проводить по-разному. Рассмотрим один из возможных вариантов.

3.4. Предположим, что предпорядок $\leq$ в E задается формулой

$$u \leq v \leftrightarrow (\forall l \in \partial q)\ lu \leq lv,$$

где $q : E \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал, а ∂q — его субдифференциал. Это равносильно тому, что конус E^+ имеет вид $E^+ := \{u \in E \mid (\forall l \in \partial q)\ lu \geq 0\}$.

Допустимая точка x_0 будет ε-Парето-оптимальной в программе (C, f) в том и только том случае, если для каждого $x \in C$ либо $f(x_0) \sim f(x) + \varepsilon$, либо существует функционал $l \in \partial q$, для которого $lf(x_0) < l(f(x) + \varepsilon)$. В частности, для ε-Парето-оптимальной точки $x_0 \in C$ выполняется

$$\inf_{x \in C} q(f(x) - f(x_0) + \varepsilon) \geq 0.$$

Обратное утверждение неверно, так как последнее неравенство равносильно более слабому понятию оптимальности.

3.5. Говорят, что точка $x_0 \in C$ *слабо ε-Парето-оптимальна*, если для каждого $x \in C$ найдется такой функционал $l \in \partial q$, что $l(f(x) - f(x_0) + \varepsilon) \geq 0$, т. е. если ни для какого $x \in C$ не может быть совместной система строгих неравенств $lf(x_0) < l(f(x)+\varepsilon) \quad (l \in \partial q)$. Как видно, слабая ε-Парето-оптимальность равносильна тому, что $q(f(x) - f(x_0) + \varepsilon) \geq 0$ для всех $x \in C$, и это понятие нетривиально лишь в случае $0 \notin \partial q$. Можно развивать эту концепцию в духе инфинитезимального анализа, рассматривая бесконечно малые параметры ε (детали и подробности собраны в [10, гл. 5]).

3.6. Субдифференциальное исчисление показывает, что в простейшем случае оптимизационной задачи с конечным числом скалярных критериев Парето-оптимальные точки представляют собой решения задачи параметрического программирования. Например, в случае двух критериев каждая Парето-оптимальная точка минимизирует подходящую взвешенную сумму этих критериев.

4. Модельные многоцелевые задачи

Приведенные выше факты позволяют анализировать многокритериальные экстремальные задачи геометрии, связанные с целевыми функциями и ограничениями, для которых известны необходимые производные по направлениям и строение двойственных конусов. Переход к Парето-оптимальности в силу общей теории экстремальных задач приводит к скалярным задачам с более сложными целевыми функциями. Характер комбинирования геометрического и функционального аналитического аппарата при этом существенно не меняется. Здесь приведены несколько модельных примеров многоцелевых задач, связанных как со структурой Бляшке, так и со структурой Минковского.

4.1. Векторная изопериметрическая задача. Пусть заданы выпуклые тела $\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_m$. Требуется найти тело $\mathfrak{x}$, имеющее заданный объем и минимизирующее каждый из смешанных объемов $V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1), \dots, V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_m)$. Символически:

$$\mathfrak{x} \in \mathscr{A}_N;\ \hat{p}(\mathfrak{x}) \geq \hat{p}(\bar{\mathfrak{x}});\ (\langle \mathfrak{y}_1, \mathfrak{x} \rangle, \dots, \langle \mathfrak{y}_m, \mathfrak{x} \rangle) \to \inf.$$

Нетрудно видеть, что мы имеет дело с регулярной в смысле Слейтера выпуклой программой в структуре Бляшке. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

4.2. Теорема. *Любое Парето-оптимальноео решение $\bar{\mathfrak{x}}$ векторной изопериметрической задачи имеет вид*

$$\bar{\mathfrak{x}} = \alpha_1 \mathfrak{y}_1 + \dots + \alpha_m \mathfrak{y}_m,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — положительные числа.

Поясним приведенный результат для *эффекта Лейденфроста* — сфероидального состояния капли жидкости на горизонтальной поверхности нагрева.

4.3. Задача Лейденфроста. В трехмерном пространстве при заданном объеме выпуклой фигуры минимизировать ее площадь поверхности и вертикальную ширину.

В силу симметрии дело сводится к плоской двухкритериальной задаче, каждое Парето-оптимальное решение которой в силу уже сказанного представляет собой *стадион* — взвешенную сумму Минковского круга и горизонтального отрезка.

4.4. Теорема. *Плоский сфероид — Парето-оптимальное решение задачи Лейденфроста — представляет собой результат вращения стадиона вокруг вертикальной оси, проходящей через центр его симметрии.*

4.5. Внутренняя задача Урысона с уплощением. Пусть заданы выпуклое тело $\mathfrak{x}_0 \in \mathscr{V}_N$ и направление уплощения $\bar{z} \in S_{N-1}$. Среди тел, лежащих в $\mathfrak{x}_0$ и имеющих данную интегральную ширину, найти тела $\mathfrak{x}$, максимизирующие объем и минимизирующие толщину в направлении уплощения:

$$\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N;\ \mathfrak{x} \subset \mathfrak{x}_0;\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N \rangle \geq \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N \rangle;\ (-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})) \to \inf.$$

4.6. Теорема. *Для того чтобы допустимое выпуклое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ было Парето-оптимальным решением внутренней задаче Урысона с уплощением в направлении $\bar{z}$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись положительные числа α, β и критическая фигура $\mathfrak{x}$ такие, что*

$$\mu(\bar{\mathfrak{x}}) = \mu(\mathfrak{x}) + \alpha\mu(\mathfrak{z}_N) + \beta(\varepsilon_{\bar{z}} + \varepsilon_{-\bar{z}});$$
$$\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \quad (z \in \operatorname{supp}(\mu(\mathfrak{x}))).$$

Доказательство. В целях иллюстрации вывод критерия оптимальности мы проведем с несколько излишними деталями. На самом деле достаточно сослаться, например, на [10, § 5.2] или другие многочисленные источники, трактующие оптимальность по Парето в несколько меньшей общности.

Прежде всего заметим, что внутренняя задача Урысона с уплощением переписывается в пространстве $C(S_{N-1})$ как следующая двухцелевая программа:

$$\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N;$$
$$\max\{\mathfrak{x}(z) - \mathfrak{x}_0(z) \mid z \in S_{N-1}\} \leq 0;$$
$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N \rangle \geq \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N \rangle;$$
$$(-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})) \to \inf.$$

Задача на оптимум Парето сводится к скалярной программе:

$$\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N;$$
$$\max\{\max\{\mathfrak{x}(z) - \mathfrak{x}_0(z) \mid z \in S_{N-1}\}, \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N \rangle - \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N \rangle\} \leq 0;$$
$$\max\{-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})\} \to \inf.$$

Последняя задача регулярна в смысле Слейтера, и, стало быть, для нее справедлив *принцип Лагранжа* — значение этой задачи совпадает со значением задачи безусловной минимизации подходящего лагранжиана

$$\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N;$$
$$\max\{-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})\} + \gamma \max\{\max\{\mathfrak{x}(z) - \mathfrak{x}_0(z) \mid z \in S_{N-1}\}, \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N \rangle - \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N \rangle\} \to \inf.$$

Здесь γ — положительный множитель Лагранжа.

Остается провести дифференцирование по допустимым направлениям и сослаться на 1.9(2) и 2.7(5). Отметим, в частности, что соотношение

$$\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \quad (z \in \operatorname{supp}(\mu(\mathfrak{x})))$$

представляет собою обычное в программировании условие *дополняющей нежесткости* для ограничения типа включения. Тем самым доказательство критерия оптимальности для внутренней задачи Урысона с уплощением завершено.

Пусть плоская фигура $\mathfrak{x}_0 \in \mathscr{V}_2$ имеет ось симметрии $A_{\bar{z}}$ с направляющим вектором $\bar{z}$. Пусть, далее, $\mathfrak{x}_{00}$ — результат вращения $\mathfrak{x}_0$ вокруг оси симметрии $A_{\bar{z}}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. При этих данных возникает

4.7. Случай поверхностей вращения:

$$\begin{gathered} \mathfrak{x} \in \mathscr{V}_3;\ \mathfrak{x} \text{ — тело вращения вокруг оси } A_{\bar{z}};\\ \mathfrak{x} \supset \mathfrak{x}_{00};\ \langle \mathfrak{z}_N, \mathfrak{x}\rangle \geq \langle \mathfrak{z}_N, \bar{\mathfrak{x}}\rangle;\\ (-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})) \to \inf. \end{gathered}$$

В силу вращательной симметрии пространственная задача сводится к аналогичной задаче в плоскости. На плоскости интегральная ширина и периметр выпуклой фигуры пропорциональны и мы приходим к уже рассмотренной задаче 4.5. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

4.8. Теорема. *Парето-оптимальные решения в случае 4.7 возникают в результате вращения вдоль оси симметрии Парето-оптимальных решений плоской внутренней задачи Урысона с уплощением вдоль этой оси.*

Относительно подобных задач в произвольных размерностях известно совсем немного (см., например, [29–31] и приведенную там литературу). Особняком стоит работа А. В. Погорелова [32]), в которой доказано, что «мыльный пузырь» в тетраэдре имеет форму обкатки шаром решения внутренней задачи Урысона, т. е. взвешенной суммы Бляшке тетраэдра и шара. О реальных мыльных пузырях см. [33, 34].

4.9. Внешняя задача Урысона с уплощением. Пусть заданы выпуклое тело $\mathfrak{x}_0 \in \mathscr{V}_N$ и направление уплощения $\bar{z} \in S_{N-1}$. Среди тел, содержащих $\mathfrak{x}_0$ и имеющих данную интегральную ширину, найти тела $\mathfrak{x}$, максимизирующие объем и минимизирующие толщину в направлении уплощения:

$$\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N;\ \mathfrak{x} \supset \mathfrak{x}_0;\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N\rangle \geq \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N\rangle;\ (-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})) \to \inf.$$

4.10. Теорема. *Для того чтобы допустимое выпуклое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ было Парето-оптимальным решением внешней задачи Урысона с уплощением в направлении $\bar{z}$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись положительные числа α, β и критическая фигура $\mathfrak{x}$ такие, что*

$$\begin{gathered} \mu(\bar{\mathfrak{x}}) + \mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^N} \alpha\mu(\mathfrak{z}_N) + \beta(\varepsilon_{\bar{z}} + \varepsilon_{-\bar{z}});\\ V(\bar{\mathfrak{x}}) + V_1(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}) = \alpha V_1(\mathfrak{z}_N, \bar{\mathfrak{x}}) + 2N\beta b_{\bar{z}}(\bar{\mathfrak{x}});\\ \bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \quad (z \in \operatorname{supp}(\mu(\mathfrak{x}_0))). \end{gathered}$$

Доказательство. Проводится по аналогии с внутренней задачей Урысона с уплощением. Дополнительное равенство для смешанных объемов возникает как дешифровка условия дополняющей нежесткости.

4.11. Приведенный список может быть продолжен для многоцелевых обобщений многих скалярных задач, среди которых задачи с зонными ограничениями и текущими гиперплоскостями, задачи в классе центрально-симметричных фигур, задачи типа Линделёфа и др. (см. [35–37]). Эти задачи, как правило, выпуклы в структуре Бляшке или Минковского. Невыпуклые параметрические задачи в пространстве выпуклых множеств, восходящие к задачам об экстремальных свойствах треугольника Рело, обладают бо́льшей сложностью, требуют развития дополнительного аппарата и исследованы весьма фрагментарно (см., в частности, [38–40] и приведенную там литературу). В заключение остановимся на задачах несколько иного типа, где поиск формы ведется для нескольких фигур одновременно.

4.12. Оптимальные выпуклые оболочки. В пространстве $\mathbb{R}^N$ заданы выпуклые тела $\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_m$. Требуется разместить выпуклую фигуру $\mathfrak{x}_k$ в $\mathfrak{y}_k$, где $k := 1, \dots, m$ так, чтобы одновременно максимизировать объем каждой из фигур $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m$ и минимизировать интегральную ширину выпуклой оболочки объединения этих фигур:

$$\mathfrak{x}_k \subset \mathfrak{y}_k \ (k := 1, \dots, m);$$
$$(-p(\mathfrak{x}_1), \dots, -p(\mathfrak{x}_m), \langle \mathrm{co}\{\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m\}, \mathfrak{z}_N \rangle) \to \inf .$$

4.13. Теорема. *Для того чтобы допустимые выпуклые тела* $\bar{\mathfrak{x}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{x}}_m$ *представляли собой Парето-оптимальное решение задачи* 4.12, *необходимо и достаточно, чтобы нашлись неравные нулю одновременно положительные числа* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *и два набора положительных мер* $\mu_1, \dots, \mu_m$ *и* $\nu_1, \dots, \nu_m$ *такие, что*

$$\nu_1 + \dots + \nu_m = \mu(\mathfrak{z}_N);$$
$$\bar{\mathfrak{x}}_k(z) = \mathfrak{y}_k(z) \quad (z \in \mathrm{supp}(\mu_k)); \quad \alpha_k \mu(\bar{\mathfrak{x}}_k) = \mu_k + \nu_k \ (k := 1, \dots, m).$$

Доказательство. Критерий выводится по схеме 4.6 с учетом 2.10.

Решена ли задача Дидоны?

Если подходить к вопросу утилитарно, то ответ, конечно, утвердительный. Нет никаких свидетельств того, что Дидона испытывала затруднения, проявляла нерешительность и затягивала выбор участка. Дидона столкнулась с конкретной управленческой проблемой и успешно с ней справилась, по свидетельству Виргилия. Решение было принято и Карфаген построен. В этом нет никаких сомнений.

Как отмечено в начале статьи, с Дидоной связывают изучение изопериметрических задач геометрии, приведшее впоследствии к вариационному исчислению и современным концепциям оптимального управления и теории экстремальных задач. Людям свойственно преувеличивать собственные умения и достижения. Сложилось довольно стойкое убеждение, что задача Дидоны — исторический анекдот, а не проблема современной науки. В реальности дело обстоит совсем иначе. Гипотеза о том, что у математики есть метод решения задачи Дидоны, с теоретической точки зрения критики не выдерживает.

Математика имеет дело с абстрактными объектами. Применения математики к практическим задачам основаны на выборе моделей, адекватных реальным ситуациям. Есть разница между решением частной задачи и наличием метода решения. От нахождения касательной к параболе в начале координат до дифференциального исчисления лежит огромная дистанция. Понимание существа дела требует не ограничиваться частностями, игнорировать случайные черты и искать общие закономерности, не исключая ни стохастичность, ни многозначность решений. Любой метод решения, основанный на понимании существа дела, должен относиться к достаточно широкому классу однотипных задач и давать для их решения алгоритмы или хотя бы разумные рекомендации.

Возвращаясь к Дидоне, допустим, что она знала изопериметрическое свойство круга и была знакома с принципами симметризации, детально разработанными в XIX веке. Хватило бы Дидоне этих знаний для выбора участка? Конечно, нет. В реальной ситуации береговая линия участка земли может иметь очень сложную форму. Снимки побережий принято приводить как наиболее наглядные примеры фрактальности. С теоретической точки зрения свободная граница в плоской задаче Дидоны может быть неспрямляемой, а самое понятие площади, как величины, подлежащей оптимизации, в таком случае далеко неоднозначно. С практической точки зрения ситуация, в которой Дидона должна была принять решение, также была не столь примитивной, как представляется на первый взгляд. При выборе участка Дидона не имела права выходить за пределы территории, контролируемой местным правителем. Ей следовало осуществить выбор участка так, чтобы охватить лагеря своих спутников и учесть различные фортификационные соображения. Понятно, такая общность недоступна в математической модели, известной нам как классическая изопериметрическая задача.

Задача Дидоны, вдохновлявшая наших предков, остается таким же интеллектуальным вызовом, как кантовские звездное небо и моральный закон.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ergott M., Gandibleux X. (Eds.)* Multiple criteria optimization. State of the art. Annotated bibliographic surveys. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 2003.
2. *Figueira J., Greco S., Ehrgott M.* Multiple criteria decision analysis. State of the art surveys. Boston: Springer Sci.; Business Media, Inc., 2005.
3. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007.
4. *Knowles J., Corne D., Kalyanmoy D. (Eds.)* Multiobjective problem solving from nature. From concepts to applications. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2008.
5. *Eichfelder G.* Adaptive scalarization methods in multiobjective optimization. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2008.
6. *Barichard V., Ehrgott M., Gandibleux X., T'Kindt V.* Multiobjective programming and goal programming. Theoretical results and practical applications. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2009.
7. *Zălinesku C.* Convex analysis in general vector spaces. New Jersey etc.: World Sci., 2002.
8. *Göpfert A., Tammer Ch., Riahi H., Zălinesku C.* Variational methods in partially ordered spaces. New York: Springer-Verl., 2003.
9. *Jahn J.* Vector optimization: theory, applications, and extensions. Berlin: Springer-Verl., 2004.
10. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения. М.: Наука, 2007.
11. *Кутателадзе С. С.* Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979.
12. *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и ее приложения // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 3. С. 127–176.
13. *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1976.
14. *Александров А. Д.* Избранные труды. Т. 1: Геометрия и приложения. Новосибирск: Наука, 2006.
15. *Firey W.* Blaschke sums of convex bodies and mixed bodies // Proc. of the colloquium on convexity, 1965. Copenhagen: Kobenhavns Univ. Mat. Inst., 1967. P. 94–101.

16. *Александров В. А., Коптева Н. В., Кутателадзе С. С.* Сложение Бляшке и выпуклые многогранники // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 2005. Т. 26. С. 8–30.
17. *Урысон П. С.* Зависимость между средней шириной и объемом выпуклых тел // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3. С. 477–486.
18. *Гойхман Д. М.* О дифференцируемости объема в структуре Бляшке // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 6. С. 1406–1408.
19. *Gruber P. M., Wills J. M. . (Eds.)* Handbook on convex geometry. Vol. A and B. Amsterdam: Elsevier, 1993.
20. *Gruber P. M.* Convex and discrete geometry. Berlin: Springer-Verl., 2007.
21. *Schneider R.* Convex bodies: the Brunn–Minkowski theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
22. *Gardner R. J.* The Brunn–Minkowski Inequality // Bull. Amer. Math. Soc. 2002. V. 39, N 3. P. 355-405.
23. *Решетняк Ю. Г.* О длине и повороте кривой и о площади поверхности (Дис. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук). Л.: Ленингр. гос. ун-т, 1954.
24. *Loomis L.* Unique direct integral decomposition on convex sets // Amer. Math. J. 1962. V. 84, N 3. P. 509–526.
25. *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. Москва: Мир, 1983.
26. *Cartier P., Fell J. M., Meyer P. A.* Comparaison des mesures poertées par un ensemble convexe compact // Bull. Soc. Math. France. 1964. V. 94. P. 435–445.
27. *Кутателадзе С. С.* Положительные линейные в смысле Минковского функционалы над выпуклыми поверхностями // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 5. С. 984–986.
28. *Кутателадзе С. С.* Границы Шоке в K-пространствах // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 4. С. 107–146.
29. *Rosales C.* Isoperimetric regions in rotationally symmetric convex bodies // Indiana Univ. Math. J. 2003. V. 52, N 5. P. 1201–1214.
30. *Ritore M., Rosales C.* Existence and characterization of regions minimizing perimeter under a volume constraint inside Euclidean cones // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. V. 356, N 11. P. 4601–4622.
31. *Ros A.* The isoperimetric problem // Global theory of minimal surfaces / Hoffman D. (Ed.). Proc. of the Clay mathematics institute 2001 Summer school, Berkeley, CA, USA, June 25–July 27, 2001. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005. P. 175–209.
32. *Погорелов А. В.* Погружение «мыльного пузыря» внутрь тетраэдра // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 2. С. 90–93.
33. *Isenberg C.* The science of soap films and soap bubbles. New York: Dover Publ., 1992.
34. *Lovett D.* Demonstrating science with soap films. Bristol, Philadelphia: IOP Publ. Ltd., 1994.
35. *Mitrinović D. C., Pečarić J. E., Volenec V.* Recent advances in geometric inequalities. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989.
36. *Hernandez C., Herrero P.* Some optimization problems for the minimal annulus of a convex set // Math. Inequal. Appl. 2006. V. 9, N 2. P. 359-374.
37. *Kutateladze S. S.* Interaction of order and convexity // J. Appl. Indust. Math. 2007. V. 1, N 4. P. 399–405.
38. *Klötzler R.* Beweis einer Vermutung uber n-Orbiformen kleinsten Inhalts // Z. Angew. Math. Mech. 1975. V. 55. P. 557–570.
39. *Kripfganz A.* About an inequality of Kubota for plane convex figures // Beiträge Algebra Geom. 1999. V. 40, N 1. P. 53–65.
40. *Bugaro Yu. D., Zalgaller V. A.* Geometric inequalities. Berlin etc.: Springer-Verl., 1988.

Статья поступила 29 января 2009 г.

Кутателадзе Семён Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sskut@math.nsc.ru