Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 517.95

СВОЙСТВА C^1–ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ, МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ГРАДИЕНТА КОТОРЫХ ОДНОМЕРНО

М. В. Коробков

Аннотация. Найдены необходимые и достаточные условия на кривую в $\mathbb{R}^{m\times n}$, чтобы она была множеством значений градиента C^1-гладкой функции $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Показано, что у этой кривой имеются касательные в слабом смысле, эти касательные являются rank-1-матрицами и направление этих касательных есть функция ограниченной вариации. Также доказано, что в этом случае для функции v справедлив аналог теоремы Сарда, а множества уровня градиентного отображения $\nabla v : \Omega \to \mathbb{R}^{m\times n}$ суть гиперплоскости.

Ключевые слова: C^1-гладкая функция, множество значений градиента, кривая, одномерное множество, теорема Сарда.

Посвящается академику Ю. Г. Решетняку,
выдающемуся ученому и благородному человеку

Введение

Согласно классическому результату Хартмана — Ниренберга [1], если для гессиана $\nabla^2 v$ некоторой C^2-гладкой функции $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выполнено тождество $\operatorname{rank}\nabla^2(x) \equiv 1$, то множества уровня градиентного отображения $\nabla v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ суть гиперплоскости. В данной статье доказывается аналог этого утверждения для C^1-гладких функций. Из полученного результата вытекает как частный случай теорема о линейчатом строении C^1-гладких поверхностей нулевой внешней кривизны в $\mathbb{R}^3$, которая доказана А. В. Погореловым в 1956 г. и вошла в его монографию [2, гл. 9, § 4].

Настоящая работа примыкает также к исследованиям ряда математиков (см., например, [3–5]), изучавших следующую проблему: каким условиям должно удовлетворять множество K, чтобы дифференциальное соотношение $\nabla v \in K$ имело нетривиальные липшицевы решения? В данной статье изучается сходная проблема для C^1-гладких (не только липшицевых) решений дифференциальных соотношений.

Указанная проблема исследована для случая вещественных функций двух переменных в ряде работ [6–11]. Там показано, что если кривая является множеством значений градиента C^1-гладкой функции $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, то у этой

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00531–а), Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–5682.2008.1) и молодых кандидатов наук (грант МК-5366.2008.1).

кривой имеются касательные в слабом смысле и направление этих касательных есть функция ограниченной вариации. В то же время такая кривая не обязательно регулярна в классическом смысле: у нее может не существовать касательных (в обычном смысле) ни в одной точке.

В данной статье указанные результаты перенесены на случай вектор-функций нескольких переменных $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Отметим, что геометрические свойства множеств значений градиента дифференцируемых (негладких) отображений в многомерном случае изучались ранее, например, в работах [12–14].

Всюду в дальнейшем *кривой* мы называем непрерывное отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$. Если отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ непрерывно и инъективно, то мы будем называть его также *дугой*.

Символом ∇v обозначается матрица дифференциала $\nabla v = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ отображения $v = (v_1,\dots,v_m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Соответственно символом $\nabla v^{-1}(A)$ обозначается прообраз $\nabla v^{-1}(A) = \{x \in \Omega \mid \nabla v(x) = A\}$. *Областью* мы называем открытое связное множество. Всюду в дальнейшем $\operatorname{Int} E$ — внутренность множества E, $\operatorname{Cl} E$ — замыкание множества E, ∂E — граница множества E, $\operatorname{meas}(E)$ — мера Лебега множества E, $\mathscr{H}^k(E)$ — k-мерная мера Хаусдорфа множества E. Символом $a \cdot b$ мы обозначаем скалярное произведение векторов a, b. Символом $\operatorname{comp}_z E$ обозначается компонента связности множества E, содержащая точку z. Некоторые другие обозначения будут вводиться по ходу работы.

Мы будем часто использовать следующее понятие.

Определение 0.1. Множество $E \subset \mathbb{R}^k$ называется $*$-*одномерным*, если для любого линейного отображения $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^2$ образ $L(E)$ не имеет внутренних точек в топологии $\mathbb{R}^2$, т. е. $\operatorname{Int} L(E) = \varnothing$.

В случае, когда $\mathbb{R}^k$ — плоскость (т. е. $k = 2$), $*$-одномерность множества E эквивалентна тому, что топологическая размерность E не превосходит 1 (см. [15, § 59.IV]). Далее, при произвольных размерностях k если $\mathscr{H}^2(E) = 0$, то множество E $*$-одномерно. Однако если $k > 2$, то в пространстве $\mathbb{R}^k$ существуют множества, гомеоморфные отрезку из $\mathbb{R}$, но не являющиеся $*$-одномерными. К таким множествам относятся, например, графики кривых Пеано.

Работа состоит из двух разделов: в разд. 1 приведены формулировки, в разд. 2 — доказательства основных результатов.

1. Основные результаты

1.1. Свойства множеств уровня градиентного отображения.

Теорема 1.1.1. *Пусть* $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — C^1*-гладкая функция на области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Предположим, что множество* $\nabla v(\Omega)$ $*$*-одномерно. Тогда для любой точки* $x \in \Omega$ *такой, что* $\operatorname{meas} \nabla v^{-1}(\nabla v(x)) = 0$, *найдется гиперплоскость* $H = H(x) \ni x$ *такая, что* $\operatorname{comp}_x(H \cap \Omega) = \operatorname{comp}_x \nabla v^{-1}(\nabla v(x))$.

В частном случае, когда отображение v принадлежит классу гладкости C^2 и $m = 1$, утверждение теоремы 1.1.1 установлено в работе [1]. Для случая, когда $n = 2$, $m = 1$, $\operatorname{meas} \nabla v(\Omega) = 0$ и $v \in C^1(\Omega)$, утверждение теоремы 1.1.1 установлено А. В. Погореловым (см. [2, гл. 9, § 4]).

Следствие 1.1.2[1]**.** *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что множество $\nabla v(\Omega)$ $*$-одномерно. Тогда у любой точки $x_0 \in \Omega$ существует ее открытая выпуклая окрестность Ω_0 такая, что для каждой точки $x \in \Omega_0$ найдется гиперплоскость $H = H(x) \ni x$, удовлетворяющая условию $\nabla v \equiv \mathrm{const}$ на $H \cap \Omega_0$.*

Следствие 1.1.3. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что множество $\nabla v(\Omega)$ $*$-одномерно. Тогда для любой точки $x_0 \in \Omega$ найдутся ее открытая связная окрестность Ω_0, непрерывные функции $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ такие, что $\gamma \neq \mathrm{const}$ на любом интервале и*

$$\nabla v(x) \equiv \gamma(u(x)) \quad \text{при } x \in \Omega_0. \tag{1}$$

1.2. Необходимые и достаточные условия (в аналитической форме) на кривую для того, чтобы она была множеством значений градиента. Для векторов $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$ символом $a \otimes b$ обозначим $m \times n$-матрицу $(a_i b_j)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$.

Теорема 1.2.1. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что множество $\nabla v(\Omega)$ $*$-одномерно, Ω_0 — подобласть Ω, а непрерывные функции $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ удовлетворяют заключению следствия* 1.1.3 *(т. е. $\gamma \neq \mathrm{const}$ на любом интервале и выполнено тождество* (1)*). Тогда γ обладает следующим свойством на интервале $J = u(\Omega_0)$:*

(Γ_1) *существует непрерывная слева функция $l = (l_1, \dots, l_n) : J \to S(0,1)$ локально ограниченной вариации такая, что для любых $\bar e \in S(0,1)$ и $[s_1, s_2] \subset J$*

$$0 \notin \mathrm{Cl}\{l(s)\cdot \bar e \mid s \in [s_1,s_2]\} \Rightarrow \gamma(s)\,\Big|_{s_1}^{s_2} = [\gamma(s)\bar e] \otimes \frac{l(s)}{l(s)\cdot \bar e}\bigg|_{s_1}^{s_2} - \int\limits_{s_1}^{s_2-0} [\gamma(s)\bar e] \otimes d\frac{l(s)}{l(s)\cdot \bar e}, \tag{2}$$

где интегрирование ведется в смысле Лебега — Стилтьеса по полуоткрытому интервалу $[s_1, s_2)$, и используются стандартные обозначения $f(s)|_{s_1}^{s_2} := f(s_2) - f(s_1)$, $S(x,r)$ — сфера с центром x радиуса r в $\mathbb{R}^n$.

Более того, если $u(x) = s \in J$ и $\operatorname{meas} u^{-1}(s) = 0$, то гиперплоскость $H(x)$ из теоремы 1.1.1 *ортогональна вектору $l(s)$.*

Пример 1.2.2. Пусть $\gamma(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ является C^1-гладкой функцией, производная которой не обращается в нуль ни в одной точке. Предположим, что $\nabla v(\Omega) = \gamma(\mathbb{R})$ для некоторой C^2-гладкой функции $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Хорошо известно (см., например, [16]), что $\gamma'(s)$ должна быть rank-1-матрицей для всех $s \in \mathbb{R}$, т. е. $\gamma'(s) = a \otimes b = (a_i b_j)$, где $a = a(s) \in \mathbb{R}^m$, $b = b(s) \in \mathbb{R}^n$. Всегда можно добиться (заменой $\tilde a(s) = |b(s)|a(s)$, $\tilde b(s) = b(s)/|b(s)|$), чтобы $|b(s)| \equiv 1$. Тогда в качестве функции $l(s)$ из теоремы 1.2.1 можно взять $b(s)$.

Пример 1.2.3. Существует C^1-гладкая функция $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma \neq \mathrm{const}$, такая, что не существует C^1-гладкой функции $v : \Omega \to \mathbb{R}$ на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей условиям $\nabla v(\Omega) \subset \gamma(\mathbb{R})$ и $\nabla v \neq \mathrm{const}$.

В качестве кривой γ, существование которой утверждается в примере 1.2.3, можно взять отображение $\gamma(s) = (s, \varphi(s))$, где $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция

[1] Для размерностей $n = 2$, $m = 1$ утверждения теоремы 1.1.1 и следствия 1.1.2 установлены в работе [10], см. в ней лемму 2.6 и теорему 1.1 соответственно, причем в формулировке последней теоремы ошибочно пропущена локальность, т. е. в роли Ω_0 выступает вся область Ω.

такая, что вариация производной φ' равна бесконечности на любом интервале из $\mathbb{R}$ (ср. пример 1.2.2). Более подробно случай кривых такого вида разбирается в следующем разделе (см., например, теорему 1.3.1).

Теорема 1.2.4 (обратная к теореме 1.2.1). *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ — непрерывная функция, $\gamma \neq \mathrm{const}$ на любом интервале. Предположим, что функция γ имеет свойство (Γ_1) на связном подмножестве $J \subset \mathbb{R}$. Тогда существуют область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, C^1-гладкая функция $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ и непрерывная функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ такие, что*

$$\nabla v(x) \equiv \gamma(u(x)) \quad \text{для } x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(\Omega) = J. \tag{4}$$

Теорема 1.2.4 позволяет построить следующий пример.

Пример 1.2.5 [11]. Существуют непрерывная инъективная функция $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ и C^1-гладкая функция $v : \Omega \to \mathbb{R}$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ такие, что $\nabla v(\Omega) = \gamma(\mathbb{R})$ и дуга $\gamma(\mathbb{R})$ не имеет касательной ни в одной своей точке.

1.3. Функциональная зависимость частных производных. Рассмотрим сначала случай вещественнозначных функций ($m = 1$). Предположим, что для непрерывной функции $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ выполнено соотношение

$$\gamma_1(s) \equiv s, \tag{5}$$

тогда дуга γ является графиком некоторой непрерывной функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$. Из теоремы 1.2.1 можно вывести, что кривая γ в этом случае имеет регулярность в классическом смысле.

Теорема 1.3.1. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая соотношениям*

$$\forall j = 2, \dots, n \quad \frac{\partial v}{\partial x_j} = \gamma_j\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) \quad \text{в } \Omega, \tag{6}$$

где $\gamma = \gamma(s)$ — непрерывная функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$ со свойством (5). *Положим*

$$J = \frac{\partial v}{\partial x_1}(\Omega). \tag{7}$$

Тогда для каждого $j = 2, \dots, n$ координатная функция γ_j обладает следующим свойством.

(Γ_2) *Существует замкнутое относительно интервала J множество F нулевой меры такое, что функция γ_j удовлетворяет условию Липшица локально на $U = J \setminus F$. Более того, функция γ_j дифференцируема на U всюду, за исключением не более чем счетного множества точек $E_{\sigma,U} \subset U$. Далее, если формально доопределить производную γ_j' на весь интервал J по правилу*

$$\gamma_j'(s) = \begin{cases} \gamma_j'(s), & s \in U \setminus E_{\sigma,U}, \\ \lim\limits_{\tau \to s-0} \gamma_j'(\tau), & s \in E_{\sigma,U}, \\ \infty, & s \in F, \end{cases}$$

то полученная функция γ_j' будет иметь локально ограниченную вариацию на U. Кроме того, для каждого $j = 2, \dots, n$ и для любой точки $s_0 \in J$ найдутся ее *окрестность $V = V(s_0)$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что функция $\frac{1}{\gamma_j'-\alpha} : V \to \mathbb{R}$ будет являться функцией ограниченной вариации на V.*

В частности, функция γ должна быть дважды дифференцируема (в обычном смысле) почти всюду на J. Отсюда видно, что «плохая» дуга из примера 1.2.5 не может быть графиком некоторой непрерывной функции.

Замечание 1.3.2. Множества «плохих» точек F из теоремы 1.3.1 могут быть различны для разных индексов j. Предел, который фигурирует в выносной формуле при формулировке свойства (Γ_2), всегда существует. В то же время доопределение производной γ_j' в точках множества F в теореме 1.3.1 является формальным: функция γ_j может не иметь ни конечной, ни бесконечной производной в точках множества F.

Теорема 1.3.1 допускает обращение при $n = 2$ [9]; при $n > 2$ это уже неверно, как показывает следующий пример.

Пример 1.3.3. Пусть $K \subset [0, 1]$ — канторово множество нулевой меры. Обозначим через φ непрерывную функцию из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющую условию (Γ_2) с $F = K$, $J = [0, 1]$ (построение такой функции см., например, в [6, с. 116]), а через ψ — непрерывную функцию из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, являющуюся «канторовой лестницей» относительно множества K (т. е. $\psi \neq \mathrm{const}$ и ψ постоянна на каждом интервале из $\mathbb{R}\setminus K$). Определим теперь кривую $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ по правилу $\gamma_1(s) \equiv s$, $\gamma_2(s) \equiv \varphi(s)$, $\gamma_3(s) \equiv \varphi(s) + \psi(s)$. Нетрудно проверить, что обе построенные координатные функции γ_2, γ_3 обладают свойством (Γ_2) с $F = K$, $J = [0, 1]$. Однако не существует области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и функции $v \in C^1(\Omega)$ таких, что выполнены соотношения (6), (7). В самом деле, предположив противное, рассмотрим функцию $\tilde{v}(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2 - x_3, x_3)$. Очевидно, $\tilde{v}$ также удовлетворяет (6), (7) с кривой $\tilde{\gamma}(s) = (s, \gamma_2(s), \gamma_3(s) - \gamma_2(s)) = (s, \varphi(s), \psi(s))$. Однако координатная функция $\tilde{\gamma}_3 = \psi$ уже не обладает свойством (Γ_2); противоречие.

Используя ту же идею (т. е. что свойство (Γ_2) сохраняется, если к функции добавить канторову лестницу относительно F), можно построить еще более показательный пример кривой $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, у которой любая линейная комбинация координатных функций γ_2 и γ_3 обладает свойством (Γ_2) (с одним и тем же множеством F), но кривая γ не обладает свойством (Γ_1), а значит, по теореме 1.2.1 не может существовать области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и функции $v \in C^1(\Omega)$ таких, что выполнены соотношения (6), (7). Мы не будем подробно описывать это (не очень сложное) построение, чтобы не загромождать изложение.

Если мы рассмотрим случай вектор-функций ($m > 1$), то ситуация существенно меняется: можно рассчитывать только на регулярность, описанную в предыдущих подразделах.

Теорема 1.3.4. *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \ni s \mapsto (\gamma_{ij}(s)) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — непрерывное отображение,*

$$\gamma_{11}(s) \equiv s, \tag{8}$$

и пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что выполнены соотношения

$$\forall i = 1, \dots, m \ \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \gamma_{ij}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) \quad \text{в } \Omega. \tag{9}$$

Обозначим

$$J = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\Omega). \tag{10}$$

Тогда выполнены утверждения теорем 1.1.1 *и* 1.2.1, *т. е.* γ *обладает свойством* (Γ_1) *на* J, *а множества уровня градиентного отображения* ∇v *суть гиперплоскости.*

Обращаем внимание читателя на то, что в теоремах 1.3.4, 1.3.1 мы не предполагаем, что множество $\nabla v(\Omega)$ $*$-одномерно.

Следующий простой пример показывает, что при $m > 1$ не существует аналога теоремы 1.3.1.

Пример 1.3.5. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная непрерывная функция. Тогда найдутся непрерывное отображение $\gamma : \mathbb{R} \ni u \mapsto (\gamma_{ij}(u)) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ со свойствами (8) и

$$\gamma_{21}(s) \equiv f(s)$$

и C^1-гладкая функция $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такие, что выполнены соотношения (9), (10) с $J = \mathbb{R}$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$. Искомую функцию $v = (v_1, \dots, v_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ можно задать следующим образом: $v_1(x_1, \dots, x_n) = \frac{(x_1)^2}{2}$, $v_2(x_1, \dots, x_n) = F(x_1)$, где $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — первообразная к f, $v_i = 0$ при $i > 2$. Ясно, что тогда $\gamma_{ij} = 0$ при $i > 2$ или $j > 1$.

1.4. Существование и непрерывность касательных. Хотя рассматриваемые кривые могут не иметь касательной в классическом смысле ни в одной точке (см. примеры 1.2.5 и 1.3.5), они имеют касательные в слабом смысле в каждой точке. Как и в предыдущем разделе, при $m = 1$ ситуация чуть получше, т. е. эти слабые касательные чуть больше напоминают обычные касательные.

Обозначим символом $\mathbb{R}P^{n-1}$ вещественное $(n-1)$-мерное проективное пространство, т. е. $\mathbb{R}P^{n-1}$ есть множество прямых линий пространства $\mathbb{R}^n$, проходящих через точку 0. Иногда мы будем естественным образом отождествлять прямую из $\mathbb{R}P^{n-1}$ с ненулевым вектором из $\mathbb{R}^n$, параллельным этой прямой.

Определение 1.4.1. Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ — непрерывное отображение (кривая), $\gamma \neq \text{const}$ на любом интервале. Будем говорить, что прямая $p \in \mathbb{R}P^{n-1}$ является *σ-касательной справа* к кривой γ в точке s_0 (обозначается через $p = \gamma'_{\sigma+}(s_0)$), если для любой последовательности $s_\nu \to s_0+0$, удовлетворяющей условию

$$\sup_{\nu} \sup_{s\in[s_0,s_\nu]} \frac{|\gamma(s)-\gamma(s_0)|}{|\gamma(s_\nu)-\gamma(s_0)|} < \infty, \tag{11}$$

найдется последовательность векторов $a_\nu \in \mathbb{R}^m$ такая, что имеет место сходимость

$$\frac{\gamma(s_\nu)-\gamma(s_0)}{|\gamma(s_\nu)-\gamma(s_0)|} - a_\nu \otimes l \to 0, \tag{12}$$

где $l \in S(0,1)$ — вектор, параллельный прямой p.

Аналогично вводятся понятия *σ-касательной* $\gamma'_{\sigma-}(s_0)$ *слева* в точке s_0 и просто *σ-касательной* $\gamma'_\sigma(s_0)$ в точке s_0. Очевидно, что если кривая γ имеет обычную касательную в точке и эта касательная является rank-1 матрицей $a \otimes b$, то у этой кривой будет также существовать и σ-касательная, параллельная вектору b. Однако обратное утверждение неверно (это следует, например, из примера 1.2.5 и сформулированной ниже теоремы 1.4.2).

Теорема 1.4.2. *Предположим, что условия теорем* 1.1.1, 1.2.1 *выполнены. Обозначим* $J = u(\Omega_0)$, $a = \inf J$, $b = \sup J$. *Тогда помимо свойства* (Γ_1) *функция* γ *обладает также следующим свойством:*

(Γ_3) *существует непрерывная слева функция* $l = (l_1, \dots, l_n) : J \to S(0,1)$ *локально ограниченной вариации такая*[2]*, что*

$$\forall s \in J \setminus \{b\} \quad \gamma'_{\sigma+}(s) = l(s+0), \tag{13}$$

$$\forall s \in J \setminus \{a\} \quad \gamma'_{\sigma-}(s) = l(s), \tag{14}$$

т. е. указанные σ-касательные существуют и параллельны векторам $l(s+0)$, $l(s)$ соответственно[3]*. Таким образом, $\gamma'_{\sigma+}(s)$ непрерывна справа в каждой точке $s \in J \setminus \{b\}$, а $\gamma'_{\sigma-}(s)$ непрерывна слева в каждой точке $s \in J \setminus \{a\}$, причем $\gamma'_{\sigma+}(s) = \gamma'_{\sigma-}(s) = \gamma'_{\sigma}(s)$ для всех точек $s \in (a,b) \setminus E_\sigma$, где исключительное множество E_σ не более чем счетно.*

Более того, имеет место включение $E_\sigma \subset E_u$, где $E_u = \{s \in J \mid \operatorname{meas} u^{-1}(s) > 0\}$.

Для скалярных функций $v : \Omega \to \mathbb{R}$ ($m = 1$) сходимость (12) эквивалентна сходимости

$$\frac{\gamma(s_\nu) - \gamma(s_0)}{|\gamma(s_\nu) - \gamma(s_0)|} \to \pm \frac{l(s_0)}{|l(s_0)|}.$$

Следовательно, $l(s_0)$ — касательный вектор (в слабом смысле из-за наличия знаков $\pm$ и того, что сходимость имеет место только для последовательностей, удовлетворяющих условию (11)) к кривой γ в s_0 (см. [11]). В общем случае ($m > 1$) последовательность векторов $\frac{\gamma(s_\nu) - \gamma(s_0)}{|\gamma(s_\nu) - \gamma(s_0)|}$ может не иметь никакого предела (это вытекает, например, из примера 1.3.5).

1.5. Аналог теоремы Сарда. Для функции $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ будем обозначать через Z_v множество критических точек: $Z_v = \{x \in \Omega \mid \operatorname{rank} \nabla v(x) < m\}$.

Теорема 1.5.1. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — C^1-гладкое отображение области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, для которого выполнены предположения теорем* 1.1.1 *или* 1.3.4 (*т. е. множество $\nabla v(\Omega)$ $*$-одномерно или частные производные функции v удовлетворяют уравнениям* (9)). *Тогда*

$$\operatorname{meas} v(Z_v) = 0. \tag{15}$$

Напомним, что в классической теореме Сарда для функций $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ для справедливости равенства (15) требуется C^r-гладкость, где $r = \max(0, n-m) + 1$.

Для размерностей $n = 2$, $m = 1$ утверждение теоремы 1.5.1 опубликовано в статье автора [8]. Однако, как автору стало известно впоследствии, при указанных значениях размерностей утверждение теоремы 1.5.1 легко следует из ранних результатов А. В. Погорелова (см. [2, гл. 9, § 3, теоремы 9, 10]). Настоящим замечанием мы подтверждаем приоритет А. В. Погорелова.

2. Доказательства основных результатов

Чтобы свести доказательство к разобранному в предыдущих статьях случаю вещественных функций двух переменных, нам понадобится несколько простых топологических и геометрических утверждений.

Замечание 2.1. Из определения $*$-одномерности вытекает, что любая проекция $*$-одномерного множества есть $*$-одномерное множество.

---

[2] Здесь функция l та же самая, о которой шла речь в свойстве (Γ_1).

[3] Мы обозначаем через $l(s+0)$ соответствующий односторонний предел функции l.

Лемма 2.2. *Пусть $C_1 \subset \mathbb{R}^{k_1}$, $C_2 \subset \mathbb{R}^{k_2}$ — связные множества, состоящие более чем из одной точки, и пусть $C_1 \times C_2 \subset C \subset \mathbb{R}^k$, $k = k_1 + k_2$. Тогда множество C не является $*$-одномерным.*

Лемма 2.2 следует из определения $*$-одномерности и замечания 2.1 (легко построить оператор проектирования $\mathbb{R}^k$ на двумерное линейное подпространство так, чтобы проекция множества C содержала квадрат).

Для данного линейного подпространства X пространства $\mathbb{R}^k$ через $\mathrm{Pr}_X C$ будем обозначать ортогональную проекцию множества C на пространство X. Для $a \in C$ через $C_{a,X}$ будем обозначать множество $\{y \in C \mid \mathrm{Pr}_X y = \mathrm{Pr}_X a\}$.

Лемма 2.3. *Пусть компактное множество $C \subset \mathbb{R}^k$ $*$-одномерно. Зафиксируем любую точку $a \in C$. Тогда множество всех гиперплоскостей $X \subset \mathbb{R}^k$ таких, что $0 \in X$ и соответствующее множество $C_{a,X}$ не является вполне несвязным, вполне несвязно*[4] *(в соответствующем многообразии Грассмана всех $(k-1)$-мерных линейных подпространств пространства $\mathbb{R}^k$).*

Доказательство данной леммы очень просто и опирается на замечание 2.1 и следующий факт: счетное объединение замкнутых вполне несвязных множеств в метрическом пространстве вполне несвязно (см. [17, § 27.I, теорема 2]). (Прием, используемый при доказательстве леммы 2.3, применяется также ниже при доказательстве леммы 2.4, где мы описываем его более подробно, так как там ситуация чуть сложнее.)

Лемма 2.4. *Пусть компактное множество $C \subset \mathbb{R}^k$ $*$-одномерно, $k_1 < k$. Зафиксируем любую точку $a \in C$. Тогда множество всех k_1-мерных линейных подпространств $X \subset \mathbb{R}^k$ таких, что соответствующее множество $C_{a,X}$ является вполне несвязным, всюду плотно (в соответствующем многообразии Грассмана всех линейных k_1-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^k$).*

Доказательство леммы 2.4. Обозначим через $\mathbf{G}$ многообразие Грассмана, о котором идет речь в формулировке доказываемой леммы (т. е. $\mathbf{G}$ состоит из всех k_1-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^k$, содержащих точку 0), а через $d_{\mathbf{G}}$ будем обозначать расстояние между элементами этого пространства. Предположим, что лемма 2.4 неверна. Тогда найдутся $X_0 \in \mathbf{G}$ и $\delta > 0$ такие, что $\forall X \in \mathbf{G}\ d_{\mathbf{G}}(X, X_0) < \delta \Rightarrow C_{a,X}$ содержит связное множество, состоящее более чем из одной точки. Применяя теорему Бэра о том, что счетное объединение замкнутых нигде не плотных множеств нигде не плотно, мы можем считать, не умаляя общности, что существует $r > 0$ такое, что $\forall X \in \mathbf{G}\ d_{\mathbf{G}}(X, X_0) < \delta \Rightarrow$ одна из компонент связности множества $C_{a,X}$ содержит две точки, расстояние между которыми не меньше r. Снова применяя ту же теорему Бэра, мы можем считать, не умаляя общности, что существует единичный вектор $\bar{e}$, перпендикулярный пространству X_0, такой, что $\forall X \in \mathbf{G}\ d_{\mathbf{G}}(X, X_0) < \delta \Rightarrow$ одна из компонент связности множества $C_{a,X}$ содержит две точки, расстояние между которыми не меньше r, а вектор $\bar{e}$ образует с вектором, соединяющим эти точки, угол не больше $\pi/4$. В частности, проекция этого вектора на пространство $\widetilde{Y}$ не равна 0, где через $\widetilde{Y}$ мы обозначили (k_1+1)-мерное пространство, являющееся линейной оболочкой пространства X_0 и вектора $\bar{e}$.

Обозначим $\widetilde{C} = \mathrm{Pr}_{\widetilde{Y}} C$. В силу замечания 2.1 множество $\widetilde{C}$ является $*$-одномерным.

[4] Напомним, что множество называется *вполне несвязным*, если каждое его непустое связное подмножество состоит из одной точки.

Из сказанного выше следует, что $\forall X \in \mathbf{G}\bigl(d_{\mathbf{G}}(X, X_0) < \delta \,\&\, X \subset \widetilde{Y}\bigr) \Rightarrow$ одна из компонент связности множества $\widetilde{C}_{a,X}$ содержит более чем одну точку, где через $\widetilde{C}_{a,X}$ мы обозначили множество $\{y \in \widetilde{C} \mid \mathrm{Pr}_X\, y = \mathrm{Pr}_X\, a\}$. Но данное утверждение вступает в противоречие с леммой 2.3 (при этом в роли пространств $\mathbb{R}^k$ и множества C из формулировки леммы 2.3 выступают определенные выше пространство $\widetilde{Y}$ и множество $\widetilde{C}$). Полученное противоречие завершает доказательство леммы 2.4. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть $f : B \to Y$ — непрерывная функция, где B — шар (открытый) в пространстве $\mathbb{R}^n$, Y — некоторое метрическое пространство. Предположим, что функция f обладает следующим свойством:*

(A) *для каждой двумерной плоскости $P \subset \mathbb{R}^n$ и для каждой точки $x \in P \cap B$, такой, что в любой окрестности U точки x будет $f \neq \mathrm{const}$ на $U \cap P$, существует лежащий в P прямолинейный отрезок*[5] *$I_{P,x} \ni x$ с концами на ∂B такой, что $f \equiv \mathrm{const}$ на $I_{P,x}$.*

Тогда для каждой точки $x \in B$ если

$$\mathrm{meas}\, f^{-1}(f(x)) = 0, \tag{16}$$

то существует гиперплоскость $H \ni x$ такая, что $\mathrm{comp}_x\, f^{-1}(f(x)) = H \cap B$.

Доказательство леммы 2.5. Нетрудно видеть, что свойство (A) можно эквивалентно переформулировать следующим образом.

(A′) *Для каждой двумерной плоскости $P \subset \mathbb{R}^n$ и для каждой пары точек $x, y \in P \cap B$ таких, что $f(x) \neq f(y)$, обозначим через z точку замкнутого отрезка $[x, y]$ такую, что $[x, z] = \mathrm{comp}_x(f^{-1}(f(x)) \cap [x, y])$. Тогда существует лежащий в P прямолинейный отрезок $I(P, x, y) \ni z$ с концами на ∂B такой, что $f \equiv f(x)$ на $I(P, x, y)$.*

Докажем сначала, что справедливо следующее утверждение.

(F) *Пусть G_1, G_2 — выпуклые подмножества шара B такие, что $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$ и $f \equiv \mathrm{const}$ на $G_1 \cup G_2$. Тогда $f \equiv \mathrm{const}$ на $\mathrm{Conv}(G_1 \cup G_2)$.*

Пусть условия (F) выполнены. Зафиксируем $x \in G_1 \cap G_2$. Предположим, что заключение (F) неверно. Тогда найдется точка $y \in \mathrm{Conv}(G_1 \cup G_2)$ такая, что

$$f(y) \neq f(x). \tag{17}$$

Из предположений в (F) следует, что $y = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$, где $\alpha \in (0, 1)$, $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$. Ясно, что x, x_1, x_2 суть три точки в B, не лежащие на одной прямой (иначе получаем противоречие с неравенством (17) и выпуклостью множеств G_1, G_2). Рассмотрим двумерную плоскость P, содержащую точки x, x_1, x_2. Возьмем также отрезок $I(P, y, x)$, существование которого утверждается в (A′). Имеем, в частности, что $f \equiv f(y)$ на $I(P, y, x)$ и $I(P, y, x) \cap [y, x] \neq \varnothing$. Геометрически очевидно, что отрезок $I(P, y, x)$ должен пересекать по меньшей мере один из замкнутых отрезков $[x, x_1]$, $[x, x_2]$. Получаем противоречие с неравенством (17) и выпуклостью множеств G_1, G_2. Полученное противоречие завершает доказательство свойства (F).

Рассмотрим теперь произвольную точку $x \in B$, для которой выполнено (16). Определим множество

$$G_x = \mathrm{Conv}\Bigl(\bigcup_{P,y} (I(P, x, y) \cup [x, z])\Bigr),$$

[5] Здесь под отрезком понимается открытый интервал (без концов), т. е. множество вида $\{a + tb \mid t \in (0, 1)\}$, где a, b — некоторые элементы $\mathbb{R}^n$, $b \neq 0$.

где P пробегает всевозможные двумерные плоскости, содержащие x, далее, y пробегает всевозможные точки $y \in P \cap B$, удовлетворяющие (17), наконец, точка $z = z(x, y)$ определена при формулировке (A$'$). Используя (двукратно) свойство (F), нетрудно доказать, что $f \equiv f(x)$ на G_x. Тогда по формуле (16) $\operatorname{meas} G_x = 0$. Следовательно, найдется гиперплоскость $H \supset G_x$. Докажем, что для нее выполняется тождество

$$f \equiv f(x) \quad \text{на } H \cap B. \tag{18}$$

Предполагая противное, получаем, что существует точка $y \in H \cap B$ такая, что выполнено неравенство (17). Рассмотрим двумерную плоскость P, содержащую точки x, y и вектор, перпендикулярный H. Тогда пересечение $H \cap P$ является прямой, проходящей через точки x, y. Возьмем отрезок $I(P, x, y)$, существование которого утверждается в условиях леммы 2.5. По построению множества G_x этот отрезок должен лежать в G_x, следовательно, он лежит в пересечении $H \cap P$, т. е. $I(P, x, y)$ лежит на упомянутой прямой (проходящей через точки x, y). Отсюда геометрически очевидно, что $y \in I(P, x, y)$, но последнее включение противоречит неравенству (17). Полученное противоречие завершает доказательство свойства (18).

Итак, мы установили, что для каждой точки $x \in B$ со свойством (16) найдется гиперплоскость $H \ni x$, для которой выполнено (18). Эту гиперплоскость будем обозначать через H_x. Единственность этой гиперплоскости следует из свойства (F). Для окончания доказательства леммы 2.5 нужно еще проверить равенство

$$K = H_x \cap B, \tag{19}$$

где мы обозначили $K = \operatorname{comp}_x f^{-1}(f(x))$.

Поскольку для рассматриваемой точки x выполнено свойство (16), очевидно, оно выполнено и для каждой точки $y \in K$, поэтому, в свою очередь, существуют соответствующие гиперплоскости H_y со свойством $f \equiv f(y) = f(x)$ на $H_y \cap B$. Из свойства (F) немедленно вытекает, что

$$\forall y', y'' \in K \quad H_{y'} = H_{y''} \text{ либо } H_{y'} \cap H_{y''} \cap B = \varnothing. \tag{20}$$

Предположим теперь, что равенство (19) неверно, тогда существует точка $y_0 \in K$ такая, что $H_x \cap H_{y_0} \cap B = \varnothing$. В силу предположения (16) найдется точка $w_0 \in B \setminus K$, лежащая между гиперплоскостями H_x и H_{y_0}. В силу выбора w_0 имеем

$$\forall y \in K \quad w_0 \notin H_y. \tag{21}$$

Рассмотрим разбиение $K = K_0 \cup K_1$, где $K_0 = \{y \in K \mid w_0 \text{ лежит между } H_y \text{ и } H_x\}$, $K_1 = \{y \in K \mid w_0 \text{ лежит между } H_y \text{ и } H_{y_0}\}$. По построению (см. также свойство (20)) выполнены соотношения $y_0 \in K_0$, $x \in K_1$, $K_0 \cap K_1 = \varnothing$. Из свойств (20), (21) легко вывести, что множества K_0 и K_1 замкнуты относительно K. Получили противоречие со связностью K. Полученное противоречие завершает доказательство соотношения (19) и леммы 2.5. $\square$

Доказательство теоремы 1.1.1. Ясно, что доказательство утверждения теоремы 1.1.1 достаточно провести для случая, когда в условиях теоремы 1.1.1 Ω является открытым шаром B в $\mathbb{R}^n$, а $C = \operatorname{Cl} \nabla v(B)$ есть $*$-одномерный компакт.

Установим сначала следующий факт о координатных функциях v_i отображения $v = (v_1, \dots, v_m)$.

(B) *Для каждой точки $x \in B$ такой, что*

$$\operatorname{meas} \nabla v_i^{-1}(\nabla v_i(x)) = 0, \tag{22}$$

найдется гиперплоскость $H = H(i,x) \ni x$ такая, что

$$\operatorname{comp}_x(H \cap \Omega) = \operatorname{comp}_x \nabla v_i^{-1}(\nabla v_i(x)).$$

Доказывая (B), будем считать без потери общности, что $i = 1$. Из леммы 2.5 непосредственно вытекает, что для проверки (B) достаточно доказать, что градиентное отображение $\nabla v_1 : B \to \mathbb{R}^n$ обладает свойством (A) (конечно, в роли функции f из условия леммы 2.5 здесь выступает отображение $\nabla v_1 : B \to \mathbb{R}^n$).

Для доказательства (A) возьмем произвольно двумерную плоскость P и зафиксируем точку $x \in B \cap P$ такую, что сужение $\nabla v_1|_P$ непостоянно в любой окрестности x. Делая сдвиги и добавляя к v_1 линейное отображение, можно считать, не умаляя общности, что $\nabla v_1(x) = 0$. Символом v_1^P будем обозначать сужение функции v_1 на множество $B \cap P$. Функция $v_1^P : B \cap P \to \mathbb{R}$, таким образом, является вещественной C^1-гладкой функцией двух переменных. Рассмотрим оператор ортогонального проектирования пространства $\mathbb{R}^n$ (где лежат значения градиентов функции v_1) на соответствующее двумерное подпространство $X_P \subset \mathbb{R}^n$, содержащее 0 и параллельное P (в X_P лежат значения градиента функции v_1^P, так что $\nabla v_1^P \equiv \operatorname{Pr}_{X_P} \nabla v_1$). Предположим сначала, что выбранная нами плоскость P удовлетворяет следующему добавочному условию.

(П) *При указанном проектировании множества $C_1 = \operatorname{Cl} \nabla v_1(B)$ на плоскость X_P прообразом точки 0 является вполне несвязное подмножество в C_1.*

Отсюда и из выбора точки x вытекает, что ∇v_1^P непостоянно в любой (плоской) окрестности точки x. Вследствие предположения о $*$-одномерности множества C множество C_1 также $*$-одномерно (см. замечание 2.1), следовательно, множество значений градиента функции v_1^P не содержит внутренних точек. Из последних двух предложений и из лемм 2.6, 2.7 статьи [10] непосредственно вытекает, что существует лежащий в P прямолинейный отрезок $I_{P,x} \ni x$ с концами на ∂B такой, что

$$\nabla v_1^P \equiv 0 \quad \text{на } I_{P,x}.$$

Тогда из предположения (П) немедленно получаем нужное тождество

$$\nabla v_1 \equiv 0 \quad \text{на } I_{P,x}.$$

В общем случае рассмотрим последовательность двумерных плоскостей $P_\nu \ni x$, удовлетворяющих условию (П) и сходящихся к P (существование такой последовательности гарантируется леммой 2.4, причем в нашем случае $k = n$, $k_1 = 2$, а роль точки a и множества C из формулировки леммы 2.4 играют точка 0 и множество C_1 соответственно). Из выбора точки x и сходимости $P_\nu \to P$ вытекает, что найдется последовательность точек $x_\nu \to x$ таких, что $x_\nu \in P_\nu$, $\nabla v_1(x_\nu) = 0$ и $\nabla v_1|_{P_\nu}$ непостоянно в любой (плоской) окрестности точки x_ν. Тогда по доказанному выше $\nabla v_1 \equiv 0$ на соответствующих отрезках I_{P_ν,x_ν}. В качестве $I_{P,x}$ теперь можно взять предельный отрезок последовательности I_{P_ν,x_ν}. Свойство (A) для отображения $\nabla v_1 : B \to \mathbb{R}^n$, а вместе с ним и свойство (B) полностью доказаны.

Из свойства (B) для каждого $i = 1, \dots, m$ легко вытекает следующее свойство.

(B$'$) *Для всякой точки $x \in B$, удовлетворяющей условию (22), существует шар B_0 с центром в x такой, что для всякой точки $y \in B_0$ найдется (возможно,* *неединственная) гиперплоскость* $H(i,y)$ *такая, что* $\nabla v_i = \mathrm{const}$ *на* $H(i,y) \cap B_0$, *причем* $H(i,y) \to H(i,x)$ *при* $y \to x$.

Установим справедливость следующего факта.

(B$''$) *Для каждого* $i = 1,\dots,m$ *и для каждой точки* $x \in B$, *удовлетворяющей условию* (22), *справедливо тождество* $\nabla v = \mathrm{const}$ *на* $H(i,x) \cap B$ (*где* $H(i,x)$ — *гиперплоскость, существование которой утверждается в свойстве* (B)).

Предположим противное. Тогда существуют точка $x \in B$ со свойством (22) и индекс $j \neq i$ такие, что $\nabla v_j \neq \mathrm{const}$ на $H(i,x)\cap B$. Возьмем точку $x_0 \in H(i,x)\cap B$ такую, что $\operatorname{meas} \nabla v_j^{-1}(\nabla v_j(x_0)) = 0$. Тогда $H(i,x) = H(i,x_0) \neq H(j,x_0)$. Из свойства (B$'$), примененного к точке x_0 и обеим номерам i,j, легко выводится, что найдутся шары B_1, B_2 с центром в x_0 такие, что $B_1 \Subset B_2 \Subset B$, и для всякой пары точек $y, z \in B_1$ найдутся гиперплоскости $H(i,y) \ni y$, $H(j,z) \ni z$ такие, что $\nabla v_i = \mathrm{const}$ на $H(i,y) \cap B_2$, $\nabla v_j = \mathrm{const}$ на $H(j,z) \cap B_2$, причем $H(i,y)\cap H(j,z)\cap B_2 \neq \varnothing$. Рассмотрим линейное отображение $L : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{2\times n}$, сопоставляющее матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ матрицу $L(A) \in \mathbb{R}^{2\times n}$, состоящую из i-й и j-й строк матрицы A. Обозначим $C_{ij} = L(C)$. Из сказанного выше следует, что $C_{ij} \supset \nabla v_i(B_1)\times\nabla v_j(B_1)$, причем в силу выбора точки x_0 каждый из сомножителей в последнем произведении является связным множеством, состоящим более чем из одной точки. По лемме 2.2 множество C_{ij} не является $*$-одномерным. Это противоречит предположению о $*$-одномерности C и замечанию 2.1. Полученное противоречие завершает доказательство свойства (B$''$).

Из доказанного свойства (B$''$) легко выводится справедливость следующего свойства.

(B$'''$) *для каждой точки* $x \in B$ *такой, что* $\nabla v \neq \mathrm{const}$ *в любой окрестности точки* x, *существует гиперплоскость* $H \ni x$ *такая, что* $\nabla v = \mathrm{const}$ *на* $H \cap B$.

Из установленного свойства (B$'''$), в свою очередь, вытекает, что градиент ∇v обладает свойством (A) (конечно, в роли функции f из формулировки (A) здесь уже выступает отображение $\nabla v : B \to \mathbb{R}^{m\times n}$). Отсюда и из леммы 2.5 немедленно вытекает утверждение теоремы 1.1.1. $\square$

Доказательство следствия 1.1.2 легко проводится использованием теоремы 1.1.1 и того факта, что множество значений функции, прообраз которых имеет ненулевую меру, не более чем счетно. $\square$

Доказательство следствия 1.1.3 проводится с учетом теоремы 1.1.1 точно так же, как и доказательство теоремы 1.4 [10], подробности ввиду их элементарности опускаем. $\square$

Доказательство теоремы 1.2.1 разбивается на три этапа. Разумеется, без потери общности можно предполагать далее, что $\Omega_0 = \Omega$. Нам понадобится еще одно понятие.

Предположим, что для непрерывных функций $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и C^1-гладкой функции $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ справедливо тождество (3). Тогда в силу равенства смешанных производных функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\forall i,j = 1,\dots,n \quad \frac{\partial \gamma_i(u)}{\partial x_j} - \frac{\partial \gamma_j(u)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{в } \mathscr{D}'(\Omega), \tag{23}$$

где $\gamma_j = \begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \vdots \\ \gamma_{mj} \end{pmatrix}$, а через $\mathscr{D}'(\Omega)$ обозначено соответствующее пространство распределений Шварца (т. е. пространство обобщенных функций).

Определение 2.6. Функция $u(x) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется *изэнтропическим решением* уравнения (23), если

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \forall i, j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial \gamma_i(\max(u,k))}{\partial x_j} - \frac{\partial \gamma_j(\max(u,k))}{\partial x_i} = 0 \quad \text{в } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Отметим, что впервые понятие изэнтропического решения (в несколько иной ситуации) предложено Е. Ю. Пановым [18] (см. также определение 1.4.1 из [9]).

Теорема 2.7. *Предположим, что условия теоремы* 1.1.1 *и следствия* 1.1.3 *выполнены. Тогда функция $u(x)$ является изэнтропическим решением уравнения* (23).

Доказательство теоремы 2.7 можно проводить двумя путями, оба из которых очень просты. Во-первых, этот результат почти непосредственно вытекает из теоремы 1.4.2 статьи [9] и определения $*$-одномерности. Во-вторых, можно легко провести самостоятельное доказательство, опираясь на тот факт, что функция $u(x)$ является обобщенным решением уравнения (23), а множества уровня функции $u(x)$ суть гиперплоскости (последнее следует из теоремы 1.1.1 и того факта, что функция γ в силу следствия 1.1.3 непостоянна на любом интервале). $\square$

Нам понадобится следующий известный факт (см., например, [3]).

Лемма 2.8. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — локально липшицево отображение области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что множество значений градиента f состоит из двух точек, т. е. найдутся две различные матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ такие, что $\nabla f(x) \in \{A, B\}$ для п. в. $x \in \Omega$, причем $\operatorname{meas} \nabla f^{-1}(A) \neq 0 \neq \operatorname{meas} \nabla f^{-1}(B)$. Тогда $\operatorname{rank}(A - B) = 1$.*

На втором этапе доказательства теоремы 1.2.1 требуется установить следующее утверждение.

Теорема 2.9. *Предположим, что условия теорем* 1.1.1 *и следствия* 1.1.3 *выполнены. Обозначим $J = u(\Omega)$, $a = \inf J$, $b = \sup J$. Тогда функция γ обладает следующим свойством.*

(Γ_4) *Для всех $s \in J \setminus \{b\}$ существует σ-касательная справа $\gamma'_{\sigma+}(s)$, и для всех $s \in J \setminus \{a\}$ существует σ-касательная слева $\gamma'_{\sigma-}(s)$. При этом $\gamma'_{\sigma+}(s)$ непрерывна слева, а $\gamma'_{\sigma-}(s)$ непрерывна справа в каждой точке $s \in J \setminus \{a\}$. Далее, всюду на (a, b), за исключением не более чем счетного множества точек $E_\sigma \subset (a, b)$, σ-касательные справа и слева совпадают, и, таким образом, для любого $s \in (a, b) \setminus E_\sigma$ существует σ-касательная $\gamma'_\sigma(s)$.*

При этом[6] *$E_\sigma \subset E_u$, и если $u(x) = s \in J \setminus E_u$, то гиперплоскость $H(x)$ из теоремы* 1.1.1 *ортогональна соответствующей σ-касательной $\gamma'_\sigma(s)$.*

Доказательство теоремы 2.9 проводится с привлечением теорем 1.1.1 и 2.7 и леммы 2.8 точно так же, как и доказательство теоремы 2.5 из [9]. Только в нашей ситуации роль прямых играют гиперплоскости, и рассуждения в чем-то даже упрощаются, поскольку функция $u(x)$ непрерывна (а в рассматриваемом в [9] случае функция $u(x)$ лишь измерима и локально ограничена) и уже доказано ранее (в теореме 1.1.1), что ее множества уровня суть гиперплоскости. Подробности ввиду их элементарности опускаем. Отметим только, что в

[6] Определение множества E_u см. в теореме 1.4.2.

процессе доказательства устанавливается справедливость следующего свойства (ср. одноименное свойство в [9, с. 804]).

($P_\pm$) *Для любого* $c \in J\setminus\{b\}$ *на каждой компоненте связности* K *пересечения* $\Omega\cap H$, *где* H — *произвольная гиперплоскость, перпендикулярная прямой* $\gamma'_{\sigma+}(c)$, *либо* $u(x) \le c$ *для всех* $x \in K$, *либо* $u(x) > c$ *для всех* $x \in K$. *Далее, для любого* $c \in J \setminus \{a\}$ *на каждой компоненте связности* K *пересечения* $\Omega \cap H$, *где* H — *гиперплоскость, перпендикулярная прямой* $\gamma'_{\sigma-}(c)$, *либо* $u(x) \ge c$ *для всех* $x \in K$, *либо* $u(x) < c$ *для всех* $x \in K$. $\square$

Замечание 2.10. Используя свойства непрерывности σ-касательных (см. (Γ_4)), свойство ($P_\pm$) можно переформулировать в следующей эквивалентной форме.

($\widetilde{P}_\pm$) *Если* $c \in (a,b)\setminus E_\sigma$, *то на каждой компоненте связности* K *пересечения* $\Omega\cap H$, *где* H — *произвольная гиперплоскость, перпендикулярная прямой* $\gamma'_\sigma(c)$, *выполняется одна и только одна из следующих трех возможностей: либо* $u(x) > c$ *для всех* $x \in K$, *либо* $u(x) < c$ *для всех* $x \in K$, *либо* $u(x) = c$ *для всех* $x \in K$.

Доказательство теоремы 1.2.1. Используя естественное погружение сферы $S(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ в проективное пространство $\mathbb{R}P^{n-1}$ и теорему 2.9, нетрудно построить непрерывное слева отображение $l : J \to S(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ со следующими свойствами:

(i) если $s \in J \setminus \{a\}$, то вектор $l(s)$ параллелен $\gamma'_{\sigma-}(s)$;

(ii) если $a \in J$, то вектор $l(a)$ параллелен $\gamma'_{\sigma+}(a)$;

(iii) функция l имеет предел справа в каждой точке $s \in J \setminus \{b\}$, причем $l(s) + l(s+0) \ne 0$ для всех $s \in J \setminus \{b\}$ (последнее неравенство означает, что мы не допускаем «фиктивных» разрывов, когда $l(s)$ и $l(s+0)$ порождают один и тот же элемент проективного пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$).

Осталось проверить, что построенная функция $l(s)$ имеет локально ограниченную вариацию и для нее справедлива формула (2). Локальная ограниченность вариации функции l легко доказывается с помощью того факта (см. теоремы 1.1.1 и 2.9), что различные множества уровня функции $u(x)$ суть непересекающиеся гиперплоскости, перпендикулярные вектору $l(u(x))$. (Впрочем, можно свести доказательство ограниченности вариации к рассмотренному в [9] плоскому случаю, действуя так же, как описано ниже.)

Для проверки формулы (2) возьмем произвольно и зафиксируем вектор $\bar{e} \in S(0,1)$ и отрезок $[s_1, s_2] \subset J$ такие, что $0 \notin \mathrm{Cl}\{l(s)\cdot\bar{e} \mid s \in [s_1,s_2]\}$. Последнее условие имеет простой геометрический смысл: все гиперплоскости, перпендикулярные какой-нибудь σ-касательной $\gamma'_\sigma(s)$ на отрезке $s \in [s_1, s_2]$, трансверсальны вектору $\bar{e}$. Очевидно, что условия (i), (ii) и равенство в (2) инвариантны, если мы функцию l заменим функцией $\widetilde{l}(s) = \alpha(s)l(s)$, где $\alpha : J \to \mathbb{R}$ — произвольная непрерывная слева функция ограниченной вариации со свойством $0 \notin \mathrm{Cl}\,\alpha(J)$. Если положить $\alpha(s) = \frac{1}{l(s)\cdot\bar{e}}$ для $s \in [s_1, s_2]$, то можно предполагать без потери общности, что функция $l : J \to \mathbb{R}^n$ помимо условий (i)–(iii) удовлетворяет также следующему условию:

(iv) $l(s)\cdot\bar{e} = 1$ для всех $s \in [s_1, s_2]$.

Сделав соответствующую ортонормированную замену координат в пространстве $\mathbb{R}^n$, можем считать, также не умаляя общности, что $\bar{e} = (1, 0, \dots, 0)$. Тогда свойство (iv) можно переписать в виде

(iv′) $l_1(s) = 1$ для всех $s \in [s_1, s_2]$.

Теперь искомое равенство из (2) приобретает удобную для вычислений форму:

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \gamma_j(s)|_{s_1}^{s_2} = \gamma_1(s) l_j(s)|_{s_1}^{s_2} - \int\limits_{s_1}^{s_2 - 0} \gamma_1(s)\, dl_j(s). \tag{24}$$

В силу аддитивности интеграла равенство (24) достаточно проверить локально, поэтому мы можем считать, вновь не умаляя общности, что Ω совпадает с шаром $B(0,1)$ в $\mathbb{R}^n$, причем $[s_1, s_2] \subset u(L \cap \Omega)$, где L — прямая, проходящая через 0 параллельно вектору $\bar{e} = (1, 0, \dots, 0)$. Зафиксируем индекс j и рассмотрим сужение наших функций $v(x)$, $u(x)$ на пересечение $\Omega \cap P_j$, где P_j — двумерная плоскость, содержащая прямую L и параллельная j-му координатному вектору $\bar{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Мы попали в двумерную ситуацию (функции двух переменных), исследованную в [9]. Теперь для доказательства равенства (24) для выбранного значения j нужно повторить рассуждения из доказательства теоремы 2.8 работы [9] (отметим, что в принятых там обозначениях роль наших векторов $\bar{e}$, $\bar{e}_j$ и функции $l_j(\cdot)$ играют объекты, обозначенные в [9] символами $\bar{e}^{\perp}$, $\bar{e}$ и $l(\cdot)$ соответственно). Доказательство в [9] опирается на два факта: изэнтропичность решения $u(x)$ и свойство $(P_\pm)$. Одноименные факты уже были установлены выше для нашей ситуации (см. теоремы 2.7, 2.9). Причем рассуждения в настоящем случае даже существенно упрощаются по сравнению с [9], поскольку у нас функция $u(x)$ непрерывна, а в рассматриваемом в работе [9] случае функция $u(x)$ лишь измерима и локально ограничена. Мы опускаем подробности, чтобы не утомлять читателя повторением уже опубликованных ранее доказательств. □

Лемма 2.11. *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m \times n}$ — непрерывная функция, $\gamma \neq \mathrm{const}$ на любом интервале. Предположим, что функция γ имеет свойство (Γ_1) на связном множестве $J \subset \mathbb{R}$. Тогда γ имеет также свойство (Γ_3) на J.*

Доказательство леммы 2.11. Для случая $n = 2$, $m = 1$ это утверждение доказано в лемме 2.9 из [10]. В общем случае доказательство проводится точно так же — прямым вычислением и использованием элементарных оценок интеграла Лебега — Стилтьеса. Поэтому мы его опускаем. □

Доказательство теоремы 1.2.4. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда по лемме 2.11 функция $\gamma(s)$ обладает свойствами (Γ_1) и (Γ_3) на J. Используя локальную ограниченность вариации функции $l : J \to \mathbb{R}^n$ и формулы (13), (14), можно построить односвязную область Ω и непрерывную функцию $u : \Omega \to \mathbb{R}$ со свойствами (4) и $(\widetilde{P}_\pm)$. Применяя интегральные равенства (2), нетрудно доказать, что такая функция $u(x)$ будет обобщенным решением уравнения (23) в $\mathscr{D}'(\Omega)$. Поэтому ввиду односвязности области Ω найдется такая C^1-гладкая функция $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$, что выполнено тождество (3).

Для двумерного случая указанный процесс построения функции $u(x)$ со свойствами (4) и $(\widetilde{P}_\pm)$ и проверка тождества (23) проделаны при доказательстве теоремы 1.1.4 из [9]. В общем случае этот процесс проводится по той же схеме, только роль прямых у нас играют гиперплоскости. Ввиду отсутствия каких-то принципиально новых или трудных моментов в оставшихся выкладках мы их опускаем. □

Доказательство теоремы 1.3.1. Теорема 1.3.1 прямо следует из теоремы 1.2.1 статьи [9], если рассматривать сужение функции v на двумерные плоскости, параллельные 1-му и j-му координатным направлениям (отметим только, что в [9] рассматривается случай открытых интервалов J, но это техническое отличие несущественно). $\square$

Для доказательства теоремы 1.3.4 нам понадобится

Лемма 2.12. *Пусть $v : B \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция на шаре $B \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющая соотношениям*

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = \varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) \quad \text{на } B,$$

где $\varphi = \varphi(s)$ — непрерывная функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Предположим, что функция $\varphi(s)$ дифференцируема в точке s_0 и $\frac{\partial v}{\partial x_1}(z_0) = s_0$, где $z_0 \in B$. Тогда $\nabla v = \mathrm{const}$ на пересечении $L \cap B$, где L есть прямая, проходящая через точку z_0 параллельно вектору $(-\varphi'(s_0), 1)$.

Доказательство леммы 2.12. Вследствие дифференцируемости функции φ в точке s_0 график этой функции имеет касательную в данной точке, параллельную вектору $(1, \varphi'(s_0))$. Эта касательная, конечно, совпадает с σ-касательной в той же точке. Теперь утверждение леммы 2.12 следует из сформулированного выше свойства $(\widetilde{P}_{\pm})$ (для рассматриваемого сейчас двумерного случая это свойство под тем же именем было установлено в [9], см. доказательство теоремы 2.5 из [9]). $\square$

Доказательство теоремы 1.3.4. Пусть выполнены предположения теоремы 1.3.4. Фактически нужно доказать только выполнение утверждения теоремы 1.1.1 для данного случая, так как выполнение утверждения теоремы 1.2.1 доказывается на основе теоремы 1.1.1.

Поскольку по условию теоремы 1.3.4 множества уровня градиентного отображения ∇v совпадают с множествами уровня функции $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$, мы можем считать, не умаляя общности, что $m = 1$, т. е. v — вещественнозначная функция.

Ясно, что доказательство утверждения теоремы 1.1.1 достаточно провести для случая, когда в условиях теоремы 1.1.1 Ω является открытым шаром B в $\mathbb{R}^n$. С учетом леммы 2.5 осталось доказать, что градиентное отображение $\nabla v : B \to \mathbb{R}^n$ обладает свойством (A) (конечно, в роли функции f из условия леммы 2.5 здесь выступает отображение $\nabla v : B \to \mathbb{R}^n$).

С учетом непрерывности ∇v для проверки (A) достаточно доказать следующий факт.

(D) *Существует нигде не плотное множество $E \subset \mathbb{R}$ такое, что для любого $s_0 \in J \setminus E$ и для любой точки $z_0 \in B$ такой, что $\frac{\partial v}{\partial x_1}(z_0) = s_0$, найдется гиперплоскость $H \ni z_0$ такая, что $\nabla v = \mathrm{const}$ на $H \cap B$.*

В качестве множества E возьмем множество точек из J, в которых хотя бы одна из функций γ_j не дифференцируема. Из теоремы 1.3.1 прямо следует, что определенное таким образом множество E имеет нулевую меру и, следовательно, нигде не плотно. Зафиксируем $s_0 \in J \setminus E$, $z_0 \in B$ такие, что $\frac{\partial v}{\partial x_1}(z_0) = s_0$. Обозначим $\bar{e} = (1, 0, \dots, 0)$. Для вектора $\bar{\alpha} = (0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in S(0,1)$, перпендикулярного $\bar{e}$, рассмотрим двумерную плоскость $P_{\bar{\alpha}}$, проходящую через точку z_0 параллельно векторам $\bar{e}$, $\bar{\alpha}$. Сужение функции v на эту плоскость будет функцией двух переменных, причем элементарное вычисление приводит нас к равенству $\frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}}(x) = \varphi_{\bar{\alpha}}\big(\frac{\partial v}{\partial \bar{e}}(x)\big)$ для всех $x \in B \cap P_{\bar{\alpha}}$, где $\frac{\partial v}{\partial \bar{\alpha}}$, $\frac{\partial v}{\partial \bar{e}}$ — частные производные по соответствующим направлениям (в частности, $\frac{\partial v}{\partial \bar{e}} = \frac{\partial v}{\partial x_1}$) и $\varphi_{\bar{\alpha}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, определяемая равенствами

$\varphi_{\bar\alpha}(s) = \sum\limits_{j=2}^{n} \alpha_j \gamma_j(s)$. Согласно сделанным предположениям функция $\varphi_{\bar\alpha}$ дифференцируема в точке s_0, $\varphi'_{\bar\alpha}(s_0) = \sum\limits_{j=2}^{n} \alpha_j \gamma'_j(s)$. По лемме 2.12 $\frac{\partial v}{\partial \bar e} = \mathrm{const}$ на пересечении $L_{\bar\alpha} \cap B$, где $L_{\bar\alpha}$ — прямая, проходящая через точку z_0 параллельно вектору $-\varphi'_{\bar\alpha}(s_0)\bar e + \bar\alpha = -(\gamma'(s_0)\cdot\bar\alpha)\bar e + \alpha$. Очевидно, что совокупность всех $L_{\bar\alpha}$ образует некоторую гиперплоскость H, когда α пробегает множество всех векторов из $S(0,1)$, перпендикулярных $\bar e$. По построению $z_0 \in H$ и $\frac{\partial v}{\partial \bar e} = \frac{\partial v}{\partial x_1} = \mathrm{const}$ на $H \cap B$. Следовательно, $\nabla v = \mathrm{const}$ на $H \cap B$. Свойство (D) доказано. Учитывая сделанные вначале замечания, заключаем, что теорема 1.3.4 также доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.5.1. Нам понадобится следующий известный результат А. Я. Дубовицкого.

Теорема A [19] (см. также [20]). *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ есть C^k-гладкое отображение области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Положим $s = n - m - k + 1$. Обозначим через Y множество точек из $\mathbb{R}^m$ таких, что $\mathscr{H}^s(v^{-1}(y) \cap Z_v) > 0$. Тогда* $\operatorname{meas} Y = 0$.

Пусть теперь выполнены предположения теоремы 1.5.1, тогда $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ есть C^1-гладкое отображение области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, причем выполнены утверждения теоремы 1.1.1 и следствия 1.1.2 о множествах уровня градиентного отображения (см. также окончание формулировки теоремы 1.3.4). Рассмотрим нульмерное множество $Y \subset \mathbb{R}^m$, о котором говорится в теореме A (в нашем случае $k = 1$, $s = n - m$). Для окончания доказательства достаточно показать, что

$$v(Z_v) \subset Y. \tag{25}$$

В самом деле, пусть $x_0 \in Z_v$. Обозначим $A = \nabla v(x_0)$. Тогда по определению $\operatorname{rank} A = r < m$ и найдется $(n-r)$-мерное линейное подпространство $R \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $Ax \equiv 0$ для всех $x \in R$.

Рассмотрим гиперплоскость $H \ni x_0$, существование которой утверждается в следствии 1.1.2. По указанному утверждению $\nabla v \equiv A$ на $H \cap B_0$, где B_0 — некоторый шар с центром в x_0. Следовательно, $v(x) = v(x_0)$ для всех $x \in (\{x_0\} + R) \cap H \cap B_0$. Размерность аффинного подпространства $(\{x_0\} + R) \cap H$ не меньше, чем $n - r - 1$. Но в силу сделанных предположений $n - r - 1 \geq n - m = s$, поэтому $\mathscr{H}^s((\{x_0\} + R) \cap H \cap B_0) > 0$. Значит, $v(x_0) \in Y$. Включение (25), а вместе с ним и теорема 1.5.1 полностью доказаны. $\square$

Тем самым все теоремы, сформулированные в первой части статьи, полностью доказаны.

Автор благодарен профессору И. Х. Сабитову, который обратил его внимание на связь обсуждаемой тематики с геометрическими результатами А. В. Погорелова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hartman Ph., Nirenberg L.* On spherical image maps whose Jacobians do not change sign // Amer. J. Math. 1959. V. 81, N 4. P. 901–920.
2. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.
3. *Müller S.* Variational models for microstructure and phase transitions. Leipzig: Max-Planck-Inst. Math. Sci., 1998. (Lect. Notes, N 2. http://www.mis.mpg.de/ jump/publications.html).
4. *Kirchheim B., Székelyhidi L.* On the gradient set of Lipschitz maps // J. Reine Angew. Math. 2008. Bd 625. S. 215–229.

5. *Sychev M. A.* A few remarks on differential inclusions // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. 2006. V. 136, N 3. P. 649–668.
6. *Коробков М. В., Панов Е. Ю.* Об изэнтропических решениях квазилинейных уравнений первого порядка // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 5. С. 99–124.
7. *Коробков М. В., Панов Е. Ю.* К теории изэнтропических решений квазилинейных законов сохранения // Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 33. С. 69–78.
8. *Коробков М. В.* Об одном аналоге теоремы Сарда для C^1-гладких функций двух переменных // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 1083–1091.
9. *Коробков М. В., Панов Е. Ю.* О необходимых и достаточных условиях на кривую для того, чтобы она являлась образом градиента C^1-гладкой функции // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 789–810.
10. *Коробков М. В.* Свойства C^1-гладких функций, множество значений градиента которых является нигде не плотным множеством // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1272–1284.
11. *Коробков М. В.* Пример C^1-гладкой функции двух переменных, множество значений градиента которой является дугой, не имеющей касательной ни в одной точке // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 134–144.
12. *Malý J.* The Darboux property for gradients // Real Anal. Exch. 1996/97. V. 22, N 1. P. 167–173.
13. *Коробков М. В.* Об одном обобщении теоремы Дарбу на многомерный случай // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 118–133.
14. *Егоров А. А., Коробков М. В.* Устойчивость классов липшицевых отображений, теорема Дарбу и квазивыпуклые множества // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1046–1059.
15. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.
16. *Егоров А. А.* Об устойчивости классов аффинных отображений // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1081–1095.
17. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1966. Т. 1.
18. *Панов Е. Ю.* Обобщенные решения задачи Коши для квазилинейных законов сохранения. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1991.
19. *Дубовицкий А. Я.* О структуре множеств уровня дифференцируемых отображений n-мерного куба в k-мерный куб // Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21, № 3. С. 371–408.
20. *Bojarski B., Hajlasz P., Strzelecki P.* Sard's theorem for mappings in Holder and Sobolev spaces // Manusc. Math. 2005. V. 118. P. 383–397.

Статья поступила 18 марта 2008 г.

Коробков Михаил Вячеславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
korob@math.nsc.ru