Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 514.135

СФЕРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ТОРИЧЕСКИХ УЗЛАХ И ЗАЦЕПЛЕНИЯХ

А. А. Колпаков, А. Д. Медных

Аннотация. Исследованы два бесконечных семейства конических многообразий, наделенных сферической метрикой. Сингулярным множеством первого из них является торический узел $\mathrm{t}(2n+1,2)$, а сингулярным множеством второго — двукомпонентное зацепление $\mathrm{t}(2n,2)$. Найдены области сферичности указанных многообразий в терминах конических углов и получены аналитические формулы для их объемов.

Ключевые слова: сферическая геометрия, коническое многообразие, узел, зацепление.

Академику Юрию Григорьевичу Решетняку
к его 80-летию

§ 1. Введение

Трехмерным коническим многообразием называется метрическое пространство, полученное из набора непересекающихся 3-симплексов в пространстве постоянной секционной кривизны k путем изометрического отождествления их граней. При этом предполагается, что образованное в результате такого отождествления топологическое пространство (пространство-носитель) является многообразием.

Такое многообразие обладает римановой метрикой постоянной секционной кривизны k на объединении клеток размерностей 2 и 3. В случае $k=+1$ будем говорить, что соответствующее коническое многообразие *имеет* (или *допускает*) *сферическую структуру.* Аналогично определяются конические многообразия с евклидовой ($k=0$) и гиперболической структурами ($k=-1$).

Метрическая структура вокруг каждой 1-клетки определяется коническим углом, который является суммой двугранных углов при ребрах, дающих после отождествления эту клетку. *Сингулярным множеством* конического многообразия назовем замыкание всех 1-клеток, конический угол вокруг которых не равен 2π. Ниже будем предполагать, что каждая компонента связности сингулярного множества является одномерным подмногообразием (вложенной окружностью) с постоянным коническим углом.

Отметим, что частным случаем конических многообразий являются орбифолды, конические углы которых имеют вид $2\pi/m$, где m — некоторое целое число (подробнее см. [1]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00255), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–5682.2008.1).

В данной работе рассматриваются два бесконечных семейства конических многообразий, носителем которых является трехмерная сфера. Первое состоит из многообразий с сингулярностями вдоль торических узлов $\mathrm{t}(2n+1,2)$, где $n \geq 1$. В рациональной номенклатуре [2] им соответствуют двумостовые узлы $(2n+1)/1$. Второе семейство состоит из многообразий с сингулярностями вдоль двукомпонентных торических зацеплений $\mathrm{t}(2n,2)$, где $n \geq 2$. Такие зацепления также являются двумостовыми и в рациональной номенклатуре обозначаются через $2n/1$ соответственно. Простейшими представителями этих семейств являются узел «трилистник» $3/1$ и зацепление $4/1$. В таблице Рольфсена [2] им соответствуют узел 3_1 и зацепление 4_1^2.

По теореме Терстона [3] многообразие $\mathbb{S}^3 \backslash 3_1$ не допускает гиперболической структуры, однако допускает две других [4]: $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ и $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R})$. Ранее Зейферт и Вебер [5] показали, что сферическое пространство додекаэдра (гомологическая сфера Пуанкаре) является циклическим 5-листным накрытием $\mathbb{S}^3$, разветвленным над 3_1. Следовательно, орбифолд $3_1\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ с сингулярным множеством узел «трилистник» и коническим углом $\frac{2\pi}{5}$ обладает сферической структурой. По классификации Данбара [6] орбифолд $3_1\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ является сферическим при $n \leq 5$, Nil-орбифолдом при $n = 6$ и $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R})$-орбифолдом при $n \geq 7$. Сферическая структура на коническом многообразии $3_1(\alpha)$ подробно исследована в [7].

Простейшим торическим зацеплением с неабелевой фундаментальной группой является зацепление 4_1^2. С него начнется наше рассмотрение семейства конических многообразий с сингулярностями вдоль двумостовых торических зацеплений.

Отметим, что вопрос существования сферической структуры на двумостовых узлах исследован ранее в [8–10]. Метод, предложенный в настоящей работе, позволяет установить области существования сферической структуры на двумостовых торических узлах и зацеплениях, вычислить длины компонент сингулярного множества и объемы соответствующих конических многообразий (см. теоремы 1 и 2).

§ 2. Проективная модель $\mathbb{S}^3_\lambda$

В этом параграфе мы построим проективную модель трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$, которая будет использоваться в дальнейшем при изучении геометрических характеристик двумостовых торических узлов и зацеплений, а также при построении отображений голономии соответствующих конических многообразий. Другие проективные интерпретации однородных геометрий описаны в [11].

Будем рассматривать множество $\mathbb{C}^2 = \{(z_1,z_2) : z_1,z_2 \in \mathbb{C}\}$ как четырехмерное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Обозначим его через $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ и оснастим эрмитовым произведением

$$\langle (z_1,z_2),(w_1,w_2)\rangle_{\mathrm{H}} = (z_1,z_2)\mathscr{H}\overline{(w_1,w_2)}^T,$$

где $\mathscr{H} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ — симметрическая матрица, удовлетворяющая условию $-1 < \lambda < +1$.

С заданной выше эрмитовой формой естественным образом ассоциируются евклидово скалярное произведение

$$\langle (z_1,z_2),(w_1,w_2)\rangle = \mathrm{Re}\,\langle (z_1,z_2),(w_1,w_2)\rangle_{\mathrm{H}}$$

и порожденная им норма

$$\|(z_1, z_2)\| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \lambda(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2).$$

Два элемента (z_1, z_2) и (w_1, w_2) из $\mathring{\mathbb{C}}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}} \backslash (0, 0)$ назовем *эквивалентными*, если существует положительное число μ такое, что $(z_1, z_2) = (\mu w_1, \mu w_2)$. В этом случае будем писать $(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2)$.

Отождествим фактор-пространство $\mathring{\mathbb{C}}^2_{\mathbb{R}}/\sim$ с трехмерной сферой

$$\mathbb{S}^3_\lambda = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}} : \|(z_1, z_2)\| = 1\},$$

оснащенной римановой метрикой

$$ds^2_\lambda = |dz_1|^2 + |dz_2|^2 + \lambda(dz_1 d\bar{z}_2 + d\bar{z}_1 dz_2).$$

В силу равенства

$$ds^2_\lambda = \frac{1+\lambda}{2}|dz_1 + dz_2|^2 + \frac{1-\lambda}{2}|dz_1 - dz_2|^2$$

линейное преобразование

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}(z_1 + z_2), \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}(z_1 - z_2)$$

осуществляет изометрию между римановыми пространствами $(\mathbb{S}^3_\lambda, ds^2_\lambda)$ и $(\mathbb{S}^3, ds^2)$, где $ds^2 = |d\xi_1|^2 + |d\xi_2|^2$ — стандартная метрика кривизны $+1$ на единичной евклидовой сфере $\mathbb{S}^3 = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2 : |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = 1\}$.

Пусть P, Q — две точки из $\mathbb{S}^3_\lambda$. *Сферическим расстоянием между* P и Q будем называть вещественное число $d_\lambda(P, Q)$, однозначно определенное условиями $0 \le d_\lambda(P, Q) \le \pi$ и $\cos d_\lambda(P, Q) = \langle P, Q\rangle$.

§ 3. Торические узлы $\mathbb{T}_n$

Пусть $\mathbb{T}_n$, $n \ge 1$, — торический $\mathrm{t}(2n+1, 2)$ узел, вложенный в трехмерную сферу $\mathbb{S}^3$. Узел $\mathbb{T}_n$ является двумостовым и в рациональной номенклатуре ему соответствует обозначение $(2n+1)/1$ (рис. 1).

=2in 2.5in8

fig1pr.eps Рис. 1. Узел $(2n+1)/1$. Обозначим через $\mathbb{T}_n(\alpha)$ коническое многообразие с сингулярным множеством топологического типа $\mathbb{T}_n$ и коническим углом α вдоль него. Далее будем исследовать многообразия $\mathbb{T}_n(\alpha)$, $n \ge 1$, с целью найти области существования на них сферической метрики и получить формулы объема.

Сначала сформулируем две леммы, которые будем использовать в дальнейшем.

Лемма 1. *Для любых вещественных* $0 < \alpha < 2\pi$ *и* $-1 < \lambda < +1$ *линейные преобразования*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2ie^{i\frac{\alpha}{2}}\lambda \sin\frac{\alpha}{2} & e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & -2ie^{i\frac{\alpha}{2}}\lambda \sin\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются изометриями пространства $\mathbb{S}^3_\lambda$.

Доказательство. Всюду ниже мы считаем, что матрицы действуют на векторы справа. Линейное преобразование L пространства $\mathbb{C}^2_\mathbb{R}$ сохраняет эрмитову форму, если для любых двух векторов $P, Q \in \mathbb{C}^2_\mathbb{R}$ выполнено

$$\langle P, Q\rangle_\mathrm{H} = P\mathscr{H}\overline{Q}^T = PL\mathscr{H}\overline{L}^T\overline{Q}^T = \langle PL, QL\rangle_\mathrm{H}.$$

Это условие равносильно тому, что $\mathscr{H} = L\mathscr{H}\overline{L}^T$. В этом случае, в частности, справедливы равенства $\cos d_\lambda(P,Q) = \langle P, Q\rangle = \langle PL, QL\rangle = \cos d_\lambda(PL, QL)$, т. е. L сохраняет сферическое расстояние между P и Q.

Полагая последовательно $L = A$ и $L = B$, непосредственно убеждаемся, что линейные преобразования A и B сохраняют эрмитову форму на пространстве $\mathbb{C}^2_\mathbb{R}$, а следовательно, и сферическое расстояние на $\mathbb{S}^3_\lambda$. $\square$

Лемма 2. *Пусть A и B те же, что и в формулировке леммы* 1. *Тогда при всех целых $n \geq 1$ выполнено равенство*

$$(AB)^n A - B(AB)^n = 2U_{2n}(\Lambda)e^{i\frac{(2n+1)(\pi+\alpha)}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}M,$$

где M — ненулевая матрица размера 2×2, а $U_{2n}(\Lambda)$ — полином Чебышёва второго рода степени $2n$ от переменной $\Lambda = \lambda\sin\alpha/2$.

Доказательство. Поскольку $-1 < \lambda < +1$, то $-1 < \Lambda = \lambda\sin\alpha/2 < +1$, следовательно, мы можем сделать подстановку $\Lambda = \cos\theta$, где значение $0 < \theta < \pi$ однозначно определено. В новых обозначениях матрицы A и B примут вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2ie^{i\frac{\alpha}{2}}\cos\theta & e^{i\alpha}\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & -2ie^{i\frac{\alpha}{2}}\cos\theta \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

При помощи матрицы

$$V = \begin{pmatrix} ie^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\theta} & ie^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\theta} \\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

приведем AB к диагональной форме

$$D = V^{-1}(AB)V = \begin{pmatrix} -e^{i\alpha}e^{2i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{i\alpha}e^{-2i\theta}\end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица V не является изометрией, однако она удобна для вычислительных целей.

Далее, последовательно вычислим выражение:

$$\begin{aligned}(AB)^n A - B(AB)^n &= (VD^nV^{-1})A - B(VD^nV^{-1}) \\ &= 2\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}e^{i\frac{(2n+1)(\pi+\alpha)}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ -\lambda & 1\end{pmatrix} \\ &= 2U_{2n}(\cos\theta)e^{i\frac{(2n+1)(\pi+\alpha)}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}M = 2U_{2n}(\Lambda)e^{i\frac{(2n+1)(\pi+\alpha)}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}M,\end{aligned}$$

где матрица

$$M = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ -\lambda & 1\end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям леммы. $\square$

Теперь мы можем сформулировать и доказать основную теорему этого параграфа.

Теорема 1. *Коническое многообразие* $\mathbb{T}_n(\alpha)$, $n \geq 1$, *имеет сферическую структуру при*

$$\frac{2n-1}{2n+1}\pi < \alpha < 2\pi - \frac{2n-1}{2n+1}\pi.$$

Длина сингулярного множества конического многообразия $\mathbb{T}_n(\alpha)$ *(иначе, длина узла* $\mathbb{T}_n$*) выражается формулой*

$$l_\alpha = (2n+1)\alpha - (2n-1)\pi.$$

Объем $\mathbb{T}_n(\alpha)$ *равен*

$$\operatorname{Vol}\mathbb{T}_n(\alpha) = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{2n+1}{2}\alpha - \frac{2n-1}{2}\pi\right)^2.$$

Доказательство. Фундаментальная группа дополнения к узлу $\mathbb{T}_n$ имеет представление $\pi_1(\mathbb{S}^3 \backslash \mathbb{T}_n) = \langle a, b \mid (ab)^n a = b(ab)^n \rangle$, порождающие a и b которого соответствуют петлям, указанным на рис. 1.

Если коническое многообразие $\mathbb{T}_n(\alpha)$ допускает сферическую структуру, то существует отображение голономии [1], представляющее собой гомоморфизм

$$h : \pi_1(\mathbb{S}^3 \backslash \mathbb{T}_n) \longmapsto \operatorname{Isom}\mathbb{S}^3_\lambda.$$

Нам нужно выбрать отображение h, согласованное с геометрическим построением рассматриваемого многообразия.

В дальнейшем мы будем проводить все вычисления, связанные с нахождением длины узла $\mathbb{T}_n$ и объема конического многообразия $\mathbb{T}_n(\alpha)$, используя соответствующий фундаментальный многогранник $\mathscr{P}_n$ (рис. 2). Алгоритм построения такого многогранника для произвольного двумостового узла подробно описан в [12].

Комбинаторно многогранник $\mathscr{P}_n$ состоит из вершин P_i, $i \in \{1, \dots, 4n+2\}$, ребер P_iP_{i+1}, $i \in \{1, \dots, 4n+2\}$, где $P_{4n+3} = P_1$, P_1P_{2n+2} и P_2P_{2n+3}. Обозначим через N, S выделенные точки (северный и южный «полюсы» $\mathscr{P}_n$) на ребрах P_1P_{2n+2} и P_2P_{2n+3} соответственно и введем в рассмотрение ребра NP_i, SP_i, $i \in \{1, \dots, 4n+2\}$.

Без ограничения общности выберем отображение голономии так, чтобы выполнялись условия $h(a) = A$, $h(b) = B$, где A и B — матрицы из леммы 1. Тогда образы порождающих фундаментальной группы узла $\mathbb{T}_n$ при отображении h соответствуют изометриям, отождествляющим грани $\mathscr{P}_n$ путем поворота вокруг ребра P_1P_{2n+2} для его верхней поверхности и вокруг ребра P_2P_{2n+3} — для нижней (рис. 2). При таком отождествлении сами P_1P_{2n+2} и P_2P_{2n+3} «завязываются» в узел $\mathbb{T}_n$ (подробнее см. [12, 13]).

$$= 5cmfig2poly.eps$$

Рис. 2. Фундаментальный многогранник $\mathscr{P}_n$ для семейства $\mathbb{T}_n(\alpha)$.

Для того чтобы начать геометрическое построение многогранника $\mathscr{P}_n$, фиксируем его ребро P_1P_2, полагая

$$P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 1).$$

В этом случае

$$\cos d_\lambda(P_1, P_2) = \langle P_1, P_2 \rangle = \lambda,$$

т. е. сферическое расстояние между точками P_1 и P_2 может принимать любые значения между 0 и π. Таким образом, фиксируя ребро P_1P_2, мы не ограничиваем общности нашего построения.

Заметим, что неподвижная ось изометрии A из леммы 1 содержит точку P_1, а ось B — точку P_2. Наша цель — построить многогранник $\mathscr{P}_n$ так, чтобы ребра P_1P_{2n+2} и P_2P_{2n+3} были соответственно осями изометрий A и B, а вершины P_i получались из P_1 и P_2 действием отображений A и B.

Многогранник $\mathscr{P}_n$ назовем *правильным*, если

(a) внутренние двугранные углы при ребрах P_1P_{2n+2} и P_2P_{2n+3} равны каждый α;

(b) следующие криволинейные грани отождествляются преобразованиями A и B:

$$A : NP_1P_2\dots P_{2n+2} \to NP_1P_{4n+2}\dots P_{2n+3}P_{2n+2},$$
$$B : SP_2P_1P_{4n+2}\dots P_{2n+3} \to SP_2P_3\dots P_{2n+3};$$

(c) сумма внутренних двугранных углов ψ_i при ребрах P_iP_{i+1}, $i \in \{1,\dots,4n+1\}$, равна 2π;

(d) сумма двугранных углов ϕ_i составляющих его тетраэдров NSP_iP_{i+1}, $i \in \{1,\dots,4n+1\}$, при их общем ребре NS равна 2π;

(e) все тетраэдры NSP_iP_{i+1}, где $i \in \{1,\dots,4n+2\}$, $P_{4n+3} = P_1$, невырожденны и когерентно ориентированы.

Под ориентацией тетраэдра NSP_iP_{i+1} мы понимаем знак определителя Грама $\det(S,N,P_i,P_{i+1})$ соответствующей четверки векторов $S,N,P_i,P_{i+1} \in \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$, где $i \in \{1,\dots,4n+2\}$, $P_{4n+3} = P_1$. Невырожденность означает выполнение условия $\det(S,N,P_i,P_{i+1}) \neq 0$. Таким образом, условие (e) выполнено, если определители Грама всех тетраэдров ненулевые и имеют один и тот же знак.

В случае, когда $\alpha = \frac{2\pi}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, по теореме Пуанкаре [14, теорема 13.5.3] условия (a)–(e) гарантируют, что группа, порожденная изометриями A и B, дискретна и имеет представление

$$\Gamma = \langle A, B \mid (AB)^n A = B(AB)^n, A^m = B^m = \mathrm{id}\rangle.$$

При этом $\mathbb{S}^3_\lambda/\Gamma \cong \mathbb{T}_n\left(\frac{2\pi}{m}\right)$ — сферический орбифолд, а $\mathscr{P}_n$ — его фундаментальный многогранник. Если же $m \notin \mathbb{N}$, то группа, порожденная A и B, не обязательно дискретна. Но поскольку отождествления граней $\mathscr{P}_n$ происходят по той же схеме, что и в случае $m \in \mathbb{N}$, в результате получим коническое многообразие $\mathbb{T}_n(\alpha)$.

Заметим, что в силу леммы 1 и построения $\mathscr{P}_n$ условия (a) и (b) выполнены.

Необходимым условием существования отображения голономии h является выполнение соотношения

$$h((ab)^n a) - h(b(ab)^n) = (AB)^n A - B(AB)^n = 0.$$

Из леммы следует, что оно выполнено, если и только если $U_{2n}(\Lambda) = 0$, где $\Lambda = \lambda \sin\alpha/2$.

Таким образом, параметр λ метрики ds^2_λ определяется одним из корней полинома Чебышёва $U_{2n}(\Lambda)$ и связан с коническим углом α соотношением $\lambda = \Lambda/\sin\alpha/2$.

Известно, что все корни полинома $U_{2n}(\Lambda)$ вещественны и могут быть записаны в виде

$$\Lambda_k = \cos\frac{k\pi}{2n+1},$$

где $k \in \{1, \dots, 2n\}$.

Нам необходимо выбрать параметр λ для метрики ds^2_λ таким образом, чтобы многогранник $\mathscr{P}_n$ являлся правильным, а сама метрика — сферической.

Отметим, что ребра P_iP_{i+1}, $i \in \{1, \dots, 4n+2\}$, $P_{4n+3} = P_1$ эквивалентны друг другу относительно действия группы $\Gamma = \langle A, B\rangle$. Следовательно, выполнение соотношения $(AB)^nA = B(AB)^n$ влечет равенство

$$\sum_{i=1}^{2(2n+1)} \psi_i = 2k\pi,$$

где k — некоторое целое число.

Покажем, что λ можно выбрать так, чтобы выполнялось $k = 1$ для всех α из формулировки теоремы. Для этого используем тот факт, что при $\alpha = \pi$ всякий двумостовой узел наделен сферической орбифолдной структурой [15]. В этом случае все вершины P_i фундаментального многогранника лежат на одной окружности, а все двугранные углы ψ_i и ϕ_i равны между собой [12]:

$$\phi_i = \psi_i = \frac{\pi}{2n+1}.$$

Так как $\cos d_\lambda(N,S) = \cos d_\lambda(P_i, P_{i+1}) = \lambda$, в случае $\alpha = \pi$ получим

$$\lambda = \frac{\Lambda_k}{\sin \pi/2} = \cos\theta$$

для некоторого $k \in \{1, \dots, 2n\}$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{2(2n+1)} \psi_i = 2(2n+1)\theta.$$

Используя формулу для корней полинома $U_{2n}(\Lambda)$, находим, что $\sum\limits_{i=1}^{2(2n+1)} \psi_i = 2k\pi$ при $\alpha = \pi$. Таким образом, условие (c) для многогранника $\mathscr{P}_n$ в точке $\alpha = \pi$ выполнено при $k = 1$. Учитывая, что параметр α меняется непрерывно, а сумма углов ψ_i принимает только значения, кратные 2π, получим, что $\sum\limits_{i=1}^{2(2n+1)} \psi_i = 2\pi$ для всякого α.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что при $\lambda = \Lambda_1/\sin\alpha/2$ имеет место равенство $\sum\limits_{i=1}^{2(2n+1)} \phi_i = 2\pi$, т. е. условие (d) также выполнено.

Убедимся теперь, что в условиях теоремы метрика ds^2_λ является сферической. Это требование эквивалентно неравенству $-1 < \lambda < +1$. Заметим, что при

$$\frac{2n-1}{2n+1}\pi < \alpha < 2\pi - \frac{2n-1}{2n+1}\pi$$

выполнено неравенство

$$\sin\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{(2n-1)\pi}{2(2n+1)}.$$

Так как $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$ и $\Lambda_1 = \sin\frac{(2n-1)\pi}{2(2n+1)} > 0$, получим, что $0 < \lambda < 1$.

Аналогично доказательству леммы 1 можно показать, что преобразование

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

является изометрией метрики ds^2_λ.

Неподвижными множествами изометрий A и B в сфере $\mathbb{S}^3_\lambda$ являются окружности

$$\operatorname{Fix} A = \{(z_1, 0) : z_1 \in \mathbb{C}, |z_1| = 1\}, \quad \operatorname{Fix} B = \{(0, z_2) : z_2 \in \mathbb{C}, |z_2| = 1\}$$

соответственно. Геометрический смысл изометрии C состоит в том, что она переводит одну неподвижную окружность в другую. Следовательно, справедливо соотношение $B = CAC^{-1}$.

Также имеем равенства

$$P_{2k+1} = P_1(AB)^k,\ k \in \{0, \dots, n\}, \quad P_{2k} = P_2(AB)^{k-1},\ k \in \{1, \dots, n+1\},$$
$$P_{2k+1} = P_1(BA)^{2n-k+1}, \quad k \in \{n+1, \dots, 2n\},$$
$$P_{2k} = P_2(BA)^{2n-k+2}, \quad k \in \{n+2, \dots, 2n+1\},$$

которые следуют из схемы отождествления ребер многогранника $\mathscr{P}_n$.

Введем вспомогательную функцию

$$\varepsilon(m) = \frac{m}{2}\alpha - \frac{4n-m}{2}\pi.$$

Действуя аналогично доказательству леммы 2, получим

$$(AB)^k = C(BA)^k C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(2k-1)\theta}{\sin\theta} e^{i\varepsilon(2k)} & -\frac{\sin 2k\theta}{\sin\theta} e^{i\varepsilon(2k-1)} \\ \frac{\sin 2k\theta}{\sin\theta} e^{i\varepsilon(2k+1)} & \frac{\sin(2k+1)\theta}{\sin\theta} e^{i\varepsilon(2k)} \end{pmatrix},$$

где $\theta = \frac{\pi}{2n+1}$.

Положим, что вершины N и S — середины ребер P_1P_{2n+2} и P_2P_{2n+3} соответственно. Тогда $N = (e^{i\frac{\varepsilon(2n+1)}{2}}, 0)$, $S = (0, e^{i\frac{\varepsilon(2n+1)}{2}})$. Следовательно, для длины сингулярной компоненты l_α справедливы равенства

$$\cos\frac{l_\alpha}{4} = \langle P_1, N\rangle = \langle P_1C, NC\rangle = \langle P_2, S\rangle.$$

Таким образом, находим, что

$$\cos\frac{l_\alpha}{4} = \cos\frac{(2n+1)\alpha - (2n-1)\pi}{4}.$$

Поскольку по построению многогранника $\mathscr{P}_n$ выполнено неравенство $0 < l_\alpha < 4\pi$ и в условиях теоремы аргумент косинуса в правой части формулы положителен и не превосходит π, получим равенство

$$l_\alpha = (2n+1)\alpha - (2n-1)\pi.$$

Зная координаты вершин P_i, а также «полюсов» N и S многогранника $\mathscr{P}_n$, мы можем проверить условие (e).

Для любых четырех точек $A, B, C, D \in \mathbb{C}^2_\mathbb{R}$, где

$$A = (A_1, A_2), \quad B = (B_1, B_2), \quad C = (C_1, C_2), \quad D = (D_1, D_2),$$

их определителем Грама является функция

$$\det(A, B, C, D) := \det\begin{pmatrix} \operatorname{Re} A_1 & \operatorname{Im} A_1 & \operatorname{Re} A_2 & \operatorname{Im} A_2 \\ \operatorname{Re} B_1 & \operatorname{Im} B_1 & \operatorname{Re} B_2 & \operatorname{Im} B_2 \\ \operatorname{Re} C_1 & \operatorname{Im} C_1 & \operatorname{Re} C_2 & \operatorname{Im} C_2 \\ \operatorname{Re} D_1 & \operatorname{Im} D_1 & \operatorname{Re} D_2 & \operatorname{Im} D_2 \end{pmatrix}.$$

Каждый тетраэдр NSP_iP_{i+1} с $i \in \{1,\dots,2n+1\}$ изометричен тетраэдру $NSP_{2n+i+1}P_{2n+i+2}$, $i \in \{1,\dots,2n+1\}$, $P_{4n+3} = P_1$ при помощи введенной ранее изометрии C. Поэтому рассмотрим только тетраэдры NSP_iP_{i+1} с $i \in \{1,\dots,2n+1\}$. В дальнейшем нам будет удобно разбить их на две группы: тетраэдры $NSP_{2k+1}P_{2k+2}$ с $k \in \{0,\dots,n\}$ и тетраэдры $NSP_{2k}P_{2k+1}$ с $k \in \{1,\dots,n\}$.

Применяя подстановку $\alpha = \beta + \pi$, непосредственными вычислениями получим

$$\begin{aligned}\Delta_k^{(1)}(\beta) = \det(S,N,P_{2k+1},P_{2k+2}) &= \cos^2\frac{L_1\beta}{4} - U_{2k-1}^2(\cos\theta)\sin^2\frac{\beta}{2}\\ &= T_{L_1}^2\left(\cos\frac{\beta}{4}\right) - U_{2k-1}^2(\cos\theta)\sin^2\frac{\beta}{2},\end{aligned}$$

где $k \in \{0,\dots,n\}$, $L_1 = |2n-4k+1|$, $\theta = \frac{\pi}{2n+1}$, $\beta \in [-2\theta, 2\theta]$;

$$\begin{aligned}\Delta_k^{(2)}(\beta) &= \det(S,N,P_{2k},P_{2k+1})\\ &= \cos^2\frac{L_2\beta}{4} - U_{2k-2}^2(\cos\theta)\sin^2\frac{\beta}{2} = T_{L_2}^2\left(\cos\frac{\beta}{4}\right) - U_{2k-1}^2(\cos\theta)\sin^2\frac{\beta}{2},\end{aligned}$$

где $k \in \{1,\dots,n\}$, $L_2 = |2n-4k+3|$, θ и β те же, что и выше. Через T_k обозначим многочлен Чебышева первого рода степени $k \geq 0$. Также для удобства полагаем в нашей записи $U_{-1}(\cos\theta) = 0$, $U_0(\cos\theta) = 1$.

Поскольку функции $\Delta_k^{(j)}(\beta)$, $j \in \{1,2\}$, четны на промежутке $[-2\theta, 2\theta]$, достаточно рассмотреть их на $[0, 2\theta]$. Заметим, что многочлен $T_{L_j}^2(\cos\beta)$ монотонно убывает, а функция $\sin^2\frac{\beta}{2}$ монотонно возрастает при $\beta \in [0, 2\theta]$. При этом $T_{L_j}^2(\cos 0) = T_{L_j}^2(1) = 1$. Таким образом, приходим к выводу, что $\Delta_k^{(j)}(\beta) > 0$ при $\beta \in (-2\theta, 2\theta)$. Кроме того, на концах интервала выполнено равенство $\Delta_k^{(j)}(\pm 2\theta) = 0$.

Следовательно, при всех $\beta \in (-2\theta, 2\theta)$ (т. е. при всех α из формулировки теоремы) имеем

$$\det(S,N,P_i,P_{i+1}) > 0,$$

где $i \in \{1,\dots,4n+2\}$, $P_{4n+3} = P_1$, т. е. условие (e) для многогранника $\mathscr{P}_n$ выполнено.

Для нахождения объема конического многообразия $\mathbb{T}_n(\alpha)$ применим формулу Шлефли [16]. Получим

$$d\,\mathrm{Vol}\,\mathbb{T}_n(\alpha) = \frac{l_\alpha}{2}d\alpha = \frac{(2n+1)\alpha - (2n-1)\pi}{2}d\alpha.$$

Заметим, что $\mathrm{Vol}\,\mathbb{T}_n(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to \frac{2n-1}{2n+1}\pi$. Действительно, в этом случае $d_\lambda(P_i, P_{i+1}) \to 0$, где $i \in \{1,\dots,4n+2\}$, $P_{4n+3} = P_1$. Отсюда

$$\mathrm{Vol}\,\mathbb{T}_n(\alpha) = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{2n+1}{2}\alpha - \frac{2n-1}{2}\pi\right)^2. \quad \square$$

Замечание 1. Область существования сферической метрики из формулировки теоремы 1 указана ранее в [10, предложение 2.1].

§ 4. Торические зацепления $\mathbb{L}_n$

Пусть $\mathbb{L}_n$, $n \geq 2$, — двукомпонентное торическое зацепление $\mathrm{t}(2n, 2)$. В рациональной номенклатуре ему соответствует двумостовое зацепление $2n/1$ (рис. 3).

=2in 2.3in8

fig3pr.eps Рис. 3. Зацепление $2n/1$.

Фундаментальная группа дополнения к $\mathbb{L}_n$ в трехмерной сфере имеет представление $\pi_1(\mathbb{S}^3 \backslash \mathbb{L}_n) = \langle a, b \mid (ab)^n = (ba)^n \rangle$. Обозначим через $\mathbb{L}_n(\alpha, \beta)$ коническое многообразие с сингулярным множеством $\mathbb{L}_n$ и коническими углами α и β вдоль его компонент. При исследовании семейства $\mathbb{L}_n(\alpha, \beta)$, $n \geq 2$, будем использовать метод, аналогичный изложенному в предыдущем параграфе.

Для любых вещественных $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$ и $\lambda \in (-1, +1)$ положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2ie^{i\frac{\alpha}{2}} \lambda \sin \frac{\alpha}{2} & e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e^{i\beta} & -2ie^{i\frac{\beta}{2}} \lambda \sin \frac{\beta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По лемме 1 линейные преобразования A и B являются изометриями пространства $\mathbb{S}^3_\lambda$.

Лемма 3. *Для всех целых $n \geq 2$ справедливо равенство*

$$(AB)^n - (BA)^n = 4U_{n-1}(\Lambda) \lambda e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2} + \pi)n} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} M,$$

где M — ненулевая матрица размера 2×2, а $U_{n-1}(\Lambda)$ — полином Чебышёва второго рода степени $n-1$ от переменной

$$\Lambda = (1 - \lambda^2) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \lambda^2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Доказательство. Будем действовать аналогично доказательству леммы 2. Поскольку для переменной Λ справедливы неравенства

$$-1 < \Lambda = (1 - \lambda^2) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \lambda^2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} < +1,$$

можно сделать замену $\Lambda = \cos \theta$, при которой значение $0 < \theta < \pi$ определено однозначно. Она понадобится ниже, при диагонализации матриц изометрий AB и BA. Будем использовать также прежнюю переменную λ там, где это необходимо.

В случае, когда $\alpha \neq \beta$, матрицы A и B (аналогично AB и BA) уже не сопрягаются при помощи изометрии $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Однако AB и BA по-прежнему можно привести к одинаковой диагональной форме D.

Положим

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1 + e^{\frac{i}{2}(\alpha - \beta - 2\theta)}}{\lambda(1 - e^{i\alpha})} & \frac{1 + e^{\frac{i}{2}(\alpha - \beta + 2\theta)}}{\lambda(1 - e^{i\alpha})} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1 + e^{\frac{i}{2}(\beta - \alpha + 2\theta)}}{\lambda(1 - e^{-i\alpha})} & \frac{1 + e^{\frac{i}{2}(\beta - \alpha - 2\theta)}}{\lambda(1 - e^{-i\alpha})} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда при $\lambda \neq 0$ получим, что

$$D = V_1^{-1}(AB)V_1 = V_2^{-1}(BA)V_2 = \begin{pmatrix} -e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Последовательно преобразуем выражение:

$$(AB)^n - (BA)^n = V_1 D^n V_1^{-1} - V_2 D^n V_2^{-1}$$
$$= 4\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}\lambda e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2}+\pi)n}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}$$
$$= 4U_{n-1}(\cos\theta)\lambda e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2}+\pi)n}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}M = 4U_{n-1}(\Lambda)\lambda e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2}+\pi)n}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}M,$$

где матрица $M = \begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям леммы.

В случае $\lambda = 0$ все вычисления легко проделать непосредственно, так как матрицы A и B становятся диагональными и коммутируют. $\square$

Теорема 2. *Коническое многообразие $\mathbb{L}_n(\alpha,\beta)$, $n \geq 2$, имеет сферическую структуру, если выполнены условия*

$$-2\pi(1-1/n) < \alpha - \beta < 2\pi(1-1/n), \quad 2\pi(1-1/n) < \alpha + \beta < 2\pi(1+1/n).$$

Длины сингулярных компонент l_α и l_β (длины компонент зацепления $\mathbb{L}_n$) равны между собой и выражаются формулой

$$l_\alpha = l_\beta = \frac{\alpha+\beta}{2}n - \pi(n-1).$$

Объем конического многообразия $\mathbb{L}_n(\alpha,\beta)$ равен

$$\operatorname{Vol}\mathbb{L}_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{2n}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}n - (n-1)\pi\right)^2.$$

Доказательство. Будем действовать аналогично доказательству теоремы 1. Как и выше, предположим, что на коническом многообразии $\mathbb{L}_n(\alpha,\beta)$ существует сферическая структура. Тогда существует отображение голономии [1]:

$$h : \pi_1(\mathbb{S}^3 \backslash \mathbb{L}_n) \longmapsto \operatorname{Isom}\mathbb{S}^3_\lambda, \quad h(a) = A, \quad h(b) = B.$$

$$= 5cmfig4poly.eps$$

Рис. 4. Фундаментальный многогранник $\mathscr{F}_n$ для семейства $\mathbb{L}_n(\alpha,\beta)$.

При этом $h((ab)^n) - h((ba)^n) = (AB)^n - (BA)^n = 0$. В силу леммы 3 указанное выше равенство выполняется либо в случае $\lambda = 0$, либо если

$$\Lambda = (1-\lambda^2)\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \lambda^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

является корнем уравнения $U_{n-1}(\Lambda) = 0$.

В случае $\lambda = 0$ в образе отображения голономии h выполняется дополнительное соотношение $AB = BA$. При $n \geq 2$ это соответствует геометрически вырожденному случаю. Поэтому необходимо выбрать подходящий параметр λ для метрики ds^2_λ, используя корни полинома Чебышёва $U_{n-1}(\Lambda)$.

Фундаментальный многогранник $\mathscr{F}_n$ для конического многообразия $\mathbb{L}_n(\alpha,\beta)$ изображен на рис. 4. Его вершинам P_1 и P_2 присваиваем координаты $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (0,1)$. Оси изометрий A и B соответствуют линиям P_1P_{2n+1} и P_2P_{2n+2}.

Точки N и S соответствуют серединам ребер P_1P_{2n+1} и P_2P_{2n+2}, т. е. «северному» и «южному» полюсам многогранника.

Многогранник $\mathscr{F}_n$ будем называть *правильным*, если

(a) внутренние двугранные углы при ребрах P_1P_{2n+1} и P_2P_{2n+2} равны α и β соответственно;

(b) следующие криволинейные грани отождествляются преобразованиями A и B:

$$A : NP_1P_2\dots P_{2n+1} \to NP_1P_{4n}\dots P_{2n+2}P_{2n+1},$$

$$B : SP_2P_1P_{4n}\dots P_{2n+2} \to SP_2P_3\dots P_{2n+2};$$

(c) сумма внутренних двугранных углов ψ_i при ребрах P_iP_{i+1}, $i \in \{1,\dots,4n-1\}$, равна 2π;

(d) сумма двугранных углов ϕ_i составляющих его тетраэдров NSP_iP_{i+1}, $i \in \{1,\dots,4n-1\}$, при их общем ребре NS равна 2π;

(e) все тетраэдры NSP_iP_{i+1}, где $i \in \{1,\dots,4n\}$, $P_{4n+1} = P_1$, невырожденны и когерентно ориентированы.

Для того чтобы выбрать параметр λ для введенной нами метрики, рассмотрим соответствующий фундаментальный многогранник $\mathscr{F}_n$ в случае $\alpha = \beta = \pi$. Тогда все его вершины лежат на одной окружности и все двугранные углы ψ_i составляющих его тетраэдров NSP_iP_{i+1} при ребрах P_iP_{i+1} одинаковы и равны каждый $\psi = \frac{\pi}{2n}$ [12]. Аналогично все двугранные углы ϕ_i тетраэдров NSP_iP_{i+1} при общем ребре NS совпадают: $\phi_i = \phi = \pi/2n$. В этом случае $\lambda = \langle P_1, P_2\rangle = \cos\phi$ и

$$\Lambda = -\cos 2\phi = \cos\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Поскольку все корни многочлена $U_{n-1}(\Lambda)$ задаются формулой

$$\Lambda_k = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k \in \{1,\dots,n-1\},$$

нам нужен корень Λ_k с $k = n-1$. Тогда, как и в теореме 1, получим, что равенства

$$\sum_{i=1}^{4n}\psi_i = 2\pi, \quad \sum_{i=1}^{4n}\phi_i = 2\pi$$

выполнены в точке $\alpha = \beta = \pi$ из области

$$\mathscr{D} = \{(\alpha,\beta) : |\alpha-\beta| < 2\pi(1-1/n), |\alpha+\beta-2\pi| < 2\pi/n\},$$

изображенной на рис. 5.

=1.6in 2.2in14

sphdomain.epsРис. 5. Область $\mathscr{D}$ существованиясферической метрики на кони-ческом многообразии $\mathbb{L}_n(\alpha,\beta)$. Возвращаясь к параметру λ, определяющему метрику ds^2_λ, мы можем записать

$$\lambda^2 = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Поскольку при $(\alpha,\beta) \in \mathscr{D}$ выполняется неравенство $0 < \lambda^2 < 1$, метрика ds^2_λ в указанной области сферическая. Аналогично рассуждениям теоремы 1 можно показать, что условия (a)–(d) для $\mathscr{F}_n$ выполнены внутри $\mathscr{D}$. Длины сингулярных компонент l_α и l_β конического многообразия $\mathbb{L}_n(\alpha,\beta)$ удовлетворяют соотношениям

$$\cos\frac{l_\alpha}{2} = \langle P_1, N\rangle, \quad \cos\frac{l_\beta}{2} = \langle P_2, S\rangle.$$

Действуя аналогично доказательству теоремы 1, получим

$$l_\alpha = l_\beta = \frac{\alpha+\beta}{2}n - \pi(n-1).$$

Зная координаты всех вершин многогранника, мы можем проверить непосредственными вычислениями, что условие (e) для многогранника $\mathscr{F}_n$ выполнено для всех (α,β) внутри области $\mathscr{D}$.

Для нахождения объема $\operatorname{Vol}\mathbb{L}_n(\alpha,\beta)$ воспользуемся формулой Шлефли [16]

$$d\operatorname{Vol}\mathbb{L}_n(\alpha,\beta) = \frac{l_\alpha}{2}d\alpha + \frac{l_\beta}{2}d\beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}n - \pi(n-1)\right) d\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Интегрируя с учетом того, что при

$$\alpha = \beta \to \pi\frac{n-1}{n}$$

фундаментальный многогранник $\mathscr{F}_n$ стягивается в точку (т. е. его объем стремится к нулю), получим последнее утверждение теоремы. □

Замечание 2. При условии $\alpha = \beta$ двустороннее неравенство из формулировки теоремы 2 совпадает с неравенством, приведенным в [10, предложение 2.2].

Замечание 3. Отметим, что длины сингулярных компонент конического многообразия $\mathbb{L}_n(\alpha,\beta)$ равны между собой даже в случае $\alpha \neq \beta$.

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания, которые привели к улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thurston W. P.* The geometry and topology of 3-manifolds. Princeton: Princeton Univ. Press, 1977.
2. *Rolfsen D.* Knots and links. Berkeley: Publish or Perish Inc., 1976.
3. *Thurston W. P.* Hyperbolic geometry and 3-manifolds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 48).
4. *Neumann W. P.* Notes on geometry and 3-manifolds, with appendix by Paul Norbury // Low dimensional topology. Bolyai Soc. Math. Studies. 1999. V. 8. P. 191–267.
5. *Seifert H., Weber C.* Die beiden Dodecaederräme // Math. Z. 1933. Bd 37. S. 237–253.
6. *Dunbar W. D.* Geometric orbifolds // Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid. 1988. V. 1. P. 67–99.
7. *Derevnin D., Mednykh A., Mulazzani M.* Geometry of Trefoil cone-manifold // Beit Algebra Geom. 2008. (To appear.)
8. *Hilden H. M., Lozano M. T., Montesinos–Amilibia J. M.* On a remarkable polyhedron geometrizing the figure eight cone manifolds // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 1995. V. 2. P. 501–561.
9. *Mednykh A., Rasskazov A.* Volumes and degeneration of cone-structures on the figure-eight knot // Tokyo J. Math. 2006. V. 29, N 2. P. 445–464.
10. *Porti J.* Spherical cone structures on 2–bridge knots and links // Kobe J. Math. 2004. V. 21, N 1. P. 61–70.
11. *Molnár E.* The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries // Beit Algebra Geom. 1997. Bd 38. Heft 2. S. 261–288.
12. *Mednykh A., Rasskazov A.* On the structure of the canonical fundamental set for the 2-bridge link orbifolds. Universität Bielefeld, Sonderforschungsbereich 343, “Discrete Structuren in der Mathematik", Preprint 98-062. 1998.

13. *Minkus J.* The branched cyclic coverings of 2-bridge knots and links. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1982. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 35).
14. *Ratcliffe J.* Foundations of hyperbolic manifolds. New York: Springer-Verl., 1994. (Grad. Texts Math.; V. 149).
15. *Hodgson C., Rubinstein J. H.* Involutions and isotopies of lens spaces // Knot theory and manifolds (Vancouver, B.C., 1983). Berlin: Springer-Verl., 1985. P. 60–96. (Lect. Notes Math.; 1144).
16. *Hodgson C.* Degeneration and regeneration of hyperbolic structures on three-manifolds. Princeton: Thesis, 1986.

Статья поступила 20 мая 2008 г., окончательный вариант — 5 декабря 2008 г.

Колпаков Александр Александрович
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
kolpakov.alexander@gmail.com

Медных Александр Дмитриевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mednykh@math.nsc.ru