Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 517.953+517.983

КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА. II

Г. В. Демиденко

Аннотация. Рассмотрены матричные квазиэллиптические операторы во всем пространстве. При условии квазиоднородности символов доказана теорема об изоморфизме этих операторов в специальных шкалах весовых соболевских пространств. Из этой теоремы, в частности, вытекают ряд известных теорем об изоморфизме эллиптических операторов, а также теоремы об однозначной разрешимости начальной задачи для широкого класса систем соболевского типа.

Ключевые слова: квазиэллиптический оператор, весовое соболевское пространство, изоморфизм, уравнение соболевского типа.

§ 1. Введение

Посвящается Ю. Г. Решетняку в честь его 80-летия

Мы продолжаем изучение *матричных квазиэллиптических* операторов

$$\mathscr{L}(D_x) = (l_{j,r}(D_x)) \tag{1.1}$$

во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассматриваемый класс операторов входит в класс квазиэллиптических операторов, введенных Л. Р. Волевичем [1], и содержит, в частности, однородные эллиптические операторы, эллиптические и параболические операторы по Петровскому, эллиптические операторы по Дуглису — Ниренбергу и др. Для этих операторов устанавливается теорема об изоморфизме в специальных шкалах весовых соболевских пространств $W^l_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$. Из этого результата вытекают ряд известных теорем об изоморфизме для эллиптических операторов, а также ряд новых теорем об изоморфизме для эллиптических и параболических операторов в $\mathbb{R}^n$. Из теоремы об изоморфизме следует однозначная разрешимость начальной задачи для широкого класса систем соболевского типа:

$$\mathscr{L}(D_x)D_t^m U + \sum_{k=0}^{m-1} \mathscr{L}_{m-k}(D_x) D_t^k U = F(t,x).$$

В первой части работы [2] уже отмечалось, что теоремы об изоморфизме имеют многочисленные приложения в теории уравнений с частными производными. Однако даже в случае скалярных дифференциальных операторов формулировки таких теорем далеко не очевидные. В случае матричных дифференциальных операторов формулировки значительно сложнее. Особенно это касается операторов, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу. В формулировках теорем об

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00289) и Сибирского отделения Российской академии наук (№ 85).

изоморфизме для таких операторов используются специальные шкалы весовых соболевских пространств с разными показателями гладкости и веса (см. [2–5]).

В работе продолжаются исследования [2–6]. Близкие вопросы о свойствах дифференциальных операторов содержатся в [7–12].

§ 2. Формулировка основных результатов

Укажем условия на класс матричных дифференциальных операторов (1.1).

Условие 1^0. Будем предполагать, что матричный $\nu \times \nu$-дифференциальный оператор $\mathscr{L}(D_x)$ имеет постоянные коэффициенты и его символ $\mathscr{L}(i\xi) = (l_{j,r}(i\xi))$ удовлетворяет следующим условиям.

Условие 2^0. Существуют векторы

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_\nu), \quad t_k > 0, \quad t_k/\alpha_i \in \mathbb{N},$$

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_\nu), \quad s_j \le 0, \quad \max\{s_j\} = 0, \quad s_j/\alpha_i \in \mathbb{Z},$$

такие, что для любого $c > 0$ справедливо равенство

$$\mathscr{L}(c^\alpha i\xi) = \begin{pmatrix} c^{s_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c^{s_\nu} \end{pmatrix} \mathscr{L}(i\xi) \begin{pmatrix} c^{t_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c^{t_\nu} \end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Полагаем, что $l_{j,r}(i\xi) \equiv 0$ при $s_j + t_r < 0$.

Условие 3^0. Равенство

$$\det \mathscr{L}(i\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

Отметим, что класс дифференциальных операторов, удовлетворяющих перечисленным условиям в случае $s_1 = \dots = s_\nu = 0$, рассмотрен в [2]. Этот класс содержит, в частности, однородные квазиэллиптические операторы, эллиптические и параболические операторы по Петровскому. Здесь будем рассматривать общий случай $s_j \le 0$. Этот класс операторов включает, в частности, операторы, эллиптические по Дуглису — Ниренбергу. Приведем два примера таких операторов.

Пример 1. Рассмотрим матричный дифференциальный оператор

$$\ell_1(D_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & D_{x_1} \\ 0 & 1 & 0 & D_{x_2} \\ 0 & 0 & 1 & D_{x_3} \\ D_{x_1} & D_{x_2} & D_{x_3} & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{2.1}$$

Очевидно, он удовлетворяет условиям 1^0–3^0, при этом

$$\alpha = (1/2, 1/2, 1/2), \quad \mathbf{t} = (1/2, 1/2, 1/2, 1), \quad \mathbf{s} = (-1/2, -1/2, -1/2, 0).$$

Пример 2. Стационарный оператор Навье — Стокса:

$$\ell_2(D_x) = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 & 0 & D_{x_1} \\ 0 & -\Delta & 0 & D_{x_2} \\ 0 & 0 & -\Delta & D_{x_3} \\ D_{x_1} & D_{x_2} & D_{x_3} & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{2.2}$$

Он также удовлетворяет условиям 1^0–3^0, при этом

$$\alpha = (1/2, 1/2, 1/2), \quad \mathbf{t} = (1, 1, 1, 1/2), \quad \mathbf{s} = (0, 0, 0, -1/2).$$

По аналогии с [2] установим свойства изоморфизма квазиэллиптических операторов (1.1), используя специальные весовые соболевские пространства, введенные в [13]:

$$W^{\mathbf{k}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n), \quad \mathbf{k}/\alpha = (k/\alpha_1, \dots,\ k/\alpha_n),\ k/\alpha_i \in \mathbb{N},\ 1 < p < \infty,\ \sigma \geq 0.$$

Определение. Будем говорить, что локально суммируемая функция $u(x)$ *принадлежит весовому соболевскому пространству* $W^{\mathbf{k}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, если $u(x)$ имеет обобщенные производные $D^\beta_x u(x)$ в $\mathbb{R}^n$, $\beta\alpha \leq k$ и

$$\big\|(1 + \langle x\rangle)^{-\sigma(k-\beta\alpha)} D^\beta_x u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\big\| < \infty, \quad \langle x\rangle^2 = \sum_{i=1}^n x_i^{2/\alpha_i}.$$

Норма в пространстве $W^{\mathbf{k}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ определяется следующим образом:

$$\big\|u(x), W^{\mathbf{k}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\big\| = \sum_{0\leq\beta\alpha\leq k} \big\|(1 + \langle x\rangle)^{-\sigma(k-\beta\alpha)} D^\beta_x u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\big\|. \tag{2.3}$$

Будем рассматривать общий случай, когда компоненты k/α_i вектора гладкости могут быть различными. Отметим, что в изотропном случае, когда $k/\alpha_1 = \ldots = k/\alpha_n = \bar{l}$, норма (2.3) эквивалентна следующей:

$$\sum_{0\leq|\beta|\leq\bar{l}} \big\|(1 + |x|)^{-\sigma(\bar{l}-|\beta|)} D^\beta_x u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\big\|.$$

Напомним, что множество функций из $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ всюду плотно в $W^{\mathbf{k}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ при $\sigma \leq 1$ (см. [13]).

Введем весовые соболевские пространства $\mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ для вектор-функций, где параметры гладкости определяются векторами

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_\nu), \quad \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_\nu)$$

из условия 2^0.

Будем говорить, что вектор-функция $U(x) = (U^1(x), \dots, U^\nu(x))^T$ *принадлежит пространству*

$$\mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n) = \prod_{r=1}^\nu W^{\mathbf{t_r}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n), \quad \mathbf{t_r}/\alpha = (t_r/\alpha_1, \dots, t_r/\alpha_n),\ 1 < p < \infty,\ \sigma \geq 0,$$

если каждая ее компонента $U^r(x)$ принадлежит $W^{\mathbf{t_r}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, и будем писать

$$\big\|U(x), \mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\big\| = \sum_{r=1}^\nu \big\|U^r(x), W^{\mathbf{t_r}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\big\|.$$

Аналогично будем говорить, что вектор-функция $F(x) = (F^1(x), \dots, F^\nu(x))^T$ *принадлежит пространству*

$$\mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n) = \prod_{j=1}^\nu W^{|\mathbf{s_j}|/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n), \quad |\mathbf{s_j}|/\alpha = (|s_j|/\alpha_1, \dots, |s_j|/\alpha_n),\ 1 < p < \infty,\ \sigma \geq 0,$$

если каждая ее компонента $F^j(x)$ принадлежит $W^{|\mathbf{s_j}|/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, при этом в случае $s_j = 0$ полагаем, что пространство $W^{|\mathbf{s_j}|/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с $L_p(\mathbb{R}^n)$. По определению будем писать

$$\big\|F(x), \mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\big\| = \sum_{j=1}^{\nu} \big\|F^j(x), W^{|\mathbf{s_j}|/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\big\|.$$

Введем следующие обозначения:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad t_{\max} = \max\{t_1, \dots, t_\nu\}.$$

Сформулируем теорему об изоморфизме.

Теорема 1. *Пусть* $|\alpha|/p > t_{\max}$, *тогда оператор*

$$\mathscr{L}(D_x) : \mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n), \quad p > 1,\ \sigma = 1,$$

устанавливает изоморфизм.

В качестве следствий из теоремы 1 сформулируем утверждения о свойствах изоморфизма дифференциальных операторов

$$\ell_j(D_x) : \mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^3), \quad j = 1, 2,$$

рассмотренных в примерах 1, 2.

Следствие 1. *Оператор* (2.1) *устанавливает изоморфизм*

$$\ell_1(D_x) : \prod_1^3 W^1_{p,1}(\mathbb{R}^3) \times W^2_{p,1}(\mathbb{R}^3) \to \prod_1^3 W^1_{p,1}(\mathbb{R}^3) \times L_p(\mathbb{R}^3)$$

при $1 < p < 3/2$.

Следствие 2. *Оператор Навье — Стокса* (2.2) *устанавливает изоморфизм*

$$\ell_2(D_x) : \prod_1^3 W^2_{p,1}(\mathbb{R}^3) \times W^1_{p,1}(\mathbb{R}^3) \to \prod_1^3 L_p(\mathbb{R}^3) \times W^1_{p,1}(\mathbb{R}^3)$$

при $1 < p < 3/2$.

По аналогии с [2] приведем пример использования теоремы 1 для изучения разрешимости задачи Коши для системы уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по времени:

$$\begin{gathered} \mathscr{L}(D_x) D_t^m U + \sum_{k=0}^{m-1} \mathscr{L}_{m-k}(D_x) D_t^k U = F(t,x), \\ D_t^k U|_{t=0} = \varphi_{k+1}(x), \quad k = 0, \dots, m-1. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Уравнения такого вида называются *уравнениями соболевского типа*, поскольку именно работы С. Л. Соболева (см. [14, Т. I]) послужили началом систематического изучения таких уравнений.

Будем предполагать, что матричные $\nu \times \nu$-дифференциальные операторы $\mathscr{L}_k(D_x)$, $k = 1, \dots, m$, имеют постоянные коэффициенты и удовлетворяют условию 2^0, т. е. их символы $\mathscr{L}_k(i\xi) = \big(l^k_{j,r}(i\xi)\big)$ так же, как и символ оператора $\mathscr{L}(D_x)$, квазиоднородные.

Сформулируем теорему о безусловной разрешимости задачи Коши (2.4), для простоты предполагая, что начальные условия нулевые.

Теорема 2. *Пусть* $|\alpha|/p > t_{\max}$, $\varphi_k(x) \equiv 0$, $k = 1, \dots, m$. *Тогда для любой вектор-функции* $F(t,x) \in C\big([0,T]; \mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big)$ *задача* (2.4) *имеет единственное решение* $U(t,x) \in C^m\big([0,T]; \mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big)$ *и справедлива оценка*

$$\big\|U(t,x), C^m\big([0,T]; \mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big)\big\| \le c(T)\big\|F(t,x), C\big([0,T]; \mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big)\big\|$$

с константой $c(T)$, *не зависящей от* $F(t,x)$.

§ 3. Доказательство основных результатов

При доказательстве теоремы 1 будем следовать схеме из [3, 4, 6]. Поэтому кратко укажем схему доказательства и остановимся на существенных отличиях.

Вначале покажем, что квазиэллиптический оператор $\mathscr{L}(D_x)$ отображает пространство $\mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ и ограничен.

Пусть $U(x) \in \mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$. Тогда j-ю компоненту вектор-функции $\mathscr{L}(D_x)U(x)$ можно записать в виде

$$(\mathscr{L}(D_x)U(x))_j = \sum_{r=1}^{\nu} l_{j,r}(D_x)U^r(x).$$

В силу условия 2^0 символ оператора $l_{j,r}(D_x)$ однороден относительно вектора α с показателем однородности $s_j + t_r$, т. е.

$$l_{j,r}(c^\alpha i\xi) = c^{s_j+t_r} l_{j,r}(i\xi), \quad c > 0.$$

Поэтому оператор $l_{j,r}(D_x)$ представим в виде

$$l_{j,r}(D_x) = \sum_{\beta\alpha = s_j+t_r} a_{j,r,\beta} D_x^\beta.$$

Отсюда в силу определения нормы в пространстве $W^{\mathbf{k}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ получаем, что

$$l_{j,r}(D_x)U^r(x) \in W^{|\mathbf{s_j}|/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому $\mathscr{L}(D_x)U(x) \in \mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, а поскольку коэффициенты $a_{j,r,\beta}$ постоянные, имеем также неравенство

$$\big\|\mathscr{L}(D_x)U(x), \mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big\| \le c\big\|U(x), \mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big\|,$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от $U(x)$.

Следовательно, для доказательства теоремы 1 нужно установить, что при $|\alpha|/p > t_{\max}$ система дифференциальных уравнений

$$\mathscr{L}(D_x)U(x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

имеет единственное решение $U(x) \in \mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ для любой правой части $F(x) \in \mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, при этом имеет место оценка

$$\big\|U(x), \mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big\| \le C\big\|F(x), \mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big\| \tag{3.2}$$

с константой $C > 0$, не зависящей от $F(x)$.

Отметим основные моменты доказательства разрешимости системы (3.1) и получения оценки (3.2).

Для доказательства разрешимости системы (3.1), как и в работе [2], будем использовать метод построения приближенных решений, подробно описанный в монографии [15]. Этот метод основан на использовании интегрального представления С. В. Успенского [16] для суммируемых функций (см. также [15, гл. 1]):

$$\varphi(x) = \lim_{h\to 0}(2\pi)^{-n}\int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left(i\frac{x-y}{v^\alpha}\xi\right)G(\xi)\varphi(y)\,d\xi dy dv, \tag{3.3}$$

где

$$G(\xi) = 2m\langle\xi\rangle^{2m}\exp(-\langle\xi\rangle^{2m}), \quad \langle\xi\rangle^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^{2/\alpha_i}, \quad m, 1/\alpha_i \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Вначале пусть компоненты вектор-функции $F(x) \in \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{s}/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ имеют компактные носители. Рассмотрим семейство интегральных операторов $P_{k,h}$, $k = 1,\dots,\nu$, $0 < h < 1$, определенных следующим образом:

$$P_{k,h}F(x) = \sum_{r=1}^{\nu}(2\pi)^{-n} \times \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1+t_k+s_r}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left(i\frac{x-y}{v^\alpha}\xi\right)G(\xi)l^{k,r}(\xi)F^r(y)\,d\xi dy dv, \tag{3.5}$$

где $l^{k,r}(\xi)$ — элементы обратной матрицы $(\mathscr{L}(i\xi))^{-1}$. Будем предполагать, что число $m \in \mathbb{N}$ в (3.4) достаточно большое (см. доказательство леммы 4.2).

Как и в [2], из определения (3.5), условий $1^0 - 3^0$ и представления (3.3) следует, что вектор-функцию $U_h(x)$ с компонентами $U_h^k(x) = P_{k,h}F(x)$, $k = 1,\dots,\nu$, можно рассматривать в качестве приближенного решения системы (3.1). В дальнейшем вектор-функцию $U_h(x)$ будем записывать в следующем виде:

$$U_h(x) = P_hF(x) = (P_{1,h}F(x),\dots,P_{\nu,h}F(x))^T. \tag{3.6}$$

В следующем параграфе будет доказано, что при условии $|\alpha|/p > t_{\max}$ справедлива оценка

$$\big\|U_h(x), \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{t}/\alpha}(\mathbb{R}^n)\big\| \le C\big\|F(x), \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{s}/\alpha}(\mathbb{R}^n)\big\| \tag{3.7}$$

с константой $C > 0$, не зависящей от $F(x)$ и h, и имеет место сходимость

$$\big\|U_{h_1}(x) - U_{h_2}(x), \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{t}/\alpha}(\mathbb{R}^n)\big\| \to 0, \quad h_1, h_2 \to 0. \tag{3.8}$$

Отметим, что в случае $s_1 = \dots = s_\nu = 0$ оценка (3.7) и сходимость (3.8) установлены в [2], и это было ключевым моментом при доказательстве теоремы об изоморфизме. Точно такая же ситуация и в общем случае при $s_j \le 0$. Действительно, в силу полноты пространства $\mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{t}/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ из (3.7), (3.8) следует, что существует линейный непрерывный оператор

$$P : \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{s}/\alpha}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{t}/\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

определенный на финитных вектор-функциях $F(x)$ по формуле

$$PF(x) = \lim_{h\to 0} P_hF(x),$$

при этом вектор-функция $U(x) = PF(x) \in \mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ является решением системы (3.1). Как отмечалось, множество финитных вектор-функций всюду плотно в $\mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, поэтому оператор P можно единственным образом продолжить на все пространство $\mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ с сохранением нормы. Теперь по аналогии с [2], учитывая оценку (3.7) и используя теорему Банаха — Штейнгауза, получим существование решения $U(x) \in \mathbf{W}^{\mathbf{t}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ системы (3.1) для любой правой части $F(x) \in \mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, а также оценку (3.2).

Доказательство единственности решения в рассматриваемом пространстве проводится повторением соответствующих рассуждений из [6].

Следовательно, для полного доказательства теоремы 1 нужно получить оценку (3.7) и установить сходимость (3.8). Этот вопрос обсуждается в следующем параграфе.

Утверждение теоремы 2 является простым следствием теоремы об изоморфизме квазиэллиптического оператора (1.1) (см. [2]).

§ 4. Оценки приближенных решений системы (3.1)

Доказательство неравенства (3.7) и сходимости (3.8) разобьем на две леммы. Вначале проведем L_p-оценки старших производных компонент вектор-функции (3.6).

Лемма 4.1. *Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha = t_k$. Тогда имеет место оценка*

$$\left\| D^\beta_x U^k_h(x), L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \le C_\beta \left\| F(x), \mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \right\| \tag{4.1}$$

с константой $C_\beta > 0$, не зависящей от $F(x)$ и h, при этом

$$\left\| D^\beta_x U^k_{h_1}(x) - D^\beta_x U^k_{h_2}(x), L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \to 0, \quad h_1, h_2 \to 0. \tag{4.2}$$

Доказательство. Очевидно, оценку (4.1) достаточно провести для вектор-функции $F(x) \in \mathbf{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$. Из определения (3.5) имеем

$$D^\beta_x U^k_h(x) = \sum_{r=1}^{\nu} (2\pi)^{-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1+s_r} \\ \times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i \frac{x-y}{v^\alpha} \xi \right) G(\xi)(i\xi)^\beta l^{k,r}(\xi) F^r(y)\, d\xi dy dv.$$

Используя свойства преобразования Фурье, эту формулу можно переписать в виде

$$D^\beta_x U^k_h(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(i(x-y)s) G(sv^\alpha)\, ds \right) F_{k,\beta}(y)\, dy dv, \tag{4.3}$$

где

$$F_{k,\beta}(y) = \sum_{r=1}^{\nu} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(iy\xi)(i\xi)^\beta l^{k,r}(\xi) \widehat{F}^r(\xi)\, d\xi.$$

Мультииндекс β такой, что $\beta\alpha = t_k$, поэтому, учитывая условия $2^0, 3^0$, можно показать, что функции

$$\mu_{k,r,\beta}(\xi) = (i\xi)^\beta l^{k,r}(\xi) \langle \xi \rangle^{s_r}, \quad k, r = 1, \dots, \nu,$$

удовлетворяют условиям теоремы о мультипликаторах [17]. Тогда из этой теоремы вытекает неравенство

$$\|F_{k,\beta}(x), L_p(\mathbb{R}^n)\| \le c_\beta \big\|F(x), \mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big\|$$

с константой c_β, не зависящей от $F(x)$. Следовательно, используя свойства интегрального представления (3.3) (см. [15, гл. 1]), из (4.3) получаем оценку (4.1).

Доказательство (4.2) проводится аналогичным образом.

Лемма доказана.

Проведем теперь оценки производных

$$D^\beta_x U^k_h(x), \quad 0 \le \beta\alpha < t_k,\ k = 1, \dots, \nu,$$

в L_p-нормах с весами.

Лемма 4.2. *Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha < t_k$ и $|\alpha|/p > t_k$. Тогда имеет место неравенство*

$$\big\|\langle x\rangle^{-(t_k-\beta\alpha)} D^\beta_x U^k_h(x), L_p(\mathbb{R}^n)\big\| \le c\big\|F(x), \mathbf{W}^{\mathbf{s}/\alpha}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big\| \tag{4.4}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $F(x)$ и h, при этом

$$\big\|\langle x\rangle^{-(t_k-\beta\alpha)}\big(D^\beta_x U^k_{h_1}(x) - D^\beta_x U^k_{h_2}(x)\big), L_p(\mathbb{R}^n)\big\| \to 0, \quad h_1, h_2 \to 0. \tag{4.5}$$

Доказательство. Очевидно, оценку (4.4) достаточно провести для вектор-функции $F(x) \in \mathbf{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$. Учитывая определения (3.4), (3.5) и используя свойства преобразования Фурье, имеем

$$\begin{aligned} D^\beta_x U^k_h(x) &= \sum_{r=1}^{\nu}(2\pi)^{-n}\int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1+t_k+s_r-\beta\alpha} \\ &\quad\times \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\frac{x-y}{v^\alpha}\xi\right) G(\xi)(i\xi)^\beta l^{k,r}(\xi) F^r(y)\,d\xi dy dv \\ &= \sum_{r=1}^{\nu}(2\pi)^{-n/2}\int_h^{h^{-1}} v^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(ixs) G(sv^\alpha)(is)^\beta l^{k,r}(s)\widehat{F}^r(s)\,ds dv. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Введем следующие функции:

$$\mu^{k,r}_{\beta,j}(\xi) = (i\xi)^\beta l^{k,r}(\xi)\frac{(-i\xi_j)^{|s_r|/\alpha_j}}{\sum\limits_{l=1}^n \xi_l^{2|s_r|/\alpha_l}}, \quad k, r = 1, \dots, \nu,\ j = 1, \dots, n. \tag{4.7}$$

Тогда формулу (4.6) можно представить в виде

$$D^\beta_x U^k_h(x) = \sum_{r=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{n}(2\pi)^{-n/2}\int_h^{h^{-1}} v^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(ix\xi) G(\xi v^\alpha)\mu^{k,r}_{\beta,j}(\xi)\big(\widehat{D^{|s_r|/\alpha_j}_{y_j} F^r}\big)(\xi)\,d\xi dv.$$

Следовательно,

$$D^\beta_x U^k_h(x) = \sum_{r=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{K}^{k,r}_{\beta,j,h}(x-y) D^{|s_r|/\alpha_j}_{y_j} F^r(y)\,dy, \tag{4.8}$$

где

$$\mathscr{K}^{k,r}_{\beta,j,h}(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(ix\xi) G(\xi v^\alpha) \mu^{k,r}_{\beta,j}(\xi)\, d\xi dv. \qquad (4.9)$$

Из условий 2^0, 3^0 вытекает, что функции (4.7) однородны относительно вектора α с показателями однородности $(\beta\alpha - t_k)$, т. е.

$$\mu^{k,r}_{\beta,j}(c^\alpha \xi) = c^{\beta\alpha - t_k} \mu^{k,r}_{\beta,j}(\xi), \quad c > 0.$$

Поэтому при $t_k > \beta\alpha \geq 0$, учитывая определение (4.7), нетрудно видеть, что интегралы (4.9) удовлетворяют условиям леммы 3.3 из работы [3]. Из этой леммы следует, что существует число $m_0 \geq 1$ такое, что при любом $m \geq m_0$ в (3.4) для интегралов выполняется оценка

$$\langle x \rangle^{|\alpha| + \beta\alpha - t_k} \big| \mathscr{K}^{k,r}_{\beta,j,h}(x) \big| \leq c, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

с константой $c > 0$, не зависящей от h. Используя эту оценку и учитывая формулу (4.8), получим

$$\big\| \langle x \rangle^{-(t_k - \beta\alpha)} D^\beta_x U^k_h(x), L_p(\mathbb{R}^n) \big\|$$
$$\leq \sum_{r=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{c} \Bigg\| \langle x \rangle^{-(t_k - \beta\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle x - y \rangle^{-(|\alpha| + \beta\alpha - t_k)} \big| D^{|s_r|/\alpha_j}_{y_j} F^r(y) \big|\, dy, L_p(\mathbb{R}^n) \Bigg\|.$$

По условию $|\alpha|/p > t_k$, $t_k - \beta\alpha > 0$, поэтому $|\alpha| + \beta\alpha - t_k > 0$. Учитывая это, будем иметь

$$\big\| \langle x \rangle^{-(t_k - \beta\alpha)} D^\beta_x U^k_h(x), L_p(\mathbb{R}^n) \big\|$$
$$\leq \sum_{r=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{n} c_1 \Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} |x_i|^{(\beta\alpha - t_k)/|\alpha|} |x_i - y_i|^{(t_k - \beta\alpha)/|\alpha| - 1} \big| D^{|s_r|/\alpha_j}_{y_j} F^r(y) \big|\, dy, L_p(\mathbb{R}^n) \Bigg\|.$$

Следовательно, применяя неравенство Харди — Литтлвуда [18], получаем оценку (4.4).

Доказательство сходимости (4.5) проводится точно так же.

Лемма доказана.

Из лемм 4.1, 4.2 непосредственно вытекают оценка (3.7) и сходимость (3.8) для приближенного решения (3.6) системы (3.1). Это и требовалось установить для полного доказательства теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волевич Л. Р.* Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // Мат. сб. 1962. Т. 59, № 3. С. 3–52.
2. *Демиденко Г. В.* Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1064–1076.
3. *Демиденко Г. В.* Изоморфные свойства одного класса дифференциальных операторов и их приложения // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1036–1056.
4. *Демиденко Г. В.* Об одном классе матричных дифференциальных операторов // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 1. С. 103–118.
5. *Demidenko G. V.* Mapping properties of quasielliptic operators and applications // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equations. 2007. V. 1, N 1. P. 58–67.
6. *Демиденко Г. В.* О квазиэллиптических операторах в R_n // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1028–1037.

7. *Багиров Л. А., Кондратьев В. А.* Об эллиптических уравнениях в $\mathbb{R}^n$ // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 3. С. 498–504.
8. *Cantor M.* Some problems of global analysis on asymptotically simple manifolds // Compositio Math. 1979. V. 38, N 1. P. 3–35.
9. *McOwen R. C.* On elliptic operators in $\mathbb{R}^n$ // Commun. Partial Differ. Equations. 1980. V. 5, N 9. P. 913–933.
10. *Choquet-Bruhat Y., Christodoulou D.* Elliptic systems in $H_{s,\sigma}$ spaces on manifolds which are Euclidean at infinity // Acta Math. 1981. V. 146, N 1/2. P. 129–150.
11. *Lockhart R. B., McOwen R. C.* Elliptic differential operators on noncompact manifolds // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 1985. V. 12, N 3. P. 409–447.
12. *Hile G. N.* Fundamental solutions and mapping properties of semielliptic operators // Math. Nach. 2006. V. 279, N 13–14. P. 1538–1572.
13. *Демиденко Г. В.* О весовых соболевских пространствах и интегральных операторах, определяемых квазиэллиптическими уравнениями // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 4. С. 420–423.
14. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал "Гео" Изд-ва СО РАН. Т. I, 2003. Т. II, 2006.
15. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
16. *Успенский С. В.* О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1972. Т. 117. С. 292–299.
17. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1969. Т. 105. С. 89–167.
18. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

Статья поступила 3 июня 2009 г.

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru