Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 514.17

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ КЛАССА k–ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

В. П. Голубятников, В. Ю. Ровенский

Аннотация. Изучаются взаимосвязи некоторых классов тел в евклидовых пространствах. Вводятся и изучаются понятия круговых проекций в нормированных линейных пространствах и классы тел, связанных с семействами таких проекций. Изучение таких тел из более широких классов, чем классы k-выпуклых и k-обозримых тел, позволяет обобщить некоторые классические результаты геометрической томографии и найти их новые приложения.

Ключевые слова: k-выпуклое тело, k-обозримое тело, опорный шар, круговая проекция, видимая оболочка, геометрическая томография.

Юрию Григорьевичу Решетняку к 80-летию

Введение

Как обычно, *выпуклым телом* в евклидовом (вещественном, комплексном или в кватернионном) пространстве $\mathbb{E}^n$ будем называть компактное выпуклое множество K с непустой внутренностью $\mathrm{int}(K)$, замыкание которого совпадает с самим телом — $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(K)) = K$. Классические проблемы геометрической томографии связаны с реконструкцией тел $K \subset \mathbb{E}^n$ по проекционным данным, т. е. по информации об их ортогональных проекциях на $(n-k)$-мерные плоскости из некоторого семейства $\mathscr{P}_k$ таких плоскостей.

Выпуклые тела характеризуются тем, что их можно представлять в виде пересечения семейств полупространств. Аксиоматический подход к изучению понятия выпуклости состоит обычно в том, что в пространстве X выбирается семейство подпространств $\mathscr{B}$, называемых *базой выпуклости*. Множество $A \subset X$ называется *$\mathscr{B}$-выпуклым*, если оно представимо в виде пересечения некоторого набора множеств из $\mathscr{B}$.

С целью изучения поведения геодезических линий Ю. Г. Решетняк [1] рассматривал класс объектов, более широкий, чем класс выпуклых поверхностей, — δ-прикасаемые поверхности.

В работе [2] введено понятие *множеств с положительной достижимостью*, которое использовалось при изучении гладкости функций, описывающих множества, близкие к чебышевским. Подробный обзор этого направления, связанного также с интегральной геометрией, с формулами объемов трубок и т. п., приведен в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–8526.2006.1), программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1/3707) и стипендии Марии Складовской-Кюри (грант FP7–PEOPLE–2007–2–1–IEF, N 219696).

Следуя тем же идеям, мы ввели понятие ε-выпуклых тел, обобщающее понятие выпуклого тела, и рассмотрели ряд задач восстановления ε-выпуклых тел по проекционным данным специального вида (см. [4]). Вместо опорных полупространств мы использовали дополнения к шарам и к цилиндрам и ввели понятие круговой проекции на гиперплоскость с выколотой точкой.

Некоторые результаты, относящиеся к классу выпуклых тел, могут быть перенесены на более широкие классы k-выпуклых и k-обозримых тел (см. [5]), а также на видимые тела, изучение которых начато в [6] (см. также [7]). Определение k-выпуклого подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ введено в [8]. Для доказательства устойчивости решения задач геометрической томографии одним из авторов было введено понятие α-топорного тела K, для которого каждая точка $x \notin K$ содержится в некотором двугранном углу величины $\alpha \in (0, \pi]$, не пересекающимся с K (см. [9]). При $\alpha = \pi$ этот класс совпадает с классом выпуклых тел.

В настоящей работе мы расширяем классы k-выпуклых и k-обозримых тел в $\mathbb{E}^n$ и изучаем задачи восстановления тел из этих новых классов по их проекциям на $(n-k)$-мерные плоскости.

Основными проекционными данными, которые мы здесь рассматриваем, являются семейства $\mathscr{P}_k$ круговых проекций на $(n-k)$-мерные плоскости с выколотыми точками. С целью расширения сферы применения наших предыдущих результатов [4, 5, 10, 11], следуя общим конструкциям геометрических категорий, описанных в [12], мы изучаем классы $\mathscr{C}$-выпуклых $\mathscr{K}\mathscr{P}_i^k$, $\mathscr{K}_i^{k,\varepsilon}$ и $\mathscr{C}$-обозримых тел $\mathscr{V}\mathscr{P}_i^k$, $\mathscr{V}_i^{k,\varepsilon}$ $(i = 1, 2,\ \varepsilon > 0)$, более широкие, чем введенные нами в [4] классы ε-выпуклых или ε-обозримых тел.

В определениях этих классов тел при $i = 1$ рассматриваются граничные точки тел и при $i = 2$ — точки, не лежащие в этих телах.

В работе установлены строгие включения между этими классами. Отметим, что классы $\mathscr{K}_2^k$, $\mathscr{K}\mathscr{P}_2^k$, $\mathscr{K}_2^{k,\varepsilon}$ замкнуты относительно пересечений тел, некоторые результаты для второго класса тел $(i = 2)$ могут быть распространены на более широкий первый класс.

Было бы интересно найти такие условия $\mathbf{C}$, что «*если* $U, V \subset \mathbb{E}^n$ *удовлетворяют условиям* $\mathbf{C}$ *и их круговые проекции из заданного семейства* $\mathscr{P}_k$ *совпадают, то* $U = V$». Намного сложнее более общий

Вопрос. *Каким условиям* $\mathbf{CT}$ *должны удовлетворять тела* $U, V \subset \mathbb{E}^n$ *и какими должны быть классы преобразований* $\mathbf{PT}$, $\mathbf{ST}$ *и семейства проекций* $\mathscr{P}_k$ *для того, чтобы имело место утверждение: «если* U, V *удовлетворяют условиям* $\mathbf{CT}$, *а их круговые проекции из семейства* $\mathscr{P}_k$ $\mathbf{PT}$*-эквивалентны, то* U *и* V $\mathbf{ST}$*-эквивалентны в объемлющем пространстве»?*

Для случая ортогональных проекций некоторые ответы на такой вопрос получены нами в [5, 10]. Изучение круговых проекций и обозримых тел позволяет расширить некоторые классические результаты теории выпуклых тел, описанные, например, в [5, 13], и найти их новые применения в геометрической томографии.

1. k-Выпуклые тела и видимые оболочки тел

Начиная с этого раздела в качестве объемлющих пространств будем рассматривать в основном вещественные евклидовы пространства $\mathbb{E}^n$. Пусть $P^k \subset$

$\mathbb{E}^n$ — k-мерная плоскость. Обозначим через

$$B(P^k, r) = \{x \in \mathbb{E}^n : \mathrm{dist}(x, P^k) \leq r\} \tag{1}$$

заполненный цилиндр радиуса $r > 0$ с осью P^k, т. е. прямое произведение $\mathbb{E}^k$ и шара $B^{n-k}(O, r) \subset \mathbb{E}^{n-k}$. При $k = 0$ условие (1) задает шар $B^n(C, r)$.

Определение 1. Пусть $L \subset \mathbb{E}^n$ — тело или k-мерная плоскость. Будем говорить, что L является *опорным* к телу K, если $L \cap \partial K \neq \varnothing$ и L не пересекается с $\mathrm{int}\, K$. В качестве опорных тел мы рассматриваем обычно шары или цилиндры.

Представим замкнутую полуплоскость $P^{k+1}_{\geq}$ в виде объединения $P^{k+1}_{>} \cup P^k$ открытой полуплоскости и граничной k-мерной плоскости. Полуплоскость $P^{k+1}_{\geq}$ будет называться *опорной* к телу K, если $P^k \cap \partial K \neq \varnothing$ и $P^{k+1}_{>} \cap B(P^k, r)$ не пересекается с $\mathrm{int}\, K$ при некотором $r > 0$, зависящем только от K. В этом случае, очевидно, плоскость P^k является опорной к K.

В дальнейшем для простоты будем полагать $r = \infty$.

Определение 2. Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ $(n > 2)$ будем называть *k-выпуклым класса* $\mathscr{K}^k_i$, если

($\mathscr{K}^k_1$) любая точка $x \in \partial K$ лежит на границе полуплоскости $P^{k+1}_{\geq}$ опорной к K;

($\mathscr{K}^k_2$) любая точка $x \notin K$ принадлежит границе полуплоскости $P^{k+1}_{\geq}$, не пересекающейся с K.

Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ будет называться *k-обозримым класса* $\mathscr{V}^k_i$, если

($\mathscr{V}^k_1$) любая опорная к K плоскость Q^{k-m} лежит на границе опорной к K полуплоскости $P^{k+1}_{\geq}$;

($\mathscr{V}^k_2$) любая плоскость Q^{k-m}, не пересекающаяся с K, принадлежит границе полуплоскости $P^{k+1}_{\geq}$, не пересекающейся с K.

Здесь $0 < m \leq k < n$ и 0-мерная плоскость — это точка.

Связная компонента границы k-выпуклого (или k-обозримого) тела K называется *k-выпуклой* (или *k-обозримой*) *гиперповерхностью* соответствующего класса из вышеперечисленного списка. Аналогично будем называть и компоненты границ тел, принадлежащих другим рассматриваемым нами классам.

Замечание 1. (a) П-образное невыпуклое тело в $\mathbb{E}^3$ принадлежит классу $\mathscr{K}^k_1$.

(b) Связное тело класса $\mathscr{K}^{n-1}_1$ выпукло.

Утверждение 1. *Условия $\mathscr{K}^k_i$ $(i = 1, 2)$ означают, что*

$(i = 1)$ для любой точки $x \in \partial K$, $K \in \mathscr{K}^k_1$, существует такая плоскость P^{n-k}, что $f(x)$ является вершиной опорного к $f(K)$ луча. Здесь $f : \mathbb{E}^n \to P^{n-k}$ — ортогональная проекция.

$(i = 2)$ для любой точки $x \notin K$, $K \in \mathscr{K}^k_2$, существует такая плоскость P^{n-k}, что ортогональная проекция $f(x)$ на эту плоскость является вершиной луча, не пересекающегося с $f(K)$.

Условия $\mathscr{V}^k_i$ $(i = 1, 2)$ означают, что

$(i = 1)$ для любой опорной к K плоскости Q^{k-m}, $K \in \mathscr{V}^k_1$, существует такая плоскость P^{n-k}, что $Q^{k-m} \subset (P^{n-k})^{\perp}$ и ортогональная проекция $f(Q^{k-m})$ на P^{n-k} (это точка) является вершиной луча, опорного к $f(K)$.

$(i = 2)$ для любой не пересекающейся с K плоскости Q^{k-m}, $K \in \mathscr{V}^k_2$, существует такая плоскость P^{n-k}, что $Q^{k-m} \subset (P^{n-k})^{\perp}$ и ортогональная проекция

$f(Q^{k-m})$ на P^{n-k} (это точка) является вершиной луча, не пересекающегося с $f(K)$.

Доказательства непосредственно следуют из определений.

Замечание 2. Классы k-выпуклых и k-обозримых тел можно определить и для любого непустого семейства ортогональных проекций на $(n-k)$-мерные плоскости.

Класс $\mathscr{V}_2^k$ замкнут относительно пересечения тел в $\mathbb{E}^n$ при $k=1$ (см. [5]). При $k>1$ это неверно. Нетрудно проверить, что $\mathscr{V}_i^1 = \mathscr{K}_i^1$ $(i=1,2)$. Отметим, что утверждение 1 $(i=1)$ не выполняется, если заменить определение классов $\mathscr{K}_1^k$, $\mathscr{V}_1^k$ более слабыми:

$(\mathscr{K}_{1-}^k)$ любая точка $x\in\partial K$ принадлежит опорной к телу K k-мерной плоскости P^k.

$(\mathscr{V}_{1-}^k)$ любая опорная к K плоскость Q^{k-m} содержится в плоскости P^k, которая также является опорной к K.

Аналогичным образом можно определить и классы $\mathscr{K}_{2-}^k$, $\mathscr{V}_{2-}^k$.

Некоторые результаты данного раздела могут быть установлены и для этих классов тел, соответствующих $i=1-$, $i=2-$.

Пример 1. (a) Объединение черных клеток на шахматной доске и его n-мерные аналоги представляют негомеоморфные шару примеры тел для классов $\mathscr{K}_{1-}^{n-1}\setminus\mathscr{K}_1^{n-1}$ и $\mathscr{V}_{1-}^{n-1}\setminus\mathscr{V}_1^{n-1}$. Соответствующие примеры, гомеоморфные шарам, будут описаны ниже.

(b) Рассмотрим гомеоморфное шару тело K в $\mathbb{E}^3$, заключенное между двумя геликоидами M_1 и M_0, где $M_h: [u\cos v, u\sin v, v+h]$ и $0\le v\le 2\pi, 0\le u\le 1$. Проекция тела K на плоскость xy — единичный диск. Свойство $(\mathscr{K}_{1-}^k)$ для $k=1$ выполняется, но проекция оси z, которая является опорной к телу K, на плоскость xy является внутренней точкой того диска (его центром), поэтому $K\notin\mathscr{K}_1^k$.

Следующее утверждение получено в [5] для более узкого класса тел $\mathscr{V}_2^k$.

Лемма 1. (a) *Связное тело $K\in\mathscr{V}_1^{n-1}$ в $\mathbb{E}^n$ выпукло.*

(b) *Проекция тела $K\in\mathscr{V}_1^k$ в $\mathbb{E}^n$ на любую гиперплоскость принадлежит классу $\mathscr{V}_1^{k-1}$. Соответствующая обозримость будет и у его проекций на плоскости меньших размерностей, в частности, проекция тела $K\in\mathscr{V}_1^{n-2}$ в $\mathbb{E}^n$ на любую трехмерную плоскость принадлежит классу $\mathscr{V}_1^1$.*

Доказательство. П. (a) леммы следует из того факта, что такое тело лежит по одну сторону относительно каждой своей опорной гиперплоскости.

(b) Пусть $K(\omega)$ — проекция тела K на гиперплоскость $P^{n-1}(\omega)$, перпендикулярную единичному вектору $\omega\in\mathbb{E}^n$, и $y\in\partial K(\omega)$. Все прообразы этой точки при таком проектировании лежат на границе тела K. Пусть $z\in\partial K$ — один из прообразов точки y. Прямая $l(yz)||\omega$ является опорной к K и по определению класса $\mathscr{V}_1^k$ лежит на границе $(k+1)$-мерной полуплоскости H^{k+1}, опорной к K. Проекция H^{k+1} на $P^{n-1}(\omega)$ будет k-мерной полуплоскостью, опорной к $K(\omega)$. $\square$

Теорема 1. *Имеют место включения $\mathscr{K}_2^k\subset\mathscr{K}_1^k$, $\mathscr{V}_2^k\subset\mathscr{V}_1^k$ и $\mathscr{V}_i^k\subset\mathscr{K}_i^k$ $(i=1,2)$.*

Доказательство. Докажем, что $\mathscr{K}_2^k\subset\mathscr{K}_1^k$. Пусть $K\in\mathscr{K}_2^k$ и $x_*\in\partial K$. Рассмотрим сходящуюся к x_* последовательность точек $x_i\notin K$. Для каждого i найдется такая k-мерная плоскость P_i^k, что она включает x_i и ограничивает

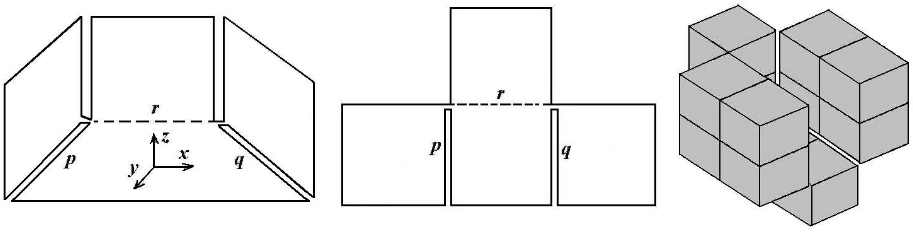

Рис. 1. Тело K класса $\mathscr{K}_1^k \setminus \mathscr{K}_2^k$, $k = 1$, его «развертка» и модель из 13 кубиков.

некоторое полупространство $P_{\geq,i}^{k+1}$, не пересекающееся с K. Пусть p_i — единичная внутренняя нормаль к P_i^k в $P_{\geq,i}^{k+1}$ в точке x_i. Выбрав подпоследовательность номеров i, можно считать, что $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = p_*$ и найдется такая плоскость $P_*^k = \lim\limits_{i\to\infty} P_i^k$, содержащая x_*. Тогда P_*^k ограничивает полупространство $P_{\geq,*}^{k+1}$ и единичная нормаль $p_* \perp P_*^k$ направлена внутрь $P_{\geq,*}^{k+1}$. Это предельное полупространство является опорным к K. Действительно, если $P_{\geq,*}^{k+1}$ содержит внутреннюю точку $y_0 \in \operatorname{int} K$, то найдется последовательность точек $z_i \notin K$, сходящаяся к y_0, что и доказывает требуемое включение.

Остальные включения доказываются аналогичным образом. Их строгость следует из приведенных ниже примеров. $\square$

Пример 2. (a) Построим $K \in \mathscr{K}_1^k \setminus \mathscr{K}_2^k$ при $k = 1, n = 3$. Рассмотрим гомеоморфную кругу фигуру D, состоящую из четырех квадратов с двумя разрезами вдоль отрезков p и q (рис. 1). Изогнем произведение $D \times [-c, c]$ (при малом c) на угол, чуть меньший 90°, вдоль отрезка r и на угол 90° вдоль линий p, q. Получаем тело $K \subset \mathbb{E}^3$, которое окружает с четырех направлений единичный куб. Очевидно, $K \in \mathscr{K}_1^1$, но свойство $\mathscr{K}_2^1$ не выполняется для точки $C(0, -1/4, 1/4) \notin K$, близкой к передней грани, содержащей отрезок r.

Цилиндр $K' = K \times [-a, a] \subset \mathbb{E}^4$ представляет пример тела $K' \in \mathscr{V}_1^k \setminus \mathscr{V}_2^k$ при $k = 2, n = 4$.

(b) Пример тела $K \in \mathscr{K}_2^k \setminus \mathscr{V}_2^k$ при $k = 2, n = 4$ (т. е. 2-выпуклого тела в $\mathbb{E}^4$, которое не является 2-обозримым) приведен в [5].

Следующий несложный результат получен нами на начальной стадии изучения сформулированного во введении вопроса.

Лемма 2 [5]. *Пусть $V_1, V_2 \in \mathscr{K}_2^k$ — компактные тела в $\mathbb{E}^n, n > 2,\ n - k > 1$ (вещественном, комплексном или кватернионном), и группа G состоит либо из всех параллельных переносов, либо из всех гомотетий или тривиальна. Если проекции тел V_1, V_2 на любую $(n-k)$-мерную плоскость P совмещаются преобразованиями группы G, то тела V_1, V_2 также совмещаются преобразованиями этой группы.*

Это утверждение неверно при $n - k = 1$ и нетривиальной группе G, поскольку различные тела одинаковой постоянной ширины имеют изометричные проекции на любую прямую.

Замечание 3. Пусть у тела $K \in \mathscr{K}_1^k$, $k > n/2$, в $\mathbb{E}^n$ граница $M = \partial K$ является C^2-регулярной гиперповерхностью с единичной внутренней нормалью ξ. По условию любая точка $x \in \partial K$ лежит в плоскости P_x^k, которая не пересекается с $\operatorname{int} K$. Значит, $P_x^k \subset TM_x$, и вторая фундаментальная форма гиперповерхности M неотрицательна на P_x^k, поэтому по крайней мере k собственных чисел симметричного оператора Вейнгартена A_ξ (т. е. главные кривизны гиперповерхности ∂K) неотрицательны. В этом случае для целочисленных групп гомологий этой поверхности выполняются соотношения $H_{n-1-k+s}(\partial K) = 0$ при $0 < s < 2k - n - 1$ (см. [14, лемма 16; 11, лемма 6(b)]).

Определение 3. Определяемая непустым семейством $\mathscr{P}_k$ ортогональных проекций на $(n-k)$-мерные плоскости *видимая оболочка* $\mathscr{P}_k\langle W\rangle$ множества W в $\mathbb{E}^n$ — это наибольшее множество V, для которого $f(V) \subseteq f(W)$ при всех $f \in \mathscr{P}_k$. Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ называется *видимым* относительно $\mathscr{P}_k$, если $\mathscr{P}_k\langle K\rangle = K$ [6].

Пусть f — ортогональная проекция на подпространство $P \subset \mathbb{E}^n$. Будем обозначать через $\mathscr{R}(f)$ ее образ P. Будем также обозначать через $\overline{\mathscr{P}}_k$ семейство ортогональных проекций на всевозможные $(n-k)$-мерные плоскости в $\mathbb{E}^n$.

Утверждение 2 [6]. *$\mathscr{P}_k\langle K\rangle = K$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin K$ существует такое $f \in \mathscr{P}_k$, что $x + \mathscr{R}(f)^\perp$ не пересекается с K.*

Видимые оболочки тел в $\mathbb{E}^3$ для конечных семейств $\mathscr{P}_k$ изучаются в вычислительной геометрии и в машинном (компьютерном) зрении (см. [7, 15] и т. п.) при восстановлении трехмерных объектов по их двумерным образам (фотографиям, рентгеновским снимкам и др.).

Утверждение 3. *$K \in \mathscr{K}_2^k$ тогда и только тогда когда $\overline{\mathscr{P}}_{n-k}\langle K\rangle = K$.*

Доказательство. 1. Предположим, что $x \in \overline{\mathscr{P}}_{n-k}\langle K\rangle \setminus K$. По определению класса $\mathscr{K}_2^k$ через точку x проходит k-мерная плоскость P^k, не пересекающаяся с K, значит, проекция тела K на $(n-k)$-мерную плоскость $(P^k)^\perp$ не содержит проекции точки x, поэтому $x \notin \overline{\mathscr{P}}_{n-k}\langle K\rangle$.

2. Доказательство обратного утверждения столь же несложно (см. доказательство утверждения 4). $\square$

2. Круговые проекции и выпуклость

Расширим классы k-выпуклых тел в $\mathbb{E}^n$, используя вместо k-мерных плоскостей k-мерные сферы радиуса $1/\varepsilon$ при некотором фиксированном $\varepsilon > 0$ и круговые проекции вместо обычных ортогональных проекций.

2.1. Круговые проекции. $(n-k)$-Мерная плоскость $P(C)$, содержащая точку $C \in \mathbb{E}^n$, будет называться *$(n-k)$-мерной плоскостью с выколотой точкой.* Обозначим через $P^\perp(C)$ k-мерную плоскость с выколотой точкой C, ортогональную к $P(C)$. Пусть $S^{n-1}(C, r)$ — сфера радиуса $r > 0$ с центром в C и $S^{n-k-1}(P(C), r) = S^{n-1}(C, r) \cap P(C)$ — сфера того же радиуса с тем же центром. Такие сферы будем называть *большими.* Для каждой точки $x \notin P^\perp(C)$ обозначим через $S^\perp(P(C), x)$ проходящую через x большую k-мерную сферу в сфере $S^{n-1}(C, |Cx|)$, ортогональную к большой сфере $S^{n-k-1}(P(C), |Cx|)$.

Определение 4. Пусть $P(C)$ — $(n-k)$-мерная плоскость с выколотой точкой. Определим *круговую проекцию* $f_{P(C)} : \mathbb{E}^n \setminus P^\perp(C) \to P(C) \setminus C$ следующим образом: для каждой точки $x \notin P^\perp(C)$ пусть $f_{P(C)}(x)$ — ближайшая к x точка сферы $S^{n-k-1}(P(C), |Cx|) \subset P(C)$.

Круговую проекцию можно описать явно с помощью формулы. Пусть $C = O$, $\omega = \mathrm{pr}_{P^\perp(C)}(x)/\|\mathrm{pr}_{P^\perp(C)}(x)\|$ и $x \notin P^\perp(O)$. Тогда

$$f_{P(O)}(x) = \frac{\|x\|}{\sqrt{x^2 - (\omega, x)^2}}[x - (\omega, x)\omega]. \tag{2}$$

Круговая проекция шара может оказаться невыпуклым телом (см. [4]).

Круговая проекция на прямую с выколотой точкой имеет «более простую природу», чем ее многомерные аналоги, поскольку круговые проекции на разные прямые, содержащие точку C, в понятном смысле подобны. В связи с этим можно также определить положительную круговую проекцию $|f_C| : E^n \to \mathbb{R}^1_+$, полагая $|f_C|(x) := |Cx|$.

В вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ точки $f_{P(C)}(x)$ и x лежат в одном полупространстве относительно гиперплоскости $P^\perp(C)$. В комплексном или в кватернионном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ пересечение $P^a(C) \cap S^{an-1}(C, |Cx|)$ $(a = 2, 4)$ — $(a-1)$-мерная сфера и $f_{P(C)}(x)$ — это ближайшая к x точка этой сферы.

Замечание 4. С целью некоторого обобщения понятия круговой проекции рассмотрим расслоение $\pi_0 : \mathbb{E}^n \setminus (0 \times \mathbb{E}^k) \to \mathbb{E}^{n-k} \setminus \{0\}$, в котором слои $S_0(x) = \pi^{-1}(x)$ являются k-мерными поверхностями, в частном случае такое расслоение имеет эллипсоидальные слои.

Пусть $g : [-a, b] \to \mathbb{R}_+$, $0 < a, b \le \infty$, – гладкая выпуклая функция такая, что $g(0) = 1, g'(0) = 0$, у которой кривизна удовлетворяет условию $k \le 1$. Обозначим через γ_R кривую $x = Rg(y/R)$, которая либо содержится во внутренности вещественной полуплоскости $\mathbb{E}^2_+$, либо трансверсально пересекается с его краем.

Пусть при некотором k имеет место такое разложение $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^{n-k} \times \mathbb{E}^k$, что $\mathbb{E}^2_+$ ортогонально обоим множителям (например, ось x лежит в $\mathbb{E}^{n-k}$, а ось y — в $\mathbb{E}^k$). Группа $SO(n)$ содержит подгруппу G, изоморфную $SO(n-k) \times SO(k)$, и действует на $\mathbb{E}^n$ блочным образом: $G_1 = SO(n-k)$ и $G_2 = SO(k)$. Это действие порождает G-инвариантную гиперповерхность $M^{n-1}_{O,R} = G(\gamma_R) \subset \mathbb{E}^n$ (обозначаемую для краткости через M^{n-1}_R), будем называть ее *гиперповерхностью вращения с образующей* γ_R. Каждая такая поверхность M^{n-1}_R пересекается с $\mathbb{E}^{n-k} \times \{0\}$ по сфере $G_1(\gamma_R(0)) = S^{n-k-1}(R)$ радиуса R, т. е. по G_1-орбите точки $\gamma_R(0)$. Действие подгруппы G_2 определяет расслоение $\pi_0 : \mathbb{E}^n \setminus (0 \times \mathbb{E}^k) \to \mathbb{E}^{n-k} \setminus \{0\}$, в котором слоями являются k-мерные поверхности $S_0 = G_2(\gamma_R)$, и M^{n-1}_R представимо в виде объединения таких поверхностей.

Например, если $g(y) = \sqrt{1-y^2}$, то γ_R является полуокружностью, а M^{n-1}_R — сферой радиуса R. $G_1(\gamma_R)$ является большой k-мерной сферой, ортогональной к $(n-k)$-мерной сфере $M^{n-1}_R \cap \mathbb{E}^{n-k}$. Аналогичным образом функция $g(y) = A\sqrt{1-(y/B)^2}$ порождает эллипсоиды.

Определение 5. Для $(n-k)$-мерной плоскости $P(C)$ с выколотой точкой рассмотрим изометрическое преобразование $T : \mathbb{E}^n \setminus P^\perp(C) \to \mathbb{E}^n \setminus \mathbb{E}^k$. Пусть функция $g : [-a, b] \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет приведенным выше условиям, тогда $\pi_C := T^{-1} \circ \pi_0 \circ T : \mathbb{E}^n \setminus P^\perp(C) \to P(C) \setminus C$ является расслоением на k-мерные поверхности. Обозначим через $M^k(P(C), x)$ слой, проходящий через какую-либо точку $x \notin P^\perp(C)$.

Для любой такой точки обозначим через $f_{P(C)}(x)$ ближайшую к x точку сферы $S(P(C), g, x) := S(C, R(x)) \cap P(C)$. Здесь $M^{n-1}_{C,R(x)}$ — гиперповерхность, содержащая x и построенная так же, как и $M^{n-1}_{O,R}$ при $R = R(x) = |Cx|$. Назовем $f_{P(C)} : \mathbb{E}^n \setminus P^\perp(C) \to P(C) \setminus C$ *g-нелинейной проекцией* на плоскость $P(C)$ и обозначим через $S^\perp(P(C), x)$ проходящий через точку x k-мерный «меридиан» в $M^{n-1}_{C,R(x)}$ (перпендикулярный к $S(P(C), g, x)$).

Результаты и определения этого раздела (начиная с определения 4) могут быть обобщены и на случай g-нелинейных проекций.

2.2. $\mathscr{C}$-выпуклые тела и их аналоги. Для начала расширим определения 1 и 3.

Определение 6. Шар $B^{k+1}(x,r) \subset \mathbb{E}^n$ с границей $S^k(x,r)$ будет называться *опорным* к телу $K \subset \mathbb{E}^n$, если $S^k(x,r) \cap \partial K \neq \varnothing$ и $B^{k+1}(x,r)$ не пересекается с $\operatorname{int} K$.

Определение 7. Пусть $\mathscr{P}_k$ — непустое семейство круговых проекций на $(n-k)$-мерные плоскости с выколотыми точками в $\mathbb{E}^n$. Будем называть подмножества A, B в $\mathbb{E}^n$ *$\mathscr{P}_k$-$\mathscr{C}$-эквивалентными* и обозначать это через $A \overset{\mathscr{P}_k}{\sim} B$, если $f(A) = f(B)$ при всех $f \in \mathscr{P}_k$. Для каждого подмножества A в $\mathbb{E}^n$ определим $\mathscr{P}_k\langle A\rangle$ как объединение всех подмножеств B, удовлетворяющих условию $B \overset{\mathscr{P}_k}{\sim} A$.

Определим *$\mathscr{C}$-видимую оболочку* $\mathscr{C}\mathscr{P}_k\langle W\rangle$ множества W в $\mathbb{E}^n$ как наибольшее множество $V \supseteq W$, для которого $f(V) = f(W)$ при всех $f \in \mathscr{P}_k$. Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ будем называть *$\mathscr{P}_k$-$\mathscr{C}$-видимым*, если $\mathscr{C}\mathscr{P}_k\langle K\rangle = K$.

Утверждение 4. *$\mathscr{C}\mathscr{P}_k\langle K\rangle = K$ тогда и только тогда, когда для любой точки $x \notin K$ найдется такая круговая проекция $f_{P(C)} \in \mathscr{P}_k$, что $S^{\perp}(P(C), x)$ не пересекается с K.*

Доказательство почти полностью повторяет доказательство утверждения 3.

1. Пусть $x \in \mathscr{C}\mathscr{P}_k\langle K\rangle \setminus K$. Это означает, что для всех круговых проекций $f_{P(C)} \in \mathscr{P}_k$ проекция этой точки $f_{P(C)}(x)$ лежит в $f_{P(C)}(K)$, но тогда соответствующие окружности $S^{\perp}(P(C), x)$ будут пересекаться с K.

2. Пусть для любой точки $x \notin K$ найдется такая круговая проекция $f_{P(C)} \in \mathscr{P}_k$, что $S^{\perp}(P(C), x)$ не пересекается с K. Это означает, что $f_{P(C)} \notin \mathscr{P}_k$, и тем самым никакая точка вне K не может содержаться в $\mathscr{C}\mathscr{P}_k\langle K\rangle$. $\square$

Для дальнейшего изучения сформулированного во введении вопроса расширим определение 2.

Определение 8. Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ называется *$\mathscr{C}$-выпуклым* класса $\mathscr{K}_i^{k,\varepsilon}$ (для некоторых $\varepsilon > 0$, $0 \le k \le n-1$), если

($\mathscr{K}_1^{k,\varepsilon}$) для любой точки $x \in \partial K$ найдется такая круговая проекция $f_{P(C)} \in \mathscr{P}_{k,K,\varepsilon}$, что $x \in P(C)$, $|Cx| = 1/\varepsilon$ и $f_{P(C)}(x) \in \partial(f_{P(C)}(K))$,

($\mathscr{K}_2^{k,\varepsilon}$) для любой точки $x \notin K$, $\operatorname{dist}(x,K) \le 1/\varepsilon$, найдется такая $f_{P(C)} \in \mathscr{P}_{k,K,\varepsilon}$, что $x \in P(C)$, $|Cx| = 1/\varepsilon$ и $f_{P(C)}(x)$ не лежит в $f_{P(C)}(K)$.

Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ назовем *$\mathscr{C}$-обозримым* класса $\mathscr{V}_i^{k,\varepsilon}$, если

($\mathscr{V}_1^{k,\varepsilon}$) для любого опорного к K шара $\widetilde{B}^{k-m+1}(C, 1/\varepsilon)$ найдется такая $f_{P(C)} \in \mathscr{P}_{k,K,\varepsilon}$, что $\partial\widetilde{B} \perp S(P(C), 1/\varepsilon)$ и $f_{P(C)}(\widetilde{B})$ является опорным к $f_{P(C)}(K)$ телом,

($\mathscr{V}_2^{k,\varepsilon}$) для любой не пересекающейся с K сферой $\widetilde{S}^{k-m}(C, 1/\varepsilon)$, $\operatorname{dist}(C,K) \le 1/\varepsilon$, найдется такая $f_{P(C)} \in \mathscr{P}_{k,K,\varepsilon}$, что $\widetilde{S} \perp S(P(C), 1/\varepsilon)$ и $f_{P(C)}(\widetilde{S})$ также не пересекается с $f_{P(C)}(K)$.

Здесь, как и выше, $0 < m \le k < n$.

Подобным же образом можно определить классы $\mathscr{K}\mathscr{P}_{k,i}$ $\mathscr{C}$-выпуклых и $\mathscr{C}$-обозримых тел в $\mathbb{E}^n$ относительно любого семейства $\mathscr{P}_k$ (в частности, $\mathscr{P}_{L^k}$ и $\mathscr{P}_{k,M}$, см. ниже) круговых проекций на $(n-k)$-мерные плоскости с выколотыми точками.

Можно проверить, что пересечение связных тел класса $\mathscr{K}_2^{k,\varepsilon}$ будет также принадлежать этому классу. Такое пересечение может оказаться несвязным.

Рассмотрим теперь несколько полезных семейств $\mathscr{P}_k$.

Пример 3. Для любого множества $M \subset \mathbb{E}^n$ обозначим через $\mathscr{P}_{k,M}$ семейство круговых проекций на такие $(n-k)$-мерные плоскости $P(C)$ в $\mathbb{E}^n$ с выколотыми точками, что $C \in M$. Например, если тело K лежит в шаре $B(x,r)$, можно взять в качестве M сферу $S^{n-1}(x,r)$.

В дальнейшем будем рассматривать следующие случаи.

1. Для тела $K \subset \mathbb{E}^n$ обозначим через $\mathscr{P}_{k,K,\varepsilon}$ семейство всех круговых проекций на такие $(n-k)$-мерные плоскости $P(C)$ в $\mathbb{E}^n$ с выколотыми точками, что $P^\perp(C) \cap K = \varnothing$ и $\operatorname{dist}(C,K) \le 1/\varepsilon$.

Если здесь взять $M = \{C \in \mathbb{E}^n : \operatorname{dist}(C,K) \le 1/\varepsilon\}$, то получатся классы из определения 8.

2. Для k-мерной плоскости $L^k \subset \mathbb{E}^n$ обозначим через $\mathscr{P}_{L^k}$ семейство круговых проекций на такие $(n-k)$-мерные плоскости $P(C)$ в $\mathbb{E}^n$ с выколотыми точками, что $C \in L^k$ и $P(C) \perp L^k$.

Для $\mathscr{P}_k = \mathscr{P}_{L^k}$ в определении 8 получим четыре класса тел, которые будем обозначать через $\mathscr{K}\mathscr{P}_{k,i}(L^k)$ и $\mathscr{V}\mathscr{P}_{k,i}(L^k)$, $i = 1,2$.

Утверждение 5. *Условия $\mathscr{K}_i^{k,\varepsilon}$ $(i=1,2)$ эквивалентны следующим:*

$(i=1)$ $\mathscr{K}_1^{k,\varepsilon}$: каждая точка $x \in \partial K$ лежит в шаре $B^{k+1}(C,1/\varepsilon)$, опорном к K,

$(i=2)$ $\mathscr{K}_2^{k,\varepsilon}$: каждая точка $x \notin K$ лежит в сфере, ограничивающей шар $B^{k+1}(C,1/\varepsilon)$, не пересекающийся с K.

Условия $\mathscr{V}_i^{k,\varepsilon}$ $(i=1,2)$ эквивалентны следующим:

$(i=1)$ $\mathscr{V}_1^{k,\varepsilon}$: любой опорный к K шар $B^{k-m+1}(C,1/\varepsilon)$ лежит в шаре $B^{k+1}(C,1/\varepsilon)$, который также является опорным к K,

$(i=2)$ $\mathscr{V}_2^{k,\varepsilon}$: любая не пересекающаяся с K сфера $S^{k-m}(C,1/\varepsilon)$, для которой $\operatorname{dist}(C,K) \le 1/\varepsilon$, лежит в сфере, ограничивающей шар $B^{k+1}(C,1/\varepsilon)$, который также с K не пересекается.

Доказательство несложным образом следует из определений.

Замечание 5. Напомним, что мы ввели в [4] «$(n-1)$-мерную версию» $\mathscr{C}$-выпуклых объектов.

Тело K называется *ε-выпуклым класса $\mathscr{K}_i^\varepsilon$*, если

$(\mathscr{K}_1^\varepsilon)$ любая точка $x \in \partial K$ принадлежит опорному к K шару радиуса $1/\varepsilon$;

$(\mathscr{K}_2^\varepsilon)$ любая точка $x \notin K$ лежит в таком шаре B радиуса $1/\varepsilon$, что $\operatorname{int} K \cap B = \varnothing$.

Здесь только класс $\mathscr{K}_1^\varepsilon$ совпадает с $\mathscr{K}_1^{n-1,\varepsilon}$. Простые примеры показывают, что классы $\mathscr{K}_2^\varepsilon$ и $\mathscr{K}_2^{n-1,\varepsilon}$ различны.

Теорема 2. *Для всех $\varepsilon > 0$, $k < n$, $i = 1,2$ имеют место строгие включения $\mathscr{K}_2^{k,\varepsilon} \subset \mathscr{K}_1^{k,\varepsilon}$, $\mathscr{V}_2^{k,\varepsilon} \subset \mathscr{V}_1^{k,\varepsilon}$ и $\mathscr{V}_i^{k,\varepsilon} \subset \mathscr{K}_i^{k,\varepsilon}$.*

Доказательство. $\mathscr{K}_2^{k,\varepsilon} \subset \mathscr{K}_1^{k,\varepsilon}$. Пусть $x_* \in \partial K$, $K \in \mathscr{K}_2^{k,\varepsilon}$. Рассмотрим сходящуюся к x_* последовательность точек $x_i \notin K$. Для каждого i найдется сфера $S^k(C_i,1/\varepsilon)$, $\operatorname{dist}(C_i,K) \le 1/\varepsilon$, содержащая x_i и не пересекающаяся с K. Ограниченная последовательность $\{C_i\}$ имеет предельную точку C_*, при этом $\operatorname{dist}(C_*,K) \le 1/\varepsilon$ и $1/\varepsilon \ge \lim\limits_{i\to\infty} \rho(x_i,C_i) = \rho(x_*,C_*)$. Следовательно, $x_* \in S^k(C_*,1/\varepsilon)$, и эта сфера $S^k(C_*,1/\varepsilon)$ не пересекается с внутренностью K и задает требуемую круговую проекцию из класса $\mathscr{K}_1^{k,\varepsilon}$.

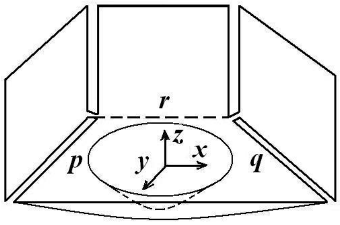

Рис. 2. Тело K класса $\mathscr{K}_1^{k,\varepsilon} \setminus \mathscr{K}_2^{k,\varepsilon}$ $(k=1)$.

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогичным образом. $\square$

Пример 4. Можно построить примеры тел $K \in \mathscr{K}_1^{k,\varepsilon} \setminus \mathscr{K}_2^{k,\varepsilon}$, применяя малые деформации примеров $K \in \mathscr{K}_1^{k} \setminus \mathscr{K}_2^{k}$ (рис. 2), где круговая область вблизи начала координат заменена сферической поверхностью радиуса $1/\varepsilon$ (см. рис. 2).

Следующее утверждение установлено в [4] для случая $k = n-1$.

Утверждение 6. *Если у связного тела $K \in \mathscr{K}_1^{k,\varepsilon}$ диаметр меньше $1/\varepsilon$, то граница ∂K этого тела также связна.*

Доказательство. Предположим, что тело K связно, а его граница несвязна, тогда одна из компонент границы, пусть $\partial_1 K$, отделяет K от «бесконечности» и является при этом границей некоторого тела L, $\operatorname{diam} L = \operatorname{diam} \partial K = \operatorname{diam} K$. Пусть $\partial_2 K \neq \partial_1 K$ — другая компонента границы K и $x_1 \in \partial_2 K$. Поскольку $K \in \mathscr{K}_1^{k,\varepsilon}$, то x_1 лежит и в L, и в некотором опорном к K шаре $B^{k+1}(C, 1/\varepsilon)$, $\operatorname{dist}(C, K) \leq 1/\varepsilon$. Значит, $B^{k+1}(C, 1/\varepsilon) \subset L$, и $\operatorname{diam} L \geq 1/\varepsilon$, что противоречит условиям. $\square$

Рассмотрим специальный случай определения 7.

Определение 9. Будем называть *ε-видимой оболочкой* $\mathscr{C}\mathscr{P}_{k,\varepsilon}\langle V\rangle$ множества V в определяемой семейством $\mathscr{P}_{k,V,\varepsilon}$ круговых проекций такое наибольшее множество $K \supseteq V$, что $f(K) = f(V)$ при всех $f \in \mathscr{P}_{k,V,\varepsilon}$. Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ будет называться *ε-видимым* (относительно $\mathscr{P}_{k,K,\varepsilon}$), если $\mathscr{C}\mathscr{P}_{k,\varepsilon}\langle K\rangle = K$.

Утверждение 7. *Если $\operatorname{diam} K < 1/\varepsilon$, то $K \in \mathscr{K}_2^{k,\varepsilon}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{C}\mathscr{P}_{k,\varepsilon}\langle K\rangle = K$.*

Доказательство. Из определения класса $\mathscr{K}_2^{k,\varepsilon}$ следует, что для любой точки $x \notin K$ существует такая круговая проекция $f_{P(C)} \in \mathscr{P}_{k,K,\varepsilon}$, что $|Cx| = 1/\varepsilon$ и $f_{P(C)}(x)$ не пересекается с $f_{P(C)}(K)$. Значит, любая точка вне K не может содержаться в его *ε-видимой оболочке.* $\square$

Замечание 6. Для «больших тел» ($\operatorname{diam} K > 1/\varepsilon$) это предложение неверно.

Пусть $K = B(0; 3/\varepsilon) \setminus B(0; 2/\varepsilon)$. Для любой точки $C \in B(0; 2/\varepsilon)$ и для любой плоскости $P(C)$ любой размерности ортогональное дополнение $P^{\perp}(C)$ пересекается с этим телом K, которое, очевидно, принадлежит классу $\mathscr{K}_2^{k,\varepsilon}$ при любом k, $1 < k < n$ (для «малых тел» это не так). Значит, для определения ε-видимой оболочки $\mathscr{C}\mathscr{P}_{k,\varepsilon}(K)$ следует выбирать центры шаров C вне «большого» шара $B(0; 3/\varepsilon)$, т. е. здесь мы имеем $\mathscr{C}\mathscr{P}_{k,\varepsilon}(K) = B(0; 3/\varepsilon)$.

2.3. Реконструкция $\mathscr{C}$-выпуклых тел по их круговым проекциям.

Теорема 3. *Если круговые проекции тел $V_1, V_2 \in \mathscr{K}_2^{n-1,\varepsilon}$ на любую прямую $P^1(C)$ с выколотой точкой совпадают и* $\operatorname{diam} V_1, \operatorname{diam} V_2 < 1/(2\varepsilon)$, *то $V_1 = V_2$. Здесь C — центр любого опорного к V_1 или V_2 шара радиуса $1/\varepsilon$.*

Доказательство. 1. Из условий следует, что если шар $B(C, 1/\varepsilon)$ является опорным к V_1, то он будет опорным и к V_2, и наоборот. Аналогично можно проверить, что для расстояния между V_1, V_2 в метрике Хаусдорфа выполняется соотношение $d(V_1, V_2) < 1/(2\varepsilon)$.

2. Отсюда следует, что $\operatorname{conv}(V_1) = \operatorname{conv}(V_2)$. Обозначим эту выпуклую оболочку через K, ее диаметр также меньше $1/(2\varepsilon)$, никакой центр опорного к V_1, V_2 шара радиуса $1/\varepsilon$ не может содержаться в K.

3. Предположим, что существует такое $y_2 \in V_2 \subset K$, что $y_2 \notin V_1$; можно считать, что $y_2 \in \operatorname{int} V_2$, $y_2 \in B(C(y_2), 1/\varepsilon) \equiv B_2$. Здесь $C(y_2)$ — центр круговой проекции, которая описывается в определении 8 класса $\mathscr{K}_2^{n-1,\varepsilon}$. Из этого же определения следует, что шар B_2 не может быть опорным к V_1 — в противном случае он должен бы быть опорным и к V_2. Таким образом, B_2 не пересекается с V_1.

4. Пусть $E(y_2)$ — экваториальная гиперплоскость шара B_2, ортогональная отрезку $[C(y_2), y_2]$. Поскольку тела V_1, V_2 имеют «малые» диаметры, эта гиперплоскость делит пространство $\mathbb{E}^n$ на полупространство $\mathscr{E}^+$, содержащее V_1 и V_2, и на полупространство $\mathscr{E}^-$, которое с ними не пересекается.

5. Будем сдвигать шар B_2 в направлении $\overrightarrow{y_2, C(y_2)}$ от тела K, обозначая результаты этого переноса через $B_2(t)$. Во время этого перемещения шары $B_2(t)$ будут содержаться в объединении $B_2 \cup \mathbb{E}^-$ и никогда не пересекутся с V_1. В некоторый момент t_1 шар $B_2(t_1)$ окажется опорным к V_2, но при этом тела V_1 он коснуться не сможет. Источник противоречия состоял в допущении из п. 3. Следовательно, $V_1 = V_2$. $\square$

Замечание 7. Для «больших» тел V_1, V_2, $\mathrm{diamV_1}, \operatorname{diam} V_2 > 1/\varepsilon$, и для положительной круговой проекции доказанная теорема неверна.

Пусть $V_1 \subset R^2$ — кольцо $1 + 2/\varepsilon \leq |x| \leq 3 + 2/\varepsilon$ и $V_2 = V_1 \cup B(0,1)$, где $B(0,1)$ — единичный шар с центром в начале координат. Все шары $B(Z, 1/\varepsilon)$ с центрами Z, $|Z| = 1 + 1/\varepsilon$ являются опорными и для V_1, и для V_2 (и для $B(0,1)$). Очевидно, что для всех Z выполняется тождество $|f_Z|(V_1) = |f_Z|(V_2)$.

Эта теорема также неверна для более широкого класса тел $\mathscr{K}_1^{n-1,\varepsilon}$, что показывают аналогичные примеры.

Утверждение 8. *Если $V_1 \subset \mathbb{E}^n \setminus L^k$ принадлежит классу $\mathscr{K}\mathscr{P}_{k,2}(L^k)$, $1 \leq k \leq n-1$, и V_2 получено из V_1 некоторым вращением $\mathbb{E}^n$ вокруг L^k* (т. е. *некоторым преобразованием из $SO(n-k)$), то для любого $C \in L^k$ круговые проекции $f_{P(C)}$ тел V_1 и V_2 на плоскости $P^{n-k}(C)$ конгруэнтны относительно некоторого вращения этой плоскости* (*или, иными словами, $SO(n-k)$-эквивалентны*).

Доказательство немедленно следует из того, что при любом $C \in L^k$ сфера $S^{n-1}(C, r)$ и разложение пространства $\mathbb{E}^n = L^k \oplus P^{n-k}(C)$ инвариантны относительно вращений из группы $SO(n-k)$.

Будем говорить, что тело $K \subset \mathbb{E}^n$ *окружает* плоскость P^{n-2}, если любая полуплоскость H^{n-1} с границей P^{n-2} пересекается с K.

Приведем пример ответа на сформулированный во введении вопрос.

Теорема 4. *Если* $V_1, V_2 \subset \mathbb{E}^n \setminus L^{n-2}$ *принадлежат классу* $\mathscr{K}\mathscr{P}_{n-2,2}(L^{n-2})$ *и не окружают плоскость* L^{n-2}, *а их круговые проекции на все плоскости* $P^2(C)$, $C \in L^{n-2}$, $P^2(C) \perp L^{n-2}$, $SO(2)$*-эквивалентны относительно центра* C, *то* V_1 *может быть получено из* V_2 *некоторым вращением вокруг* L^{n-2}.

Доказательство. Для наглядности изложения разобьем доказательство на два этапа — трехмерный и многомерный.

Случай $n-2=1$.

1. Фиксируем $C_0 \in L^1$ и повернем тело V_1 вокруг оси L^1 так, чтобы полученное тело V_1' и тело V_2 имели совпадающие круговые проекции на $P^2(C_0)$, т. е. $f_{C_0}(V_1') = f_{C_0}(V_2)$. Эти проекции содержатся в некотором углу $A_0C_0B_0$ в плоскости $P(C_0)$ и касаются сторон этого угла. Следовательно, тела V_1' и V_2 содержатся в двугранном углу $A_0C_0B_0$ с ребром L^1 и касаются граней этого угла.

2. Если при некотором $C_1 \in L^1$ круговые проекции $f_{C_1}(V_1')$ и $f_{C_1}(V_2)$ не совпадают и эквивалентны относительно вращения в плоскости $P(C_1)$ на некоторый угол $\phi(C_1)$, $0 < \phi(C_1) < 2\pi$, то $f_{C_1}(V_1')$ содержится в некотором плоском углу $A_1C_1B_1$ и касается его сторон, а круговая проекция $f_{C_1}(V_2)$ содержится в некотором равном ему углу $A_1'C_1B_1'$ и касается его сторон. Следовательно, тела V_1' и V_2 содержатся в двугранных углах $A_1C_1B_1$, $A_1'C_1B_1'$ соответственно. Эти углы имеют общее ребро L^1 и их грани касаются тел V_1' и V_2; противоречие с существованием двугранного угла $A_0C_0B_0$, построенного ранее.

Случай $n-2>1$.

3. Как и выше, фиксируем $C_0 \in L^{n-2}$ и повернем тело V_1 вокруг L^{n-2} так, чтобы полученное тело V_1' и тело V_2 имели совпадающие круговые проекции $f_{C_0}(V_1') = f_{C_0}(V_2)$ в $P^2(C_0)$.

4. Если при некотором $C_1 \in L^{n-2}$ круговые проекции $f_{C_1}(V_1')$ и $f_{C_1}(V_2)$ не совпадают, но эквивалентны относительно некоторого поворота $\varphi(C_1) \in SO(2)$ плоскости $P^2(C_1)$, то, поскольку тела V_1, V_2 не окружают плоскость L^{n-2}, их круговые проекции $V_1'(P^2(C_1)$ и $V_2(P^2(C_1)$, как и в трехмерном случае, содержатся в некоторых равных плоских углах $A_1C_1B_1$ и $A_1'C_1B_1'$ соответственно и касаются их сторон. Как и выше, тела V_1', V_2 содержатся в двугранных углах $A_1C_1B_1$ и $A_1'C_1B_1'$ с общим $(n-2)$-мерным «ребром» L^{n-2} и касаются их граней. Эти углы конгруэнтны относительно вращения на угол $\varphi(C_1)$ в плоскости $P^2(C_1)$. С другой стороны, пересечения этих граней с плоскостями $P^2(C_0)$ порождают в этой плоскости углы с общим центром C_0. Эти двугранные углы содержат круговые проекции $f_{C_0}(V_1') = f_{C_0}(V_2)$ и конгруэнтны относительно того же самого поворота на угол $\varphi(C_1)$, что противоречит предположению и нетривиальности этого угла. $\square$

Замечание 8. (a) В отличие от рассмотренного в [5] случая $SO(2)$-эквивалентных ортогональных проекций на всевозможные двумерные плоскости, где при дополнительном ограничении на отсутствие у этих проекций $SO(2)$-симметрий доказывалось, что тела V_1, V_2 эквивалентны друг другу либо относительно параллельного переноса, либо относительно центральной симметрии, в условии теоремы 4 такой асимметрии не предполагается, но при этом рассматриваются круговые проекции только на двумерные плоскости, перпендикулярные L^{n-2}, и центры всех вращений предполагаются лежащими на этой плоскости L^{n-2}.

(b) Аналогичным образом эта теорема может быть сформулирована для случаев комплексных и кватернионных евклидовых пространств и для преобразований из групп $U(n-k), SU(n-k)$ и $Sp(n-k)$; в [10] соответствующие результаты получены для случая ортогональных проекций на $(n-k)$-мерные плоскости комплексного евклидова пространства при произвольных k и при дополнительном условии отсутствия у этих проекций $U(n-k)$- или $SU(n-k)$-симметрий.

Авторы выражают искреннюю благодарность В. В. Пикалову за полезные обсуждения применений в физической и компьютерной томографии круговых проекций и других геометрических схем сканирования, а также анонимному рецензенту за советы и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Об одном обобщении выпуклых поверхностей // Мат. сб. 1956. Т. 40, № 3. С. 381–398.
2. *Federer H.* Curvature measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 93, N 3. P. 418–491.
3. *Thäle C.* 50 years sets with positive reach — A survey // Surv. Math. Appl. 2008. V. 3. P. 123–165.
4. *Golubyatnikov V. P., Rovenski V. Y.* Some extensions of the class of convex bodies. ArXive: 0808. 1788 V. 1 [math DG] 13 August 2008, 28 pages.
5. *Golubyatnikov V. P.* Uniqueness questions in reconstruction of multidimensional objects from tomography-type projection data. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2000.
6. *Meisters G. H. , Ulam S. M.* On visual hull of sets // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1967. V. 57. P. 1172–1174.
7. *Larman D. G., Mani P.* On visual hulls // Pacific J. Math. 1970. V. 32, N 1. P. 157–171.
8. *Шефель С. З.* О двух классах k-мерных поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 2. С. 459–466.
9. *Голубятников В. П.* Вопросы устойчивости в некоторых обратных задачах реконструкции выпуклых компактов по их проекциям // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 3. С. 50–57.
10. *Голубятников В. П.* Об однозначной восстановимости выпуклых компактов по их проекциям. Случай комплексных пространств // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 805–810.
11. *Rovenski V. Yu.* On (k, ε)-saddle submanifolds of Riemannian manifolds // Geom. Dedicata. 2006. V. 121. P. 187–203.
12. *Gromov M.* Spaces and questions // Geom. Funct. Anal. (GAFA). Special Volume. 2000. Part I. P. 118–161.
13. *Gardner R.* Geometric tomography. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.
14. *Борисенко А. А.* О внешне геометрических свойствах параболических поверхностей и топологические свойства седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один // Мат. сб. 1981. Т. 116, № 3. С. 440–457.
15. *Lazebnik S., Furukawa Y., Ponce J.* Projective visual hulls // Int. J. Comput. Vision. 2007. V. 74, N 2. P. 137–165.

Статья поступила 6 августа 2008 г.

Голубятников Владимир Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
glbtn@math.nsc.ru

Ровенский Владимир Юзефович
Department of Mathematics, University of Haifa,
Mount Carmel, Haifa, 31905, Israel
rovenski@math.haifa.ac.il