Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 515.12

C–ПРОСТРАНСТВА И СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

В. В. Федорчук

Аннотация. Для класса $\mathscr{G}$ симплициальных комплексов G вводится понятие $\mathscr{G}$-C-пространства. В определении C-пространства в покрытия u_i вписываются открытые дизъюнктные семейства v_i. Нервы таких семейств суть нульмерные комплексы. В нашем определении нерв семейства v_i должен вкладываться в комплекс G_i из класса $\mathscr{G}$. Дается полная характеризация бикомпактных $\mathscr{G}$-C-пространств.

Ключевые слова: C-пространство, симплициальный комплекс, нерв, разреженное пространство.

Введение. Свойство C для метрических пространств в 1973 г. ввел Хэйвер [1]. Топологическое определение C-пространств в 1978 г. предложили Аддис и Грешэм [2]. Напомним их определение.

Определение 1. Топологическое пространство X называется C-*пространством* (обозначение: $X \in C$), если для всякой последовательности (u_i), $i \in \mathbb{N}$, открытых покрытий X существует такая последовательность (v_i) дизъюнктных семейств открытых подмножеств X, что каждое v_i вписано в u_i и $\bigcup\{v_i : i \in \mathbb{N}\}$ является покрытием пространства X.

Для компактов определение Хэйвера совпадет с определением Аддиса и Грешэма. Всякое счетномерное метризуемое пространство является C-пространством, а всякое C-пространство слабо бесконечномерно.

Выяснилось, что C-пространства играют большую роль в различных разделах топологии. Хэйвер доказал [3], что всякое локально стягиваемое метрическое пространство, которое является объединением счетного числа компактов со свойством C, есть ANR-пространство. Ансел [4] показал, что клеточноподобное отображение компакта на C-компакт является наследственной шэйповой эквивалентностью. Отсюда вытекает равенство $\dim X = \dim_{\mathbb{Z}} X$ для всякого C-компакта X. В работах В. В. Успенского [5], Валова и Гутева [6] показано, что C-пространства играют важную роль в теории селекций многозначных отображений. В [7] введены и исследованы классы m-C-пространств, промежуточные между классом C-пространств и классом слабо бесконечномерных пространств. В настоящей работе с помощью симплициальных комплексов мы вводим и исследуем классы пространств, аналогичные классу C-пространств.

Нервы $N(v_i)$ дизъюнктных семейств v_i из определения 1 суть нульмерные симплициальные комплексы. Представляется естественным рассмотреть произвольный класс $\mathscr{G}$ симплициальных комплексов вместо класса нульмерных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00741) и гранта РНП 2.1.1.3704.

комплексов. Таким способом получаем определение $\mathscr{G}$-C-пространств (определение 2.4). Мы вводим также S-$\mathscr{G}$-C-пространства, m-$\mathscr{G}$-C-пространства и S-m-$\mathscr{G}$-C-пространства (определение 2.5). В п. 2 мы исследуем некоторые свойства этих классов пространств, в частности, показываем, что $X \in S$-m-$\mathscr{G}$-$C \iff \beta X \in m$-$\mathscr{G}$-C (теорема 2.3). Основным результатом работы является теорема 3.2, дающая полную характеризацию бикомпактных $\mathscr{G}$-C-пространств.

В п. 1 содержится вспомогательная информация. Дополнительную информацию можно найти в монографиях [8, 9].

1. Предварительные сведения. Все пространства предполагаются нормальными. Использованы стандартные обозначения. Например, $|A|$ обозначает мощность множества A, а $[A] \equiv [A]_X$ — замыкание множества $A \subset X$ в пространстве X. Через $\operatorname{cov}(X)$ мы обозначаем множество всех открытых покрытий пространства X. Множество всех конечных открытых покрытий X обозначается через $\operatorname{cov}_\infty(X)$, а $\operatorname{cov}_m(X)$ обозначает множество всех открытых покрытий X, состоящих из $\le m$ элементов.

Пусть u и v — семейства подмножеств множества X. Говорят, что v *комбинаторно вписано* в u, если существует такая инъекция $i : v \to u$, что $V \subset i(U)$ для каждого $V \in v$.

Симплициальные комплексы будем называть *комплексами.* Для комплекса G через $v(G)$ обозначается множество всех его вершин. Через $\operatorname{Fin} S$ обозначается множество всех непустых конечных подмножеств множества S. Как упомянуто во введении, $N(u)$ означает *нерв* семейства u множеств.

Порядком семейства u множеств называется такое наибольшее n, что u содержит n множеств с непустым пересечением. Если такого целого n не существует, говорят, что u *имеет порядок* ∞. Порядок семейства u обозначается через $\operatorname{ord} u$. Ясно, что

$$\operatorname{ord} u \le n \iff \dim N(u) \le n-1; \tag{1.1}$$

$$\operatorname{ord} u \le 1 \iff u \text{ — дизъюнктное семейство.} \tag{1.2}$$

Предложение 1.1. *Если $u \in \operatorname{cov}_\infty(X)$ и $\operatorname{ord} u = n$, то существуют такие семейства v_i, $i = 1, \dots, n$, состоящие из открытых подмножеств X, что каждое v_i комбинаторно вписано в u, $\operatorname{ord} v_i \le 1$ и $v_1 \cup \ldots \cup v_n \in \operatorname{cov}_\infty(X)$.* □

2. Определение $\mathscr{G}$-C-пространств и их элементарные свойства. Символами $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{G}_1$ и т. д. обозначаются непустые классы непустых комплексов. Для комплексов G и H пишем $H \subset G$, если существует вложение H в G в качестве подкомплекса.

Определение 2.1. Пусть $u \in \operatorname{cov}(X)$ и G — комплекс. Множество $P \subset X$ называется *G-перегородкой* покрытия u (обозначение: $P \in \operatorname{Part}(u, G)$), если существует такое семейство v открытых подмножеств X, что

1) v комбинаторно вписано в u;
2) $N(v) \subset G$;
3) $P = X \setminus \cup v$.

Для класса $\mathscr{G}$ положим

$$\operatorname{Part}(u, \mathscr{G}) = \cup\{\operatorname{Part}(u, G) : G \in \mathscr{G}\}.$$

Предложение 2.1. *Пусть G_1, G_2 — комплексы такие, что $G_1 \subset G_2$. Тогда* $\mathrm{Part}(u, G_1) \subset \mathrm{Part}(u, G_2)$ *для произвольного $u \in \mathrm{cov}(X)$.* $\square$

Определение 2.2. Пусть $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$ — классы комплексов. Говорят, что $\mathscr{G}$ *меньше* $\mathscr{H}$ (обозначение: $\mathscr{G} \leq \mathscr{H}$), если для всякого $G \in \mathscr{G}$ существует такое $H \in \mathscr{H}$, что $G \subset H$.

В частности,

$$\mathscr{G} \subset \mathscr{H} \Rightarrow \mathscr{G} \leq \mathscr{H}. \tag{2.1}$$

Предложение 2.1 влечет

Предложение 2.2. *Если $\mathscr{G}_1 \leq \mathscr{G}_2$, то* $\mathrm{Part}(u, \mathscr{G}_1) \subset \mathrm{Part}(u, \mathscr{G}_2)$. $\square$

Определение 2.3. Семейство $\sigma \subset \mathrm{cov}(X)$ называется *$\mathscr{G}$-несущественным*, если существует такое семейство перегородок $P_u \in \mathrm{Part}(u, \mathscr{G})$, $u \in \sigma$, что $\bigcap\{P_u : u \in \sigma\} = \varnothing$.

Предложение 2.3. *Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \subset \mathrm{cov}(X)$ и для каждого $u_1 \in \sigma_1$ существует такое $u_2 \in \sigma_2$, что u_1 комбинаторно вписано в u_2. Тогда из $\mathscr{G}$-несущественности σ_1 вытекает $\mathscr{G}$-несущественность σ_2.* $\square$

Следствием предложения 2.3 является

Предложение 2.4. *Пусть $\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \mathrm{cov}(X)$. Тогда из $\mathscr{G}$-несущественности σ_1 вытекает $\mathscr{G}$-несущественность σ_2.* $\square$

Определение 2.4. Пространство X называется *$\mathscr{G}$-C-пространством* (обозначение: $X \in \mathscr{G}$-C), если $\mathscr{G}$-несущественно всякое бесконечное семейство $\sigma \subset \mathrm{cov}(X)$.

Если всякое бесконечное семейство $\sigma \subset \mathrm{cov}(X)$ содержит конечное $\mathscr{G}$-несущественное подсемейство, то X называется *S-$\mathscr{G}$-C-пространством* (обозначение: $X \in S$-$\mathscr{G}$-C).

Если класс $\mathscr{G}$ содержит только один комплекс G, то пишем $\mathscr{G} = G$. Таким способом определяются классы пространств G-C и S-G-C.

В определении 2.4 семейство $\sigma \subset \mathrm{cov}(X)$ является множеством и, следовательно, различные его элементы являются различными покрытиями.

Класс всех комплексов G с $\dim G \leq n$ обозначим через $\mathscr{G}(n)$.

Предложение 2.5. *Класс $\mathscr{G}(0)$-C совпадает с классом C всех C-пространств.*

Доказательство. Поскольку нульмерные полиэдры — это в точности нервы дизъюнктных семейств множеств, основная трудность состоит в проверке включения $\mathscr{G}(0)$-$C \subset C$. Пусть $X \in \mathscr{G}(0)$-C и (u_i), $i \in \mathbb{N}$, $u_i \in \mathrm{cov}(X)$, — последовательность покрытий. Если в этой последовательности имеется бесконечно много попарно различных элементов, то применение предложения 2.4 завершает доказательство.

В противном случае можно считать, что все элементы этой последовательности одинаковы:

$$u_i = u = \{U_\alpha : \alpha \in A\}.$$

Наша цель — заменить u_i меньшими покрытиями так, чтобы они стали попарно различны. Можно считать, что элементы U_α покрытия u попарно различны.

Первый случай состоит в следующем. Существует растущая последовательность

$$U_{\alpha_1} \subset U_{\alpha_2} \subset \ldots \subset U_{\alpha_i} \subset \ldots . \tag{2.2}$$

Возьмем по точке $x_i \in U_{\alpha_i}$ и определим новые покрытия u_i^1 следующим образом:

$$u_i^1 = \{U_\alpha : \alpha \in A \setminus \{\alpha_i\}\} \cup \{U_{\alpha_i} \setminus \{x_i\}\}.$$

Ясно, что в последовательности $\left(u_i^1\right)$ нет совпадающих элементов.

Если последовательности вида (2.2) нет, то можно считать, что

$$U_\alpha \not\subset U_\beta \quad \forall \alpha, \beta \in A. \tag{2.3}$$

Случай (2.3) разбивается на подслучаи. Предположим, что среди попарных пересечений покрытия u найдется бесконечное $U_\alpha \cap U_\beta$. Возьмем бесконечную последовательность $\{x_1, x_2, \dots\} \subset U_\alpha \cap U_\beta$, состоящую из различных точек. Строим новые покрытия u_i^2, меняя только элемент U_α:

$$u_i^2 = \{U_\gamma : \gamma \in A \setminus \{\alpha\}\} \cup \{U_\alpha \setminus \{x_i\}\}.$$

В силу условия (2.3) последовательность $\left(u_i^2\right)$ также не имеет совпадающих элементов. Если же все пересечения $U_\alpha \cap U_\beta$ конечны, положим

$$X_0 = \bigcup \{U_\alpha \cap U_\beta : \alpha, \beta \in A,\ \alpha \neq \beta\}.$$

В случае бесконечности множества X_0 найдется такая последовательность $\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\} \subset A$, состоящая из попарно различных элементов, что

$$(U_{\alpha_{2i}} \cap U_{\alpha_{2i+1}}) \cap (U_{\alpha_{2j}} \cap U_{\alpha_{2j+1}}) = \varnothing \tag{2.4}$$

при $i \neq j$, в то время как все $U_{\alpha_{2k}} \cap U_{\alpha_{2k+1}}$ непусты. Возьмем по точке $x_i \in U_{\alpha_{2i}} \cap U_{\alpha_{2i+1}}$ и определим покрытия u_i^3 следующим образом:

$$u_i^3 = \{U_\beta : \beta \in A \setminus \{\alpha_{2i}\}\} \cup \{U_{\alpha_{2i}} \setminus \{x_i\}\}.$$

Последовательность $\left(u_i^3\right)$ состоит из попарно различных покрытий согласно (2.4). Пусть, наконец, множество X_0 конечно. Положим

$$B = \{\alpha \in A : U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing \quad \text{для некоторого } \beta \in A\}.$$

Из конечности X_0 вытекает конечность B. Тогда все элементы U_α, $\alpha \in A \setminus B$, открыто-замкнуты и попарно не пересекаются. Поэтому в покрытие u легко вписать дизъюнктное покрытие, что завершает доказательство. $\square$

Определение 2.5. Пусть m либо целое число ≥ 2, либо ∞. Пространство X называется *m-$\mathscr{G}$-C-пространством* (обозначение: $X \in m$-$\mathscr{G}$-C), если $\mathscr{G}$-несущественно всякое бесконечное семейство $\sigma \subset \operatorname{cov}_m(X)$. Если же всякое бесконечное σ содержит конечное σ_0, которое $\mathscr{G}$-несущественно, пространство X называется *S-m-$\mathscr{G}$-C-пространством* ($X \in S$-m-$\mathscr{G}$-C).

Замечание 2.1. Класс S-∞-$\mathscr{G}(0)$-C совпадает с классом *конечных C-пространств*, введенных Борстом [10]. Классы m-$\mathscr{G}(0)$-C и S-m-$\mathscr{G}(0)$-C введены в [7] под названиями m-C и S-m-C соответственно. Следовательно, 2-$\mathscr{G}(0)$-$C = wid$; S-2-$\mathscr{G}(0)$-$C = S$-wid.

Из предложения 2.2 вытекает

Предложение 2.6. *Если $\mathscr{G}_1 \leq \mathscr{G}_2$, то*
(1) $\mathscr{G}_1$-$C \subset \mathscr{G}_2$-C;
(2) S-$\mathscr{G}_1$-$C \subset S$-$\mathscr{G}_2$-C;
(3) m-$\mathscr{G}_1$-$C \subset m$-$\mathscr{G}_2$-C;
(4) S-m-$\mathscr{G}_1$-$C \subset S$-m-$\mathscr{G}_2$-C. $\square$

Следующие утверждения являются непосредственными следствиями определений:

$$\mathscr{G}\text{-}C \subset \infty\text{-}\mathscr{G}\text{-}C \subset (m+1)\text{-}\mathscr{G}\text{-}C \subset m\text{-}\ \mathscr{G}\text{-}C, \tag{2.5}$$

$$S\text{-}\mathscr{G}\text{-}C \subset S\text{-}\infty\text{-}\mathscr{G}\text{-}C \subset S\text{-}(m+1)\text{-}\mathscr{G}\text{-}C \subset S\text{-}m\text{-}\mathscr{G}\text{-}C, \tag{2.6}$$

$$S\text{-}\mathscr{G}\text{-}C \subset \mathscr{G}\text{-}C, \quad S\text{-}m\text{-}\mathscr{G}\text{-}C \subset m\text{-}\mathscr{G}\text{-}C. \tag{2.7}$$

Предложение 2.7. *Если X — конечное множество, то $X \in S\text{-}\mathscr{G}\text{-}C$ для произвольного класса $\mathscr{G}$.* $\square$

Предложение 2.8. *Пусть $\mathscr{P}$ обозначает один из следующих символов: $\mathscr{G}$, $m\text{-}\mathscr{G}$, $S\text{-}\mathscr{G}$, $S\text{-}m\text{-}\mathscr{G}$. Если $X \in \mathscr{P}\text{-}C$, то $Y \in \mathscr{P}\text{-}C$ для всякого замкнутого $Y \subset X$.* $\square$

Обычным образом (см., например, [7]) можно доказать следующие два утверждения.

Теорема 2.1. *Если счетно паракомпактное пространство X может быть представлено как объединение последовательности X_i, $i \in \mathbb{N}$, замкнутых подпространств $X_i \in \mathscr{G}\text{-}C(m\text{-}\mathscr{G}\text{-}C)$, то $X \in \mathscr{G}\text{-}C(m\text{-}\mathscr{G}\text{-}C)$ для произвольного класса $\mathscr{G}$ конечных комплексов.* $\square$

Теорема 2.2. *Пусть $\mathscr{G}$ — некоторый класс конечных комплексов, и пусть X является объединением конечного семейства замкнутых подпространств $X_i \in S\text{-}\mathscr{G}\text{-}C$ $(S\text{-}m\text{-}\mathscr{G}\text{-}C)$. Тогда $X \in S\text{-}\mathscr{G}\text{-}C$ $(S\text{-}m\text{-}\mathscr{G}\text{-}C)$.* $\square$

Напомним некоторые свойства максимального бикомпактного расширения βX пространства X.

Для открытого множества $U \subset X$ пусть $e(U) = \beta X \setminus [X \setminus U]_{\beta X}$, т. е. $e(U)$ — наибольшее открытое в βX множество со свойством $e(U) \cap X = U$.

Лемма 2.1. *Если $u = \{U_1, \dots, U_m\} \in \operatorname{cov}_m(X)$, то семейство*

$$e(u) \equiv \{e(U_1), \dots, e(U_m)\}$$

является покрытием $\in \operatorname{cov}_m(\beta X)$. $\square$

Лемма 2.2. *Если U — открытое подмножество βX, то $e(U \cap X) \subset [U]_{\beta X}$.* $\square$

Лемма 2.3. *Пусть X всюду плотно в Y. Тогда для произвольного конечного семейства $v = \{V_1, \dots, V_k\}$ открытых подмножеств Y имеем $N(v) = N(v|X)$, где $v|X = \{V_1 \cap X, \dots, V_k \cap X\}$.* $\square$

Теорема 2.3. *$X \in S\text{-}m\text{-}\mathscr{G}\text{-}C \iff \beta X \in m\text{-}\mathscr{G}\text{-}C$.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $u_i = \bigl\{U_1^i, \dots, U_{k_i}^i\bigr\} \in \operatorname{cov}_m(\beta X)$, $i = \mathbb{N}$, — произвольная последовательность. Существуют такие покрытия

$$u_i^1 = \bigl\{{}^1U_1^i, \dots, {}^1U_{k_i}^i\bigr\} \in \operatorname{cov}_m(\beta X),$$

что

$$\bigl[{}^1U_j^i\bigr]_{\beta X} \subset U_j^i, \quad i \in \mathbb{N},\ j = 1, \dots, k. \tag{2.8}$$

Положим $w_i = u_i^1|X$. Поскольку $X \in S\text{-}m\text{-}\mathscr{G}\text{-}C$, существуют такое $n \in \mathbb{N}$ и семейства v_i открытых подмножеств X, что

$$v_i \quad \text{комбинаторно вписано в } w_i; \tag{2.9}$$

$$N(v_i) \subset G_i \in \mathscr{G}; \tag{2.10}$$

$$\bigcup\{v_i : i = 1, \dots, n\} \in \operatorname{cov}_\infty(X). \tag{2.11}$$

Пусть $v_i^1 = e(v_i)$. Тогда v_i^1 комбинаторно вписано в u_i согласно (2.8), (2.9) и лемме 2.2. В силу (2.10) и леммы 2.3 имеем $N\bigl(v_i^1\bigr) \subset G_i$. Наконец, из (2.11) и леммы 2.1 вытекает, что $\bigcup\bigl\{v_i^1 : i = 1, \dots, n\bigr\} \in \operatorname{cov}_\infty(\beta X)$. Итак, $\beta X \in m\text{-}\mathscr{G}\text{-}C$.

$\Leftarrow$. Берем произвольную последовательность $u_i \in \mathrm{cov}_m(X)$, $i \in \mathbb{N}$, и полагаем $w_i = e(u_i)$. Тогда $w_i \in \mathrm{cov}_m(\beta X)$ по лемме 2.1. Поскольку $\beta X \in m\text{-}\mathscr{G}\text{-}C$, существуют $i \in \mathbb{N}$ и семейства v_i открытых подмножеств βX, которые удовлетворяют условиям (2.9)–(2.11) для βX. Пусть $v_i^1 = v_i|X$. Тогда семейства $v_1^1, \dots, v_n^1$ реализуют свойство $X \in S\text{-}m\text{-}\mathscr{G}\text{-}C$ в силу леммы 2.3. $\square$

3. Бикомпактные $\mathscr{G}$-C-пространства. Пусть $\mathscr{P}$ — некоторое топологическое свойство. Класс всех бикомпактов со свойством $\mathscr{P}$ обозначим через $\mathscr{P}$-Comp. Ясно, что

$$S\text{-}\mathscr{G}\text{-}C\text{- Comp} = \mathscr{G}\text{- }C\text{- Comp} = \infty\text{-}\mathscr{G}\text{-}C\text{- Comp}\,. \tag{3.1}$$

Для класса $\mathscr{G}$ через $\mathscr{G}_f$ обозначим класс всех конечных подкомплексов комплексов из $\mathscr{G}$.

Предложение 3.1. *Для произвольного класса $\mathscr{G}$*

$$\mathscr{G}\text{-}C\text{- Comp} = \mathscr{G}_f\text{-}C\text{- Comp}\,. \qquad \square$$

Ввиду предложения 3.1 в дальнейшем мы рассматриваем только классы $\mathscr{G}$ конечных комплексов. Напомним, что пространство X называется *разреженным* (обозначение: $X \in \mathrm{Scatt}$), если всякое его непустое подпространство Y имеет изолированную точку.

Говорят, что класс $\mathscr{G}$ *n-мерен* (обозначение: $\dim \mathscr{G} \le n$), если $\dim G \le n$ для всякого $G \in \mathscr{G}$. Класс $\mathscr{G}$ называется *бесконечномерным* ($\dim \mathscr{G} = \infty$), если для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует комплекс $G_n \in \mathscr{G}$ размерности $\dim G_n \ge n$.

Следующая теорема дает полную характеризацию бикомпактных $\mathscr{G}$-C-пространств.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathscr{G}$ — класс комплексов. Тогда*
(1) *$\mathscr{G}$ конечен $\iff$ $\mathscr{G}$-C-Comp $=$ Scatt-Comp;*
(2) *$\mathscr{G}$ бесконечен и $\dim \mathscr{G} \le n$ $\iff$ $\mathscr{G}$-C-Comp $=$ C-Comp;*
(3) *$\dim \mathscr{G} = \infty$ $\iff$ $\mathscr{G}$-C-Comp $=$ Comp.*

Чтобы доказать теорему 3.1, достаточно проверить импликации $\Rightarrow$. Для доказательства импликации (1) $\Rightarrow$ нам потребуется дополнительная информация о разреженных пространствах.

Множество всех изолированных точек пространства X обозначим через $\mathrm{Is}(X)$. Множество $X^{(1)} = X \setminus \mathrm{Is}(X)$ называется *производной Кантора — Бендиксона* пространства X. По индукции можно определить α-производное множество $X^{(\alpha)}$ пространства X для произвольного порядкового числа α. А именно, $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})^{(1)}$ и $X^{(\alpha)} = \bigcap\{X^{(\beta)} : \beta < \alpha\}$ для предельного α. Ясно, что все множества $X^{(\alpha)}$ замкнуты в X.

Предложение 3.2. *Пространство X разрежено тогда и только тогда, когда $X^{(\alpha)} = \varnothing$ для некоторого α.* $\square$

Непустое пространство X называется *совершенным*, если X не содержит ни одной изолированной точки. Из предложения 3.2 вытекает

Предложение 3.3. *Пространство X не разрежено в том и только в том случае, если X содержит замкнутое совершенное подпространство.* $\square$

Минимальное α со свойством $X^{(\alpha)} = \varnothing$ называется *высотой* разреженного пространства X и обозначается через $h(X)$.

Предложение 3.4. *Для любого комплекса G имеем* Scatt-Comp $\subset$ *G-C-*Comp.

Доказательство. Пусть X — разреженный бикомпакт. Докажем свойство

$$X \in G\text{-}C \tag{3.2}$$

трансфинитной индукцией по высоте $h(X)$. Если $h(X) = 1$, то применяем предложение 2.7. Предположим, что свойство (3.2) проверено для всех X высоты $\leq \alpha$, и пусть Y — разреженный бикомпакт с $h(Y) = \alpha + 1$. Возьмем последовательность $\sigma = \left\{u_i = \left\{U_1^i, \dots, U_{k_i}^i\right\} : i \in \mathbb{N}\right\} \subset \operatorname{cov}_\infty(Y)$.

Множество $Y^{(\alpha)}$ состоит из конечного числа точек $y_1, \dots, y_n$. Пусть $y_i \in U_{j_i}^i$, $i = 1, \dots, n$. Поскольку $\dim Y = 0$, существуют такие открыто-замкнутые множества $V_i \subset Y$, что $y_i \in V_i \subset U_{j_i}^i$. Положим

$$Y_0 = Y \setminus V_1 \cup \ldots \cup V_n.$$

Тогда $h(Y_0) \leq \alpha$. Согласно индуктивному предположению семейство $\sigma^n \equiv (u_{n+1}, u_{n+2}, \dots)$ содержит конечное G-несущественное в Y_0 подсемейство σ_0. По предложению 2.4 можно считать, что $\sigma_0 = (u_{n+1}, \dots, u_m)$. Поскольку σ_0 G-несущественно в Y_0, существуют такие открытые в Y_0 и, следовательно, в Y множества V_i, что

$$V_i \subset U_{j_i}^i \in u_i,\ i = n+1, \dots, m; \quad Y_0 = V_{n+1} \cup \ldots \cup V_m.$$

Последовательность $v_i = \{V_i\}$, $i = 1, \dots, m$, реализует свойство G-несущественности конечного семейства $\sigma_1 = (u_1, \dots, u_m) \subset \sigma$. Следовательно, $Y \in G$-C. Поскольку $h(X)$ — изолированное число для любого разреженного бикомпакта X, доказательство завершено. □

Доказательство утверждения (1) $\Rightarrow$. Если $X \in$ Scatt-Comp, то $X \in \mathscr{G}$-C-Comp в соответствии с предложениями 2.6 и 3.4. Пусть теперь $X \in \mathscr{G}$-C-Comp. Поскольку $\mathscr{G}$ конечно, существует такой конечный комплекс G, что $\mathscr{G} \leq G$. Тогда $X \in G$-C согласно предложению 2.6. Предположим, что X не разрежено. Ввиду предложения 3.3 существует замкнутое совершенное подпространство $X_1 \subset X$. Согласно предложению 2.8 имеем

$$X_1 \in G\text{-}C. \tag{3.3}$$

Поскольку X_1 совершенно,

$$\text{всякое непустое открытое подмножество } X_1 \text{ бесконечно.} \tag{3.4}$$

Будем говорить, что покрытие $u = \{U_1, \dots, U_n\} \in \operatorname{cov}_\infty(Y)$ *солидно*, если каждое множество $F_i = U_i \setminus \bigcup\limits_{k \neq i} U_k$ совершенно. В каждое открытое покрытие совершенного бикомпакта можно вписать солидное покрытие.

Возвращаясь к условию (3.3), предположим, что $|v(G)| = m$. Применяя свойство (3.4), построим по индукции такую последовательность

$$u_i = \left\{U_1^i, \dots, U_{k_i}^i\right\} \in \operatorname{cov}_\infty(X), \quad i \in \mathbb{N},$$

что

$$\text{каждое } u_i \text{ солидно;} \tag{3.5}$$

$$\text{каждое } F_j^i = U_j^i \setminus \bigcup_{k \neq i} U_k^i \text{ совершенно;} \tag{3.6}$$

$$|u_1| = m + 1; \tag{3.7}$$

$$u_{i+1}|F_j^i \text{ солидно для всякого } j; \tag{3.8}$$

$$\bigl|u_{i+1}|F_j^i\bigr| = m + 1 \text{ для всякого } j. \tag{3.9}$$

В силу условий (3.7) и (3.9) для любой последовательности $v_i = \bigl(V_{j_1}^i, \dots, V_{j_m}^i\bigr)$ со свойством $V_j^i \subset U_j^i$ существует последовательность

$$F_{j_1}^1 \supset F_{j_2}^2 \supset \dots \supset F_{j_i}^i \supset F_{j_{i+1}}^{i+1} \supset \dots \supset F \neq \varnothing \tag{3.10}$$

со свойством

$$F_{j_i}^i \subset X \setminus \bigcup v_i. \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) получаем

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i \supset F \neq \varnothing \tag{3.12}$$

для любых перегородок $P_i \in \mathrm{Part}(u_i, G)$. Из (3.12) имеем $X_1 \notin G$-C, что противоречит условию (3.3). $\square$

Предложение 3.5. *Если $\mathscr{G}$ бесконечен, то C-*Comp $\subset \mathscr{G}$-C-Comp.

Доказательство. Поскольку $\mathscr{G}$ бесконечен, $\mathscr{G}(0)_f \leq \mathscr{G}$. Следовательно, $\mathscr{G}(0)_f$-$C \subset \mathscr{G}$-C по предложению 2.6. С другой стороны, C-Comp $= \mathscr{G}(0)_f$-C согласно предложениям 2.5 и 3.1. $\square$

Доказательство утверждения (2) $\Rightarrow$. Ввиду предложения 3.5 достаточно показать, что $\mathscr{G}$-C-Comp $\subset C$-Comp. Пусть $X \in \mathscr{G}$-C-Comp и

$$u_i = \bigl\{U_1^i, \dots, U_{m_i}^i\bigr\} \in \mathrm{cov}_\infty(X), \quad i \in \mathbb{N},$$

— произвольная последовательность. Положим

$$\mathscr{U}_k = \{u_i : (k-1)(n+1) + 1 \leq i \leq k(n+1)\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для каждого k существует покрытие $u^k \in \mathrm{cov}_\infty(X)$, вписанное в каждый элемент семейства $\mathscr{U}_k$. Поскольку $X \in \mathscr{G}$-C-Comp и $\dim \mathscr{G} \leq n$, существуют такие семейства w_k, $k \in \mathbb{N}$, состоящие из функционально открытых подмножеств X, что

$$w_k \text{ комбинаторно вписано в } u^k; \tag{3.13}$$

$$\dim N(w_k) \leq n; \tag{3.14}$$

$$\bigcup_k w_k \in \mathrm{cov}(X). \tag{3.15}$$

Положим $W_k = \bigcup w_k$. Поскольку всякое семейство w_k конечно и функционально открыто, каждое множество W_k функционально открыто и, следовательно, нормально. Согласно предложению 1.1 и свойству (3.14) существуют такие открытые семейства v_j^k, $j = 1, \dots, n+1$, что

$$v_j^k \text{ вписано в } w_k,\ k \in \mathbb{N}; \tag{3.16}$$

$$\bigcup_j v_j^k \in \mathrm{cov}(W_k). \tag{3.17}$$

Положим $v_{(n+1)k+j} = v_j^k$. Условия (3.13) и (3.16) влекут, что $v_{(n+1)k+j}$ вписано в $u_{(n+1)k+j}$. Из (3.15) и (3.17) получаем $\bigcup_i v_i \in \mathrm{cov}(X)$. Значит, $X \in C$. $\square$

Доказательство утверждения (3) $\Rightarrow$. Пусть $\mathscr{G}(\infty)$ — класс всех конечных комплексов. Тогда

$$\dim \mathscr{G} = \infty \Rightarrow \mathscr{G}(\infty) \leq \mathscr{G}. \tag{3.18}$$

В самом деле, каждый конечный комплекс G можно вложить в любой симплекс $\triangle$ размерности $\dim \triangle \geq |v(G)| - 1$. С другой стороны, всякий симплекс $\triangle$ содержится в любом комплексе H размерности $\dim H \geq \dim \triangle$. Итак, свойство (3.18) проверено.

Для произвольного покрытия $u \in \mathrm{cov}_\infty(X)$ имеем $N(u) \in \mathscr{G}(\infty)$. Следовательно, всякий бикомпакт X есть $\mathscr{G}(\infty)$-C-пространство. Применяя свойство (3.18) и предложение 2.6, завершаем доказательство. $\square$

Замечание 3.1. В утверждении (1) условие бикомпактности существенно. Так, пространство ω_1 всех счетных порядковых чисел разрежено, но не является C-пространством.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haver W. E.* A covering property for metric spaces // Topology conference. Virginia Polytechnic Inst. and State Univ., March 22–24, 1973. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1974. P. 108–113. (Lecture Notes in Math.; V. 375).
2. *Addis D. F., Gresham J. H.* A class of infinite-dimensional spaces. I. Dimension theory and Alexandroff's problem // Fund. Math. 1978. V. 101, N 3. P. 195–205.
3. *Haver W. E.* Locally contractible spaces that are absolute neighborhood retracts // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 40, N 1. P. 280–284.
4. *Ancel F. D.* The role of countable dimensionality in the theory of cell-like relations // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 287, N 1. P. 1–40.
5. *Uspenskij V. V.* A selection theorem for C-spaces // Topology Appl. 1998. V. 85, N 1–3. P. 351–374.
6. *Gutev V., Valov V.* Continuous selections and C-spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130, N 1. P. 233–242.
7. *Федорчук В. В.* Слабо бесконечномерные пространства // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 2. С. 323–374.
8. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
9. *Engelking R.* Theory of dimensions finite and infinite. Lemgo: Heldermann, 1995.
10. *Borst P.* Some remarks concerning C-spaces // Topology Appl. 2007. V. 154, N 3. P. 665–674.

Статья поступила 24 апреля 2008 г.

Федорчук Виталий Витальевич
Московский гос. университет, механико-математический факультет,
Ленинские горы, 1, Москва 119992
vvfedorchuk@gmail.com