Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 517.954, 517.984.5

МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ ВЕКТОРЫ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ КОНЕЧНОМЕРНОСТЬ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

К. В. Сторожук

Аннотация. Пусть X— банахово пространство, $T : X \to X$ — линейный оператор, ограниченный со степенями. Положим $X_0 = \{x \in X \mid T^n x \to 0\}$. Доказывается, что если $X_0 \neq X$, то существует $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется x такой, что $\|Tx - \lambda x\| < \varepsilon$, но $\|T^n x\| > 1 - \varepsilon$ для всех n. Развитая техника позволяет установить, что если X рефлексивно и существует компакт $K \subset X$ такой, что $\liminf\limits_{n\to\infty} \rho\{T^n x, K\} < \alpha(T) < 1$ для любого единичного $x \in X$, то $\operatorname{codim} X_0 < \infty$. Результаты справедливы и для однопараметрической полугруппы.

Ключевые слова: полугруппа операторов, асимптотическая конечномерность.

Введение

В работе X — комплексное банахово пространство, $T : X \to X$ — линейный оператор, все степени которого ограничены константой $C < \infty$. Мы используем обозначения: B_X — единичный шар X, Γ — единичная окружность в $\mathbb{C}$, $X_0 = \{x \in X \mid T^n x \to_{n\to\infty} 0\}$.

Вектор x называется *ε-почти собственным* (или просто *ε-собственным*), если существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $\|Tx - \lambda x\| < \varepsilon$. Такие векторы существуют для каждого $\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \cap \Gamma$. В п. 1 изучаются те ε-собственные векторы, которые при итерациях T^n не слишком укорачиваются.

Определение 1. Пусть $\varepsilon > 0$. Назовем вектор $x \in X$ *ε-медленным*, если

$$\exists \lambda \in \Gamma \mid \|Tx - \lambda x\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \|T^n x\| > 1 - \varepsilon \ \forall n = 0, 1, 2 \dots.$$

Например, собственные векторы x, $Tx = \lambda x$, $\lambda \in \Gamma$, медленные.

Пример 1. $T : l_2 \to l_2$ — сдвиг вправо, $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Это изометрия, значит, любой единичный ε-собственный вектор ε-медленный.

Пример 1*. $T : l_2 \to l_2$ — сдвиг влево, $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Спектр содержит Γ, но $T^n x \to 0$ для любого x и медленных векторов нет.

Если вектор x ε-медленный, то для каждого n векторы $T^n x$ будут $C\varepsilon$-медленными, так как $T(T^n x) - \lambda T^n x = T^n(Tx - \lambda x)$. Таким образом, угол между (комплексными) прямыми $T^n x$ и $T^{n+1} x$ будет мал не только при $n = 0$, но и при всех $n \in \mathbb{N}$ (т. е. вектор при итерациях меняется медленно).

Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ–5682.2008.1) и интеграционного проекта СО РАН № 30 за 2009–2011 гг.

Замечание. Наша терминология не связана с названиями «медленный вектор», «медленная переменная» классической теории динамических систем. В названии статьи медленные векторы названы медленно меняющимися.

Определение 2. У оператора T *есть медленные векторы*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют ε-медленные векторы. У оператора T *много медленных векторов*, если $\dim X = \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ и $n < \infty$ в X найдутся n-мерные подпространства, единичные сферы которых состоят из ε-медленных векторов.

Если степени $\|T^n\|$ ограничены снизу, т. е. существует число c такое, что $c\|x\| \le \|T^n x\|$ для любого x, то медленных векторов много. В самом деле, если $\|x\| = 1$ и x — $c\varepsilon$-собственный вектор, то вектор $\frac{x}{c}$ ε-медленный.

Если $X_0 = X$, то ясно, что медленных векторов нет. Оказывается, условие $X_0 = X$ — единственное препятствие к существованию медленных векторов; если же $\operatorname{codim} X_0 = \infty$, то медленных векторов много (теорема 1.1).

В п. 2 медленные векторы используются для исследования асимптотических свойств операторов T^n.

Известно, что если существует притягивающий компакт K, т. е. такой, что

$$\forall x \in B_X \lim_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0,$$

то $X = X_0 \oplus L$, где L — конечномерное инвариантное подпространство в X. Это доказано в [1] для марковских полугрупп в L_1. Для произвольного банахова пространства это установлено в работах [2, 3]. В [4] доказано, что для расщепляемости $X = X_0 \oplus L$, $\dim L < \infty$ достаточно, чтобы компакт K притягивал лишь иногда, т. е.

$$\forall x \in B_X \ \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0.$$

Полугруппу $T^n : X \to X$ или однопараметрическую полугруппу $T_t : X \to X$ называют *асимптотически конечномерной* [5], если $\operatorname{codim} X_0 < \infty$. В [6, 1.3.33] поставлен вопрос: будет ли полугруппа асимптотически конечномерна, если

$$\forall x \in B_X \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) < \alpha(T) < 1 \qquad (*)$$

Ясно, что условие $(*)$ следует из перечисленных выше аналогичных условий.

Во втором пункте статьи доказывается, что если X рефлексивно, то оператор, удовлетворяющий $(*)$, имеет мало медленных векторов и $\operatorname{codim} X_0 < \infty$ (теорема 2.3). Таким образом, мы даем частичный положительный ответ на вопрос [6]. Теорема 2.3 без труда обобщается на случай однопараметрической полугруппы операторов $\{T_t : X \to X, t \ge 0\}$.

Заметим, что как раз в рефлексивном случае условие $\operatorname{codim} X_0 < \infty$ для ограниченной полугруппы влечет упомянутую расщепляемость $X_0 \oplus L$ [7].

В случае нерефлексивного X ответ на вопрос [6, 1.3.33] автору неизвестен.

1. Медленные векторы

Теорема 1.1. *Пусть X — банахово пространство, $T : X \to X$, $\|T^n\| < C$. Если $X_0 \ne X$, то у T есть медленные векторы. Если $\operatorname{codim} X_0 = \infty$, то медленных векторов много.*

Доказательство. Без ограничения общности, перейдя к эквивалентной норме $\|x\| := \sup\limits_n \{\|T^n x\|\}$, можно считать, что $\|T\| \le 1$.

План доказательства таков: (a) $X_0 = 0 \Rightarrow$ медленные векторы существуют; (b) $X_0 = 0 \Rightarrow$ медленных векторов много; (c) $\operatorname{codim} X_0 = \infty \Rightarrow$ медленных векторов много.

(a) Введем на X норму $\|x\|_p := \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n x\|$. В этой норме T является изометрией. Нормы $\| \ \|_p$ и $\| \ \|$ не обязательно эквивалентны, однако для всех x

$$\|T^k x\| \sim_{k\to\infty} \|T^k x\|_p. \tag{1.1}$$

Если степени оператора T не ограничены снизу, то пространство $(X, \| \ \|_p)$ не полно. Пусть $\widehat{X}$ — пополнение X по норме $\| \ \|_p$. Продолжим изометрию T пространства $(X, \| \ \|_p)$ на пространство $\widehat{X}$, обозначив это продолжение буквой $\widehat{T}$. Пусть $\lambda \in \mathrm{Sp}(\widehat{T}) \cap \Gamma$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\hat{x} \in \widehat{X}$ — $\| \ \|_p$-единичный ε-собственный вектор, соответствующий λ. Учитывая, что $\widehat{T} : \widehat{X} \to \widehat{X}$ — изометрия, получаем

$$\|\widehat{T}\hat{x} - \lambda\hat{x}\|_p < \varepsilon \quad \text{и} \quad \forall n \ \|\widehat{T}^n \hat{x}\|_p = \|\hat{x}\|_p = 1 > 1 - \varepsilon.$$

Множество X плотно в $\widehat{X}$. Если вектор $x \in X$ достаточно $\| \ \|_p$-близок к $\hat{x}$, то все строгие неравенства последней формулы сохранятся. Итак, существует вектор $x \in X$, такой, что

$$\|Tx - \lambda x\|_p < \varepsilon \quad \text{и} \quad \forall n \ \|T^n x\|_p > 1 - \varepsilon. \tag{1.2}$$

Таким образом, вектор x является ε-медленным вектором оператора T относительно нормы $\| \ \|_p$. Он, конечно, не обязан быть медленным относительно исходной нормы, так как число $\|Tx - \lambda x\|$ может быть велико. Однако, навешивая на формулу (1.2) $\| \ \|_p$-изометрию T^k, получаем:

$$\forall k \ \|T(T^k x) - \lambda T^k x\|_p < \varepsilon \quad \text{и} \quad \forall n \ \|T^n(T^k x)\|_p > 1 - \varepsilon. \tag{1.3}$$

В силу (1.1) начиная с некоторого $k = k_0$ неравенства (1.3) будут выполнены и для нормы $\| \ \|$, т. е. начиная с некоторого k вектор $T^k x$ будет медленным и относительно исходной нормы пространства X.

(b) Возьмем число $\lambda \in \Gamma$ из спектра изометрии $\widehat{T}$ пространства $(\widehat{X}, \| \ \|_p)$, у λ есть много ε-собственных векторов (существуют даже бесконечномерные сферы из ε-собственных векторов (см. [8, гл. IV, теоремы 5.33, 5.9]).

Пусть $l < \infty$ и W — l-мерное подпространство в $(\widehat{X}, \| \ \|_p)$, $\| \ \|_p$-единичная сфера S которого состоит из ε-собственных векторов. Легко пошевелив W, можно считать, что $W \subset X$. Все векторы множества S удовлетворяют (1.2) и (1.3). Согласно (1.1) для каждого $x \in S$ начиная с некоторого k_0 векторы $T^{k_0}x$ будут медленными векторами оператора $T : X \to X$. Эллипсоид S компактен, поэтому k_0 можно выбрать общим для всех $x \in S$. Итак, X содержит $(l-1)$-мерные эллипсоиды вида $T^{k_0}(S)$, состоящие из медленных векторов.

(c) Рассмотрим фактор-пространство X/X_0, $[x] := x + X_0$ — его элементы. Норма $\|[x]\|$ такова: $\|[x]\| = \rho(x, X_0) = \inf\{\|x - x_0\|, \ x_0 \in X_0\}$. Имеем $T(X_0) \subset X_0$, поэтому определяется оператор $[T] : X/X_0 \to X/X_0$. Ясно, что $[T]^n = [T^n]$. Легко видеть, что если $[x] \neq [0]$, то $[T]^n[x] \not\to 0$. Согласно (b) у оператора $[T]$ много медленных векторов, т. е. для любого l в X/X_0 найдутся l-мерные эллипсоиды из медленных векторов $[x]$ оператора $[T]$ (причем можно считать, что эти эллипсоиды имеют вид $[S]$, где S — эллипсоид в X):

$$\forall n \geq 0 \ \|[T]^n[x]\| > 1 - \varepsilon \quad \text{и} \quad \|[T][x] - \lambda[x]\| < \varepsilon \ \forall [x] \in [S].$$

Ввиду того, что $T^k x_0 \to 0$ для любого $x_0 \in X_0$, получаем: для всех $x \in [x] = x + X_0 \in [S]$

$$\forall n \geq 0 \ \|T^n(T^k x)\| > 1 - \varepsilon \quad \text{и} \quad \|T(T^k x) - \lambda T^k x\| <_{k\to\infty} \varepsilon. \tag{1.4}$$

Компактность S позволяет теперь утверждать, что начиная с некоторого k эллипсоиды $T^k S \subset X$ состоят из медленных векторов. $\square$

Пусть $S_{m,\lambda} = \frac{1}{m+1}\left(\sum\limits_{i=0}^{m} \frac{T^m}{\lambda^m}\right)$ — чезаровское среднее оператора T/λ.

Лемма 1.2. *Пусть* $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$. *Если у* T *есть медленные векторы, то существует такое* $\lambda \in \Gamma$, *что*

$$\exists x \in B_X \mid \|S_{m,\lambda}x - x\| < \delta \quad \text{и} \quad \forall n \ \|T^n(S_{m,\lambda}x)\| > 1 - \delta. \tag{1.5}$$

Если у T *много медленных векторов, то существуют подпространства* $W \subset X$ *сколь угодно большой размерности, единичные сферы* S *которых состоят из векторов* x, *удовлетворяющих неравенствам* (1.5).

Доказательство. Рассмотрим $\lambda \in \Gamma$, которому соответствуют медленные векторы. (Существование такого λ легко следует из компактности Γ.) Если число $\varepsilon := \varepsilon(\delta, m)$ очень мало и x — ε-медленный вектор, соответствующий числу λ, то $S_{m,\lambda}(x) \approx x$ и вектор $S_{m,\lambda}(x)$ удовлетворяет (1.5). Оставшаяся часть доказательства пояснений не требует. $\square$

Замечание. Геометрически лемма 1.2 означает, что для любого числа m найдутся сколь угодно многомерные сферы, которые почти не сплющиваются под действием отображений $T^n(S_{m,\lambda})$, каково бы ни было n.

2. Асимптотическая конечномерность в рефлексивном случае

Всюду в этом пункте предполагаем, что $T : X \to X$ удовлетворяет условиям $(*)$. Можно считать, что K — уравновешенное множество.

Лемма 2.1. *Пусть* $x \in B_X$. *Для любого* k *найдутся векторы* $a_1, \dots, a_k \in K$, *номера* $m_1 > m_2 > \dots > m_k$ *и числа* $t_1, \dots, t_k$, $|t_i| \le \alpha^{i-1}$, *такие, что*

$$\|T^{m_1}x - [t_1T^{m_2}a_1 + t_2T^{m_3}a_2 + \dots + t_{k-1}T^{m_k}a_{k-1} + t_ka_k]\| \le \alpha^k. \tag{2.1}$$

Доказательство. Выпишем неравенства для $k = 1, 2, 3$. Первое из них есть условие $(*)$, а справедливость каждого следующего обеспечивается применением $(*)$ к предыдущему, умноженному на α:

$$\exists n_1 \mid \|T^{n_1}x - t_1a_1\| \le \alpha, \ |t_1| \le 1,$$

$$\exists n_2 \mid \|T^{n_2}(T^{n_1}x - t_1a_1) - t_2a_2\| \le \alpha^2, \ |t_2| \le \alpha,$$

$$\exists n_3 \mid \|T^{n_3}(T^{n_2}(T^{n_1}x - t_1a_1) - t_2a_2) - t_3a_3\| \le \alpha^3, \ |t_3| \le \alpha^2, \dots.$$

Чтобы закончить, остается раскрыть скобки и положить $m_j = n_j + \dots + n_k$. $\square$

Сумма чисел $|t_i|$ в формуле (2.1) не превосходит числа $h := \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$. Значит, выпуклая оболочка $\widehat{K}$ множества $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} T^i(hK)$ притягивает B_X, т. е.

$$\forall x \in B_X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists a \in \widehat{K} \mid \|T^nx - a\| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Покажем теперь, что T не может действовать умножением на единичный скаляр на слишком многомерных подпространствах X.

Теорема 2.2. *Для каждого* $\lambda \in \Gamma$ $\quad \dim\ker(T - \lambda I) < \infty$.

Доказательство. Выберем в K конечную $(1-\alpha)$-сеть из k векторов и натянем на нее подпространство Y. По теореме Крейна — Красносельского — Мильмана [9] в любом подпространстве $Z \subset X$ таком, что $\dim Z > \dim Y$, найдется единичный вектор z такой, что $\rho(z, Y) = 1$. По условиям $(*)$ $\rho(T^nz, Y) < \alpha + (1-\alpha) = 1$ для некоторого n. Поэтому Tz не может иметь вид $\lambda \cdot z$. $\square$

Теорема 2.3. *Пусть X рефлексивно. Тогда у оператора T не может быть много медленных векторов T и, значит,* $\operatorname{codim} X_0 < \infty$.

Доказательство. Достаточно доказать, что никакому $\lambda \in \Gamma$ не соответствует много медленных векторов. Можно считать, что $\lambda = 1$.

Операторные средние $S_{m,1} = S_m = \frac{1}{m+1}\left(\sum\limits_0^m T^k\right)$ согласно статистической эргодической теореме (см., например, [10, § 2]) сходятся к проектору P пространства X на подпространство $\ker(I - T)$. По теореме 2.2 $\dim\ker(I-T) < \infty$.

На компакте K сходимость $S_m - P$ к нулю равномерна (например, по теореме Арцела). Операторы S_m коммутируют с T, поэтому сходимость $(S_m - P) \to 0$ равномерна и на множестве $\widehat{K}$. Значит, начиная с некоторого m для всех $a \in \widehat{K}$ число $\|S_m(a) - P(a)\|$ достаточно мало, например меньше числа $\frac{1}{3}$. Ввиду (2.2) для каждого $x \in B$ при больших n вектор $T^n x$ близок к $\widehat{K}$. Поэтому

$$\exists m \ \forall x \in B_X \ \|(S_m - P)T^n x\| = \|T^n(S_m x) - Px\| \leq_{n\to\infty} 1/3.$$

Отсюда следует, например, что под действием $T^n \circ S_m$ любая k-мерная сфера такая, что $k > \dim\ker(I-T)$, при больших n «сплющивается» в 3 раза вдоль некоторого радиуса x (надо взять такой радиус x в этой сфере, что $Px = 0$).

Последнее согласно лемме 1.2 и замечанию к ней означает, что медленных векторов у числа $\lambda = 1$ не много.

Теперь неравенство $\operatorname{codim} X_0 < \infty$ следует из теоремы 1.1. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lasota A., Li T. Y., Yorke J. A.* Asymptotic periodicity of the iterates of Markov operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 286, N 2. P. 751–764.
2. *Ph'ong Vu Quoc.* Asymptotic almost periodicity and compactifying representations of semigroups // Ukrain. Mat. Zh. 1986. V. 38, N 6. P. 688–692.
3. *Sine R.* Constricted systems // Rocky Mountain J. Math. 1991. V. 21, N 4. P. 1373–1383.
4. *Storozhuk K. V.* An extension of the Vu-Sine theorem and compact-supercyclicity // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 332, N 2. P. 1365–1370.
5. *Emel'yanov E. Yu., Wolff, Manfred P. H.* Quasi-constricted linear operators on Banach spaces // Studia Math. 2001. V. 144, N 2. P. 169–179.
6. *Emel'yanov E. Yu.* Non-spectral asymtotic analysis of one-parameter operator semigroups.. Basel: Birkhäuser Verl., 2007. (Oper. Theory, Advances Appl.; V. 173).
7. *Емельянов Э. Ю.* Условия асимптотической конечномерности C_0-полугруппы // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 1015–1020.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
9. *Крейн М. Г., Красносельский М. А., Мильман Д. П.* О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах // Сб. тр. Ин-та математики АН УССР. 1948. Т. 11. С. 97–112.
10. *Любич Ю. И.* Введение в теорию банаховых представлений групп. Харьков: ХГУ, 1985.

Статья поступила 2 апреля 2008 г.

Сторожук Константин Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
stork@math.nsc.ru