Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 512.542

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

В. Н. Семенчук, С. А. Мокеева, О. А. Мокеева

Аннотация. Изучается строение классов конечных групп с заданной системой перестановочных обобщенно субнормальных подгрупп. В частности, из полученных результатов следует характеризация сверхрадикальных формаций и формаций Шеметкова.

Ключевые слова: конечная группа, формация, насыщенная формация, сверхрадикальная формация, формация Шеметкова.

В работе рассматриваются только конечные группы.

Построенная Виландтом теория субнормальных подгрупп оказала огромное влияние на развитие всей теории конечных групп. Понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы, являющееся естественным обобщением понятия субнормальности, для произвольных конечных групп впервые рассмотрено Л. А. Шеметковым в книге [1]. Там же им была определена основная проблематика теории $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

Напомним некоторые понятия. *Формацией* называется класс, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. *Насыщенной* называют формацию, замкнутую относительно фраттиниевых расширений. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом группы G*.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппу K группы G называют *$\mathfrak{F}$-субнормальной*, если либо $K = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_n = K$$

такая, что $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$, то в каждой разрешимой группе G множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп совпадает с множеством субнормальных подгрупп группы G. Однако для произвольной группы это не так.

Другое обобщение понятия $\mathfrak{F}$-субнормальности введено Кегелем в [2]. Подгруппу H называют *$\mathfrak{F}$-субнормальной в смысле Кегеля* или *$\mathfrak{F}$-достижимой*, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \cdots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

© 2009 Семенчук В. Н., Мокеева С. А., Мокеева О. А.

Отметим, что для любой непустой формации $\mathfrak{F}$ множество всех $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп произвольной группы G содержит множество всех субнормальных подгрупп группы G и множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G. Если же $\mathfrak{F}$ — непустая нильпотентная формация, то множество всех $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп в точности совпадает с множеством всех субнормальных подгрупп для любой группы G.

Как и в теории субнормальных подгрупп, развитие теории $\mathfrak{F}$-субнормальных и $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп началось с вопроса: *в каких случаях подгруппа, порожденная двумя $\mathfrak{F}$-субнормальными ($\mathfrak{F}$-достижимыми) подгруппами, снова является $\mathfrak{F}$-субнормальной ($\mathfrak{F}$-достижимой) подгруппой*?

Эта проблема впервые поставлена Л. А. Шеметковым и Кегелем в 1978 г. Ее решению посвящены работы [3, 4], результаты которых приведены в монографии [5]. Дальнейшее развитие этих результатов связано с рассмотрением произведений перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных ($\mathfrak{F}$-достижимых) подгрупп. Класс изучаемых формаций существенно расширяется, если условия порождения $\mathfrak{F}$-субнормальными ($\mathfrak{F}$-достижимыми) подгруппами заменить более слабым условием — произведением перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных ($\mathfrak{F}$-достижимых) подгрупп. В этом случае проблемы Шеметкова и Кегеля расширяются следующим образом.

Проблема 1. *Классифицировать насыщенные формации $\mathfrak{F}$ такие, что для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-достижима в G.*

Проблема 2. *Классифицировать насыщенные формации $\mathfrak{F}$ такие, что для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

В Коуровской тетради [6] Л. А. Шеметковым поставлена проблема классификации сверхрадикальных формаций. Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация,

2) любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

В настоящей работе доказана эквивалентность перечисленных выше проблем в случае, когда $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация.

В попытках решения этих и других классификационных проблем выявилась особая роль критических групп, т. е. таких групп, которые не принадлежат классу групп $\mathfrak{F}$, но все их собственные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$. Такие группы называют *минимальными не $\mathfrak{F}$-группами*, а их множество обозначают через $\mathscr{M}(\mathfrak{F})$.

В Коуровской тетради [6] Л. А. Шеметков поставил проблему о классификации насыщенных формаций, минимальные не $\mathfrak{F}$-группы которых либо группы Шмидта, либо группы простого порядка. В настоящее время такие формации называются *формациями Шеметкова.* В данной работе получены новые характеризации сверхрадикальных формаций и формаций Шеметкова. Используются стандартные определения и обозначения [1, 7].

В следующих леммах приводятся известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных и $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп, которые используются при доказательстве основных результатов работы.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда*

1) *если K — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K$, то K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;*

2) *если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G, то $H \cap K$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа K для любой подгруппы K группы G;*

3) *если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа K и K — $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G, то H — $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G;*

4) *если H_1 и H_2 — $\mathfrak{F}$-субнормальные ($\mathfrak{F}$-достижимые) подгруппы группы G, то $H_1 \cap H_2$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G;*

5) *если все композиционные факторы группы G принадлежат формации $\mathfrak{F}$, то каждая субнормальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной;*

6) *если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G, то H^x $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G для любого $x \in G$.*

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, H — подгруппа группы G и N — нормальная подгруппа из G. Тогда*

1) *если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G, то HN — $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G, а HN/N — $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G/N;*

2) если $N \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G тогда и только тогда, когда H/N — $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G/N.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Если A — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $A^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа группы G.*

Доказательство лемм 1–3 осуществляется простой проверкой.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Если $\mathfrak{H}$ — формация всех тех групп, у которых композиционные факторы принадлежат $\mathfrak{F}$, то для любой $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы A группы G справедливо равенство $A^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}$.*

Доказательство. По определению существует максимальная цепь

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_t = A$$

такая, что $G_i \supseteq (G_{i-1})^{\mathfrak{F}}$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Так как $G_{i-1}/(G_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, из наследственности $\mathfrak{F}$ следует, что $G_i/(G_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Отсюда $(G_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq (G_{i-1})^{\mathfrak{F}}$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Поскольку $(G_i)^{\mathfrak{F}} \triangleleft G_i$ и $(G_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq (G_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq G_i$, имеем $(G_i)^{\mathfrak{F}} \triangleleft (G_{i-1})^{\mathfrak{F}}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то наследственна и формация $\mathfrak{H}$. Кроме того, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому из $G_i/(G_i)^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$, $(G_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq (G_{i-1})^{\mathfrak{F}}$ следует, что $(G_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(G_i)^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$. Значит, подгруппа $A^{\mathfrak{H}}$ субнормальна в G, и на участке от $A^{\mathfrak{H}}$ до G все композиционные факторы принадлежат $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 2 из [8] подгруппа $A^{\mathfrak{H}}$ содержит $G^{\mathfrak{H}}$. Включение $A^{\mathfrak{H}} \subseteq G^{\mathfrak{H}}$ получаем из наследственности формации $\mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Пусть все композиционные факторы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G;*

2) *H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Тогда по определению H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G.

Пусть H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Тогда существует цепь

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_t = H, \qquad (*)$$

в которой для любого $i = 1, 2, \dots, t$ либо G_i нормальна в G_{i-1}, либо $(G_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq G_i$.

Пусть $(G_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq G_i$. Уплотним участок от G_i до G_{i-1} цепи $(*)$ до максимальной $(G_{i-1} - G_i)$-цепи.

Ввиду утверждения 1 леммы 1 все подгруппы G_{i-1}, содержащие G_i, $\mathfrak{F}$-субнормальны в G_{i-1}. Пусть теперь G_i нормальна в G_{i-1}. Можно считать, что G_i — максимальная нормальная подгруппа G_{i-1} (в противном случае уплотняем участок от G_i до G_{i-1} до композиционной $(G_{i-1} - G_i)$-цепи). В силу условия леммы $G_{i-1}/G_i \in \mathfrak{F}$, т. е. $(G_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq G_i$. Пришли к рассматриваемому выше случаю. Теперь по утверждению 3 леммы 1 подгруппа H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Лемма доказана.

Формация Шеметкова $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{S}$-*формацией Шеметкова*, если любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка.

Лемма 6 [9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ — наследственная локальная формация. Если $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$ и $G/K \in \mathscr{M}(\mathfrak{H})$, где $K \subseteq \Phi(G)$, то $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{H})$.*

Лемма 7. *Всякая непустая насыщенная формация $\mathfrak{F}$ такая, что для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, является $\mathfrak{S}$-формацией Шеметкова.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация такая, что для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, и пусть G — произвольная разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Если $G \notin \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$, то нетрудно заметить, что G — группа простого порядка q, где $q \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $G \in \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \mathscr{M}(\mathfrak{F})$. Рассмотрим случай, когда $\Phi(G) = 1$. Согласно теореме 1.5 из [10] $G = N \leftthreetimes M$, где N — единственная минимальная нормальная подгруппа из G, N — p-группа, $M \in \mathscr{M}(f(p))$, f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Очевидно, $C_G(N) = N$.

Покажем, что M имеет единственный класс максимальных сопряженных подгрупп. Предположим противное. Пусть M_1 и M_2 — максимальные несопряженные подгруппы из M. Тогда по теореме Оре $M = M_1M_2$. Так как $N = G^{\mathfrak{F}}$, очевидно, что NM_1 и NM_2 — $\mathfrak{F}$-нормальные максимальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G. Согласно лемме 1 M_1 и M_2 — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Тогда по условию M — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Получили противоречие. Итак, M имеет единственный класс максимальных сопряженных подгрупп. Значит, M — циклическая q-подгруппа. Так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и $G \notin \mathfrak{F}$, то $q \neq p$.

Теперь покажем, что $|M| = q$. Предположим противное. Пусть $|M| = q^n$, где $n > 1$. Пусть E и L — циклические группы соответственно порядков q^{n-1} и q. Обозначим через T регулярное сплетение $EwrL$. Пусть K — база сплетения, т. е. $T = K \leftthreetimes L$. Так как некоторая подгруппа группы T изоморфна M, то $T \notin f(p)$. Очевидно, что подгруппы K, L принадлежат формации $f(p)$.

Пусть $R = PwrT$, где $|P| = p$. Обозначим через C базу сплетения R. Тогда $R = C \leftthreetimes T = C \leftthreetimes (K \leftthreetimes L)$.

Так как $R/C \simeq K \rightthreetimes L \in \mathfrak{F}$, то $R^{\mathfrak{F}} \subseteq C$, значит, подгруппы CK и CL $\mathfrak{F}$-субнормальны в R. Легко видеть, что $CK \in \mathfrak{F}$ и $CL \in \mathfrak{F}$.

Ввиду леммы 1 нетрудно показать, что K и L $\mathfrak{F}$-субнормальны в R. Согласно условию подгруппа KL также $\mathfrak{F}$-субнормальна в R, что невозможно.

Полученное противоречие показывает, что $n = 1$. Следовательно, G — группа Шмидта. Итак, мы показали, что $G/\Phi(G)$ — группа Шмидта. По лемме 6 G — группа Шмидта, тем самым $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-формация Шеметкова. Лемма доказана.

Лемма 8. *Всякая непустая насыщенная нормально наследственная разрешимая формация $\mathfrak{F}$ такая, что для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, является наследственной формацией.*

Доказательство. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^S$, где $\mathfrak{F}^S$ — максимальная наследственная подформация из $\mathfrak{F}$. Допустим, что множество $\mathfrak{F} \backslash \mathfrak{F}^S$ непусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. В силу теоремы 1 из [11] и теоремы 4.3 из [1] формация $\mathfrak{F}^S$ насыщенна. Поэтому $\Phi(G) = 1$. Очевидно, что группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $C_G(N) = F(G) = N$. Так как $G \notin \mathfrak{F}^S$, в G найдется минимальная не $\mathfrak{F}^S$-группа H. Из нормальной наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $|\pi(H)| > 1$. Ясно, что H является также минимальной не $\mathfrak{F}$-группой.

По условию H — группа Шмидта. В этом случае $H = RQ$, где Q — нормальная силовская q-подгруппа, а R — циклическая r-подгруппа группы H, q и r — различные простые числа.

Если $H \cap N = 1$, то

$$HN/N \simeq H/H \cap N \simeq H \in \mathfrak{F}^S \subseteq \mathfrak{F}.$$

Получили противоречие с выбором H. Остается принять, что $K = H \cap N \neq 1$. Отсюда и из $H/K \in \mathfrak{F}$ получаем, что $K \subseteq Q$, а значит, N — q-группа. Рассмотрим $H^* = H/\Phi(H)$. Тогда группу H^* можно представить в виде

$$H^* = Q\Phi(H)/\Phi(H) \rightthreetimes R\Phi(H)/\Phi(H),$$

где $Q\Phi(H)/\Phi(H)$ — элементарная абелева q-группа, а $|R\Phi(H)/\Phi(H)| = r$. В силу того, что H^* не входит в $\mathfrak{F}$, по лемме 4.5 из [1]

$$H^*/F_q(H^*) \simeq Z_r \notin f(q),$$

где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Так как $C_G(N) = N$ и $N = F_q(G)$, то $F_q(G)$ является q-группой. Отсюда

$$r \in \pi(G/N) \subseteq \pi(f(q)).$$

Из нормальной наследственности формации $\mathfrak{F}$ по теореме 4.7 из [1] следует, что $f(q)$ является нормально наследственной формацией. Нетрудно показать, что $Z_r \in f(q)$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^S$. Лемма доказана.

Если π — множество простых чисел, то через $\mathfrak{G}_\pi$ обозначается класс всех π-групп. Напомним, что π-замкнутая группа — группа, обладающая нормальной π-холловой подгруппой; π-специальная группа — группа, обладающая нильпотентной нормальной π-холловой подгруппой; π-разложимая группа — группа, являющаяся одновременно π-специальной и π'-замкнутой; π-нильпотентная группа — группа, которая имеет нормальную p'-холлову подгруппу для каждого $p \in \pi$.

В следующей теореме I обозначает некоторое множество упорядоченных пар натуральных чисел.

Теорема 1. *Любая формация вида* $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ *обладает тем свойством, что для любой группы* G *и для любых ее перестановочных* $\mathfrak{F}$*-субнормальных подгрупп* H *и* K *подгруппа* HK $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G.

Доказательство. Согласно теоремам 1 и 2 из [12] всякая формация вида $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ обладает тем свойством, что она содержит любую группу $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G.

Дальнейшее доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Пусть A и B — перестановочные $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Обозначим $T = AB$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Учитывая лемму 2, по индукции получаем, что TN/N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа GN. По лемме 2 TN — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Если $TN \neq G$, то по индукции T — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа из TN, значит, T $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Пусть теперь $TN = G$ для любой нормальной подгруппы группы G. Очевидно, что $T_G = 1$. Если $A^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то в силу леммы 1 подгруппа $A^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в G. По теореме Виландта 7.10 из [1]

$$1 \neq (A^{\mathfrak{F}})^G = (A^{\mathfrak{F}})^{TN} \subseteq T.$$

Тем самым $T_G \neq 1$. Получили противоречие. Значит, $A^{\mathfrak{F}} = 1$. Аналогичным образом доказывается, что $B^{\mathfrak{F}} = 1$.

Покажем, что $AN \in \mathfrak{F}$, $BN \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть N — абелева подгруппа. Согласно теореме 15.10 из [1] $(AN)^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(AN)$. Так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, то $AN \in \mathfrak{F}$. Аналогично доказывается, что $BN \in \mathfrak{F}$.

2. Пусть N — неабелева подгруппа. Тогда $N = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t$ — прямое произведение изоморфных неабелевых простых групп. Так как $A \in \mathfrak{F}$, то $(AN)^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. Если $(AN)^{\mathfrak{F}} = N$, то $AN = (AN)^{\mathfrak{F}}A$, что невозможно, ибо A $\mathfrak{F}$-субнормальна в AN. Итак, $(AN)^{\mathfrak{F}} \subset N$. Если $(AN)^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то

$$(AN)^{\mathfrak{F}} = N_{i_1} \times N_{i_2} \times \cdots \times N_{i_n}.$$

Поскольку $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $N/(AN)^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Но тогда нетрудно заметить, что $N \in \mathfrak{F}$. По лемме 1 N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в AN. Согласно условию $AN \in \mathfrak{F}$. Аналогично получаем, что $BN \in \mathfrak{F}$. По лемме 2 AN и BN — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. По условию имеем $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то T — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$ *— наследственная формация. Тогда для любой группы* G *и любых ее перестановочных* $\mathfrak{F}$*-достижимых подгрупп* H *и* K *подгруппа* HK $\mathfrak{F}$*-достижима в* G.

Следствие 1.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— формация всех* π*-разложимых групп. Тогда она обладает тем свойством, что для любой группы* G *и любых ее перестановочных* $\mathfrak{F}$*-субнормальных подгрупп* H *и* K *подгруппа* HK $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G.

Следствие 1.3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— формация всех* π*-нильпотентных групп. Тогда она обладает тем свойством, что для любой группы* G *и любых ее перестановочных* $\mathfrak{F}$*-субнормальных подгрупп* H *и* K *подгруппа* HK $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G.

Следствие 1.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех π-замкнутых групп. Тогда она обладает тем свойством, что для любой группы G и любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-достижимые $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация;

3) для любой группы G и любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;

4) для любой группы G и любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-достижима в G.

Доказательство. Тот факт, что утверждения 1 и 2 эквивалентны, следует из теоремы 1 работы [12]. Покажем, что из 2 следует 3. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Пусть A и B — перестановочные $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Обозначим $T = AB$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Учитывая лемму 2, по индукции получаем, что TN/N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа GN. По лемме 2 TN — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Если $TN \neq G$, то по индукции T — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа из TN, значит, T $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Пусть теперь $TN = G$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G. Очевидно, что $T_G = 1$. Если $A^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то в силу леммы 1 подгруппа $A^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в G. Тогда по теореме Виландта 7.10 из [1]

$$1 \neq (A^{\mathfrak{F}})^G = (A^{\mathfrak{F}})^{TN} \subseteq T.$$

Следовательно, $T_G \neq 1$. Получили противоречие. Тем самым $A^{\mathfrak{F}} = 1$. Аналогично доказывается, что $B^{\mathfrak{F}} = 1$.

Покажем, что $AN \in \mathfrak{F}$, $BN \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть N — абелева подгруппа. Согласно теореме 15.10 из [1] $(AN)^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(AN)$. Так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, то $AN \in \mathfrak{F}$. Аналогично доказывается, что $BN \in \mathfrak{F}$.

2. Пусть N — неабелева подгруппа. Тогда $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$ — прямое произведение изоморфных неабелевых простых групп. Поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то $(AN)^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. Если $(AN)^{\mathfrak{F}} = N$, то $AN = (AN)^{\mathfrak{F}}A$, что невозможно, ибо A $\mathfrak{F}$-субнормальна в AN. Итак, $(AN)^{\mathfrak{F}} \subset N$. Если $(AN)^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то

$$(AN)^{\mathfrak{F}} = N_{i_1} \times N_{i_2} \times \dots \times N_{i_n}.$$

Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $N/(AN)^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Нетрудно заметить, что $N \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 1 N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в AN. По условию имеем $AN \in \mathfrak{F}$. Аналогичным образом получаем, что $BN \in \mathfrak{F}$. По лемме 2 AN и BN — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Согласно условию $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то T — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

Покажем, что из утверждения 3 следует утверждение 2.

Пусть G — контрпример минимального порядка. В этом случае $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы, но $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как AN/N и BN/N — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы G/N, по индукции $G/N \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = G^{\mathfrak{F}}$ и $\Phi(G) = 1$.

Рассмотрим подгруппы AN и BN. Так как A — собственная $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G и $N = G^{\mathfrak{F}}$, очевидно, что $AN \neq G$. Аналогично $BN \neq G$. Покажем, что $AN \in \mathfrak{F}$.

Пусть N — абелева группа. Согласно теореме 15.10 из [1] $(AN)^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(AN)$. Так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, то $AN \in \mathfrak{F}$.

Пусть N — неабелева группа. В этом случае $N = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t$ — прямое произведение изоморфных неабелевых простых групп и $C_G(N) = 1$.

Рассмотрим подгруппу $H = AN$. По лемме 2 $H = AN$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Рассмотрим подгруппу $A^H \subseteq H \neq G$. По тождеству Дедекинда

$$A^H = A^H \cap G = A^H \cap AB = A(A^H \cap B).$$

По лемме 1 $A^H \cap B$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа A^H. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $B \in \mathfrak{F}$, то $A^H \cap B \in \mathfrak{F}$. По индукции $A^H \in \mathfrak{F}$. Если $A^H \cap N = 1$, то $A^H \subseteq C_G(N) = 1$. Получили противоречие. Значит, $A^H \cap N \neq 1$. Так как A^H — нормальная подгруппа из AN, то $A^H \cap N$ — нормальная подгруппа из N. Тогда

$$A^H \cap N = N_{i_1} \times N_{i_2} \times \cdots \times N_{i_k},$$

где N_{i_j} — изоморфные неабелевы простые группы, $j = 1, 2, \ldots, k$. В силу того, что $A^H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, имеем $A^H \cap N \in \mathfrak{F}$. Отсюда легко следует, что $N \in \mathfrak{F}$. Так как $N = G^{\mathfrak{F}}$, по лемме 1 N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Поскольку $AN \neq G$, по индукции $AN \in \mathfrak{F}$. Аналогично доказывается, что $BN \in \mathfrak{F}$.

Пусть K — добавление к подгруппе N в группе G. Так как $\Phi(G) = 1$, то $K \neq G$. В силу насыщенности формации $\mathfrak{F}$ из $G/N = KN/N \simeq K/K \cap N \in \mathfrak{F}$ и $K \cap N \subseteq \Phi(K)$ получаем, что $K \in \mathfrak{F}$. По тождеству Дедекинда

$$AN = AN \cap KN = N(AN \cap K).$$

Если $AN \cap K = 1$, то $AN = N$. Тогда $G = AB = ANB = NB$, что невозможно, так как $N = G^{\mathfrak{F}}$ и B — собственная $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

Итак, $AN \cap K \neq 1$. Поскольку AN — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G и $AN \in \mathfrak{F}$, из наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $AN \cap K$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Аналогично получаем, что $BN = N(BN \cap K)$, где $BN \cap K$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Тогда

$$G = AB = N(AN \cap K)(BN \cap K).$$

Согласно условию $(AN \cap K)(BN \cap K)$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, что невозможно, так как $N = G^{\mathfrak{F}}$ и $(AN \cap K)(BN \cap K) \subseteq K$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$.

Покажем, что из утверждения 4 следует утверждение 3.

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой это неверно. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Если A и B — перестановочные $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G, то ввиду леммы 2 AN/N и BN/N — перестановочные $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы из G/N. Так как $|G/N| < |G|$, по индукции $AN/N \cdot BN/N = ABN/N$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа из G/N.

Пусть $\mathfrak{H}$ — формация всех групп, все композиционные факторы которых принадлежат $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 4 $A^{\mathfrak{H}} = B^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}$. Если G не принадлежит $\mathfrak{H}$, то, взяв N в $G^{\mathfrak{H}}$, получим, что $AB = ABN$ есть $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G; противоречие. Значит, $G \in \mathfrak{H}$. Теперь утверждение теоремы следует из леммы 5.

Тот факт, что из 4 следует 1, доказывается аналогично тому, как устанавливалась импликация «из 3 следует 2». Теорема доказана.

Следствие 1.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная разрешимая насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *формация $\mathfrak{F}$ такова, что для любой группы G и любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;*

2) *формация $\mathfrak{F}$ такова, что для любой группы G и любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-достижима в G;*

3) *формация $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{(i,j)\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{S}_{\pi_j}$.*

Доказательство. Тот факт, что утверждения 1 и 2 эквивалентны, следует из теоремы 2. Покажем, что утверждения 2 и 3 эквивалентны. Действительно, по лемме 6 $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{S}$-формацией Шеметкова. Теперь утверждение 3 вытекает из следствия 1 в [13]. Утверждение 2 получается из утверждения 3 теоремы 2. Следствие доказано.

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация такая, что $\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация;*

2) *формация $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация. Вначале докажем, что любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Пусть G — произвольная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Согласно условию теоремы G разрешима. Если $G \notin \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$, то нетрудно заметить, что G — группа простого порядка q, где $q \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Рассмотрим случай $\Phi(G) = 1$. Согласно теореме 1.5 из [10] $G = N \leftthreetimes M$, где N — единственная минимальная нормальная подгруппа из G, N — p-группа, $M \in \mathscr{M}(f(p))$, f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Очевидно, $C_G(N) = N$.

Покажем, что M является примарной циклической подгруппой. Предположим противное. Так как M — разрешимая группа, в M существуют максимальные подгруппы M_1 и M_2 такие, что $M = M_1M_2$. Поскольку $N = G^{\mathfrak{F}}$, очевидно, что NM_1 и NM_2 — $\mathfrak{F}$-нормальные максимальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G. Но тогда $G = NM_1 \cdot NM_2$. Так как $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация, то $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Итак, M имеет единственный класс максимальных сопряженных подгрупп. Значит, M — циклическая q-подгруппа. Так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и $G \notin \mathfrak{F}$, то $q \neq p$.

Теперь покажем, что $|M| = q$. Предположим противное. Пусть $|M| = q^n$, где $n > 1$. Пусть E и L — циклические группы соответственно порядков q^{n-1} и q. Обозначим через T регулярное сплетение $EwrL$. Пусть K — база сплетения, т. е. $T = K \leftthreetimes L$. Так как некоторая подгруппа группы T изоморфна M, то $T \notin f(p)$. Очевидно, что подгруппы K, L принадлежат формации $f(p)$.

Пусть $R = PwrT$, где $|P| = p$. Обозначим через C базу сплетения R. Тогда $R = C \leftthreetimes T = C \leftthreetimes (K \leftthreetimes L)$.

Так как $R/C \simeq K \leftthreetimes L \in \mathfrak{F}$, то $R^{\mathfrak{F}} \subseteq C$. Значит, подгруппы CK и CL $\mathfrak{F}$-субнормальны в R.

Легко видеть, что $CK \in \mathfrak{F}$, $CL \in \mathfrak{F}$.

Поскольку $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация, то $R \in \mathfrak{F}$. Но $F_p(R) = C$, и поэтому $T \simeq R/C \in f(p)$.

Полученное противоречие показывает, что $n = 1$. Следовательно, G — группа Шмидта. Итак, мы показали, что $G/\Phi(G)$ — группа Шмидта. Теперь из леммы 6 следует, что G — группа Шмидта.

Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ имеет полный локальный экран h такой, что $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi(f(p))}$ для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$. Действительно, пусть $\mathfrak{F}^*$ — формация, у которой есть локальный экран h. Покажем, что $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$.

Так как $f(p) \subseteq h(p)$ для любого простого p из $\pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$.

Установим обратное включение.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}^* \backslash \mathfrak{F}$. Поскольку $h(p)$ — наследственная формация, формация $\mathfrak{F}^*$ также наследственна. Это значит, что $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$. Так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, нетрудно показать, что $\Phi(G) = 1$.

Выше мы показали, что G либо группа простого порядка, либо группа Шмидта. Пусть G — группа простого порядка и $|G| = q$. Нетрудно показать, что $\pi(\mathfrak{F}^*) = \pi(\mathfrak{F})$. Так как $G \in \mathfrak{F}^*$, то $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}$; противоречие.

Пусть теперь G — группа Шмидта. Так как $\Phi(G) = 1$, из свойств группы Шмидта следует, что $G = G_p \leftthreetimes G_q$, где $G_p = F_p(G)$ и $|G_q| = q$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}^*$, имеем $G/G_p \in h(p)$. Из $G/G_p \simeq G_q$ следует, что $G_q \in h(p) = \mathfrak{G}_{\pi(f(p))}$. Так как $q \in \pi(f(p))$ и $f(p)$ — наследственная формация, то $G_q \in f(p)$. Теперь из того факта, что $G/G_p \in \mathfrak{F}$, где G_p — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, и $G/G_p \in f(p)$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$.

Так как h — локальный экран формации $\mathfrak{F}$, то

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'} \mathfrak{G}_{\pi(f(p))} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Тем самым $\mathfrak{F}$ — формация из п. 2.

Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{(i,j) \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i} \mathfrak{G}_{\pi_j}$, и пусть G — группа такая, что $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из группы G. Покажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Доказательство данного утверждения проведем индукцией по порядку группы G. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G. Очевидно, что AN/N и BN/N — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. По индукции $G/N \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. Очевидно, что $\Phi(G) = 1$ и $N = G^{\mathfrak{F}}$.

Покажем, что $AN \in \mathfrak{F}$. Если N — абелева группа, то согласно теореме 15.10 из [1] группа AN принадлежит $\mathfrak{F}$. Рассмотрим теперь случай, когда N — неабелева группа. В этом случае $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$ — прямое произведение изоморфных неабелевых простых групп и $C_G(N) = 1$. Рассмотрим подгруппу $H = AN$. Ясно, что $H = AN$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

Рассмотрим подгруппу $A^H \subseteq H \neq G$. По тождеству Дедекинда

$$A^H = A^H \cap G = A^H \cap AB = A(A^H \cap B).$$

Очевидно, что $A^H \cap B$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа A^H. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $B \in \mathfrak{F}$, то $A^H \cap B \in \mathfrak{F}$. По индукции $A^H \in \mathfrak{F}$. Если $A^H \cap N = 1$, то $A^H \subseteq C_G(N) = 1$; противоречие. Значит, $A^H \cap N \neq 1$. Поскольку A^H — нормальная подгруппа из AN, то $A^H \cap N$ — нормальная подгруппа из N. Но тогда

$$A^H \cap N = N_{i_1} \times N_{i_2} \times \dots \times N_{i_k},$$

где N_{i_j} — изоморфные неабелевы простые группы. Так как $A^H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $A^H \cap N \in \mathfrak{F}$. Тем самым $N \in \mathfrak{F}$. Поскольку $N = G^{\mathfrak{F}}$ и A — собственная $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, имеем $AN \neq G$. Очевидно, что N и A $\mathfrak{F}$-субнормальны в AN. По индукции $AN \in \mathfrak{F}$. Отсюда $AN \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ для любой (i, j) из I.

Аналогично доказывается, что $BN \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ для любой (i, j) из I. Из того, что $AN \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$, следует $AN/O_{\pi_i}(AN) \in \mathfrak{G}_{\pi_j}$.

Рассмотрим случаи $N \cap O_{\pi_i}(AN) \neq 1$ и $N \cap O_{\pi_i}(AN) = 1$.

Пусть $N \cap O_{\pi_i}(AN) \neq 1$. Покажем, что $N \in \mathfrak{G}_{\pi_i}$. Если N абелева, то N — p-группа. Следовательно, $N \in \mathfrak{G}_{\pi_i}$. Если N неабелева, то

$$N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$$

есть прямое произведение изоморфных неабелевых простых групп.

Так как $N \cap O_{\pi_i}(AN)$ — нормальная подгруппа из N, то

$$N \cap O_{\pi_i}(AN) = N_{i_1} \times N_{i_2} \times \dots \times N_{i_n}.$$

Поскольку $N \cap O_{\pi_i}(AN) \in \mathfrak{G}_{\pi_i}$, очевидно, что $N \in \mathfrak{G}_{\pi_i}$. Так как $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$, то $G \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ для любой (i, j) из I. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$; противоречие.

Пусть теперь $N \cap O_{\pi_i}(AN) = 1$. Если N неабелева, то $C_G(N) = 1$. Тогда

$$O_{\pi_i}(AN) \subseteq C_G(N) = 1.$$

Отсюда следует, что $O_{\pi_i}(AN) = 1$, т. е. $AN \in \mathfrak{G}_{\pi_j}$.

Рассмотрим подгруппу $N \cap O_{\pi_i}(BN)$.

Если $N \cap O_{\pi_i}(BN) \neq 1$, то, как и выше, $G \in \mathfrak{F}$; противоречие.

Если $N \cap O_{\pi_i}(BN) = 1$, то, как и выше, $BN \in \mathfrak{G}_{\pi_j}$. Так как $G = AN \cdot BN$, то $G \in \mathfrak{G}_{\pi_j}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$; противоречие.

Если N — абелева группа, то $C_G(N) = N$. Тогда

$$O_{\pi_i}(AN) \subseteq C_G(N) = N.$$

Ввиду $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ получаем, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ для любой (i, j) из I. Это значит, что $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова;*

2) *формация $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-достижимые $\mathfrak{F}$-подгруппы из G и $\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$;*

3) *$\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация и $\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$;*

4) *формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$ и для любой группы G и любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;*

5) *формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$ и для любой группы G и любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-достижима в G;*

6) *формация $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ и $\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$.*

Доказательство следует из теорем 1 и 2 и лемм 7 и 9.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
2. *Kegel O. H.* Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilorverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. Bd 30, Heft 3. S. 225–228.
3. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: Тр. Ин-та математики АН Украины. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 27–54.
4. *Ballester-Bolinches A., Doerk K., Perez-Ramos M. D.* On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups // J. Algebra. 1992. V. 148, N 2. P. 42–52.
5. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.
6. *Нерешенные вопросы теории групп.* Коуровская тетрадь. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1992.
7. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
8. *Каморников С. Ф.* О некоторых свойствах формаций квазинильпотентных групп // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 2. С. 71–77.
9. *Семенчук В. Н.* Описание конечных разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для произвольной тотально локальной формации $\mathfrak{F}$ // Мат. заметки. 1988. Т. 43, № 4. С. 452–459.
10. *Семенчук В. Н.* Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 3. С. 348–382.
11. *Васильев А. Ф.* О максимальной наследственной подформации локальной формации // Вопросы алгебры. 1990. Вып. 5. С. 39–45.
12. *Семенчук В. Н., Мокеева С. А.* Конечные группы, факторизуемые $\mathfrak{F}$-достижимыми подгруппами // Изв. Гомельского гос. университета им. Ф. Скорины. 2002. № 5. С. 47–49.
13. *Семенчук В. Н.* Об одной проблеме в теории формаций // Весцi АН Беларусi. 1996. № 3. С. 25–29.

Статья поступила 18 апреля 2007 г.

Семенчук Владимир Николаевич, Мокеева Ольга Александровна
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
kolenchukova@gsu.unibel.by, mokeeva@tut.by

Мокеева Светлана Александровна
Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации,
пр. Октября, 50, Гомель 246029, Беларусь