Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 512.54

УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Л. Мяо, Г. Цянь

Аннотация. Подгруппа H называется *$\mathscr{M}$-добавляемой* в конечной группе G, если в группе G существует подгруппа B такая, что $G = HB$ и H_1B является собственной подгруппой в G для любой максимальной подгруппы H_1 группы H. Изучается влияние $\mathscr{M}$-добавлений силовских подгрупп и выводятся условия разрешимости и p-сверхразрешимости конечных групп.

Ключевые слова: разрешимая группа, силовская подгруппа, $\mathscr{M}$-добавляемая подгруппа, конечная группа.

1. Введение

Подгруппа H группы G называется *добавляемой* в G, если в G существует подгруппа K такая, что $G = HK$. Если при этом $H \cap K = 1$, то H называется *дополняемой* в G. Хорошо известно, что добавления некоторых основных подгрупп конечных групп играют важнейшую роль в изучении строения конечных групп. В 1937 г. Холлом [1] впервые доказано, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа группы G дополняема в G. Кегель [2, 3] доказал, что группа G разрешима, если каждая максимальная подгруппа группы G имеет циклическое добавление в G или если некоторая нильпотентная подгруппа группы G имеет нильпотентное добавление в G. Позднее Арад и Вард [4] показали, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда любые силовские 2-подгруппа и 3-подгруппа группы G дополняемы в G. Несколько лет назад, рассматривая добавляемые подгруппы специального вида (c-добавляемые подгруппы), Ванг [5] получил ряд характеризационных теорем для разрешимых и сверхразрешимых групп. Совсем недавно Мяо и Го [6] предложили новое понятие $\mathscr{F}$-s-добавляемых подгрупп и установили несколько новых критериев сверхразрешимости и p-нильпотентности конечных групп. Здесь мы вводим следующее новое понятие $\mathscr{M}$-добавляемых подгрупп.

Определение 1.1. Подгруппа H называется *$\mathscr{M}$-добавляемой* в конечной группе G, если существует подгруппа B группы G такая, что $G = HB$ и при этом H_1B является собственной подгруппой группы G для любой максимальной подгруппы H_1 группы H. В частности, 1 $\mathscr{M}$-добавляема в любой нетривиальной группе, поскольку множество максимальных подгрупп группы 1 пусто.

В настоящей работе будут исследованы свойства $\mathscr{M}$-добавляемых подгрупп конечной группы G и будет получено условие разрешимости групп в терминах $\mathscr{M}$-добавлений силовских подгрупп.

This research is supported by TianYuan Fund of Mathematics of China (Grant #10626047) and NSFC, and Qing Lan Project of Jiangsu Province.

Все рассматриваемые группы конечны. Обозначения, в основном, стандартны и могут быть найдены в [7–9]. Тот факт, что G является полупрямым произведением подгрупп H и K, где H нормальна в G, обозначается через $G = [H]K$. Запись $H < G$ указывает на то, что H — собственная подгруппа группы G. Запись $M <\cdot\, G$ означает, что M — максимальная подгруппа группы G. Через G_p обозначается силовская p-подгруппа группы G. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G.

2. Предварительные сведения

Приведем некоторые известные результаты, используемые в дальнейшем.

Лемма 2.1. *Пусть G — группа. Тогда*

(1) *Если H $\mathscr{M}$-добавляема в G и $H \leq M \leq G$, то H $\mathscr{M}$-добавляема в M.*

(2) *Пусть $N \trianglelefteq G$ и $N \leq H$. Если H $\mathscr{M}$-добавляема в G, то H/N $\mathscr{M}$-добавляема в G/N.*

(3) *Пусть π — множество простых чисел. Пусть K — нормальная π'-подгруппа и H — π-подгруппа группы G. Тогда H $\mathscr{M}$-добавляема в G тогда и только тогда, когда HK/K $\mathscr{M}$-добавляема в G/K.*

Доказательство. (1) Если H $\mathscr{M}$-добавляема в G, то существует подгруппа B группы G такая, что $G = HB$ и $H_1B < G$ для любой максимальной подгруппы H_1 группы H. Ясно, что $B \cap M \leq M$ и $M = M \cap HB = H(M \cap B)$. Поскольку $H_1B < G$ для любой максимальной подгруппы H_1 группы H, получаем, что $M \cap H_1B = H_1(M \cap B)$ — собственная подгруппа в M.

(2) Если H $\mathscr{M}$-добавляема в G, то существует подгруппа B такая, что $G = HB$ и $H_1B < G$ для любой максимальной подгруппы H_1 группы H. Следовательно, $BN < G$. В противном случае возьмем T, максимальную подгруппу в H, содержащую N. Тогда $T = T \cap BN = N(T \cap B)$ и, значит, $TB = N(T \cap B)B = NB = G$; противоречие. Легко показать, что $(H/N)(BN/N) = G/N$. Для любой максимальной подгруппы H_1 группы H, содержащей N, выполнено $(H_1/N)(BN/N) = H_1B/N < G/N$. Следовательно, H/N $\mathscr{M}$-добавляема в G/N.

(3) Если H $\mathscr{M}$-добавляема в G, то существует подгруппа B группы G такая, что $G = HB$ и $H_1B < G$ для любой максимальной подгруппы H_1 группы H. Ясно, что $(HK/K)(BK/K) = G/K$. Поскольку K — нормальная π'-подгруппа и H — π-подгруппа группы G, для любой максимальной подгруппы T/K группы HK/K выполнено равенство $T = H_1K$, где H_1 — максимальная подгруппа в H. Следовательно, $(H_1K/K)(BK/K) = H_1BK/K < G/K$. В противном случае, т. е. при $H_1BK = G$, получаем, что $|G : H_1B| = |K : K \cap H_1B|$ является π'-числом, с другой стороны, $|G : H_1B| = |HB : H_1B|$ — π-число; противоречие.

Обратно, если HK/K $\mathscr{M}$-добавляема в G/K, то аналогичным образом получаем, что H $\mathscr{M}$-добавляема в G.

Лемма 2.2. *Пусть P — p-подгруппа группы G, где p — простой делитель порядка $|G|$. Если P $\mathscr{M}$-добавляема в G, то существует подгруппа B такая, что $|G : P_1B| = p$ для любой максимальной подгруппы P_1 группы P.*

Доказательство. Поскольку P $\mathscr{M}$-добавляема в G, существует подгруппа B группы G такая, что $G = PB$ и $P_1B < G$ для любой максимальной подгруппы P_1 группы P. Тогда $P_1 \leq P \cap P_1B = P_1(P \cap B) < P$. Так как P_1 — максимальная подгруппа группы P, выполнено $P \cap B \leq P_1$ и, значит, $P \cap B = P_1 \cap B$. Следовательно, $|G : P_1B| = |PB : P_1B| = p$.

Лемма 2.3 [10, теорема 4.6]. *Если H — подгруппа группы G и $|G : H| = p$, где p — наименьший простой делитель порядка $|G|$, то $H \trianglelefteq G$.*

Лемма 2.4. *Пусть G — конечная группа. Если любая силовская подгруппа группы G $\mathscr{M}$-добавляема в G, то G не является неабелевой простой группой.*

Доказательство. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G. Тогда по предположению P $\mathscr{M}$-добавляема в G и существует подгруппа B такая, что $G = PB$ и $P_1B < G$ для любой максимальной подгруппы P_1 группы P. Ясно, что $|G : P_1B| = p$ в силу леммы 2.2. Более того, можно взять в качестве p наименьший простой делитель порядка $|G|$, и тогда P_1B — нетривиальная нормальная подгруппа группы G по лемме 2.3. Следовательно, G не является неабелевой простой группой.

Лемма 2.5. *Пусть $G = AB$, где A и B — подгруппы группы G. Пусть A_p и B_p — силовские p-подгруппы в A и B соответственно. Тогда A_pB_p — силовская p-подгруппа в G тогда и только тогда, когда $A_pB_p = B_pA_p$.*

Доказательство. Необходимость очевидна, доказать нужно только достаточность. По предположению A_pB_p — подгруппа группы G. Тогда A_pB_p — p-подгруппа группы G. По теореме Силова в G существует силовская p-подгруппа P такая, что $A_pB_p \leq P$. Ясно, что P равна произведению A_p^x и B_p^y, где x и y принадлежат A и B соответственно. Следовательно, $A_p \leq A \cap A_p^x B_p^y = A_p^x(A \cap B_p^y)$. Поскольку A_p — силовская p-подгруппа в A, выполнено $A_p = A_p^x(A \cap B_p^y)$ и, значит, $A_p = A_p^x$. Рассуждая аналогичным образом, выводим, что $B_p = B_p^y$. Таким образом, $P = A_p^x B_p^y = A_pB_p$. Лемма доказана.

Лемма 2.6 [11, теорема 1.8.17]. *Пусть N — нетривиальная разрешимая нормальная подгруппа группы G. Если $N \cap \Phi(G) = 1$, то подгруппа Фиттинга $F(N)$ группы N равна прямому произведению минимальных нормальных подгрупп группы G, содержащихся в N.*

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть G — p-разрешимая группа и p — простой делитель порядка $|G|$. Если силовская p-подгруппа P группы G $\mathscr{M}$-добавляема в G, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Тогда имеют место следующие факты.

1. $O_{p'}(G) = 1$.

Пусть $L = O_{p'}(G) \neq 1$. Рассмотрим G/L. Ясно, что PL/L — силовская p-подгруппа группы G/L. Поскольку P $\mathscr{M}$-добавляема в G, получаем, что PL/L $\mathscr{M}$-добавляема в G/L по лемме 2.1. Следовательно, G/L удовлетворяет условию теоремы. Из минимальности группы G вытекает, что G/L p-сверхразрешима и, значит, G тоже p-сверхразрешима; противоречие.

2. G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что G/N p-сверхразрешима и $N \nleq \Phi(G)$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Поскольку G p-разрешима, N — элементарная абелева p-группа. Рассмотрим G/N. Ясно, что P/N будет силовской p-подгруппой группы G/N. Так как P $\mathscr{M}$-добавляема в G, из леммы 2.1 следует, что P/N $\mathscr{M}$-добавляема в G/N. Из минимальности группы G вытекает, что G/N p-сверхразрешима. С другой стороны, класс всех

p-сверхразрешимых групп — насыщенная формация, поэтому $N \nleq \Phi(G)$. По лемме 2.6 получаем $N = F(G) = O_p(G)$.

3. G p-сверхразрешима.

Поскольку $N \nleq \Phi(G)$, существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = NM$ и $N \cap M = 1$. Пусть $P = NM_p$, где M_p — силовская подгруппа группы M. Группа P $\mathscr{M}$-добавляема в G, поэтому существует подгруппа B группы G такая, что $G = PB$ и TB — собственная подгруппа в G для любой максимальной подгруппы T группы P. Следовательно, можно выбрать максимальную подгруппу P_1 группы P, содержащую M_p. Ясно, что $N \nleq P_1$. По лемме 2.2 выполнено $|G : P_1B| = p$. Поскольку N — минимальная нормальная подгруппа группы G, либо $N \cap P_1B = 1$, либо $N \leq P_1B$. Если $N \cap P_1B = 1$, то $|N| = p$ и, значит, p-сверхразрешимость группы G/N влечет p-сверхразрешимость группы G; противоречие. С другой стороны, если $N \leq P_1B$, то $P_1B = NP_1B = PB = G$; противоречие.

Последнее противоречие завершает доказательство.

Следствие 3.2. *Пусть G — p-разрешимая группа и P — силовская p-подгруппа группы G, где p — простой делитель порядка $|G|$. Если любая максимальная подгруппа группы P $\mathscr{M}$-добавляема в G, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G.

Следуя доказательству теоремы 3.1, опять получаем, что $O_{p'}(G) = 1$ и N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в P, такая, что G/N p-сверхразрешима и $N \nleq \Phi(G)$.

Далее, $G = NM$, где M — максимальная подгруппа группы G. Пусть $P = NM_p$, где M_p — силовская p-подгруппа группы M. Ясно, что существует максимальная подгруппа P_1 группы P такая, что $M_p < P_1$. В противном случае если $N = P$, то сразу $|P| = p$; противоречие. Если $N = P_1$, то $|N| = p$, так как $N \cap M = 1$; снова противоречие. По условию P_1 $\mathscr{M}$-добавляема в G, т. е. существует подгруппа B группы G такая, что $G = P_1B$ и TB — собственная подгруппа группы G для любой максимальной подгруппы T группы P_1. Значит, в P_1 можно выбрать максимальную подгруппу T, содержащую M_p. Очевидно, $N \nleq T$. По лемме 2.2 выполнено $|G : TB| = p$. Поскольку N — минимальная нормальная подгруппа группы G, либо $N \cap TB = 1$, либо $N \leq TB$. Если $N \cap P_1B = 1$, то $|N| = p$; противоречие. С другой стороны, если $N \leq TB$, то $TB = NTB = PB = G$; противоречие.

Последнее противоречие завершает доказательство.

Теорема 3.3. *Пусть G — p-разрешимая группа и p — простой делитель порядка $|G|$. Если любая максимальная подгруппа группы $F_p(G)$, содержащая $O_{p'}(G)$, $\mathscr{M}$-добавляема в G, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Тогда имеют место следующие факты.

1. $O_{p'}(G) = 1$.

Пусть $T = O_{p'}(G) \neq 1$. Рассмотрим G/T. Во-первых, $F_p(G/T) = F_p(G)/T$. Пусть M/T — максимальная подгруппа группы $F_p(G/T)$. Тогда M — максимальная подгруппа группы $F_p(G)$, содержащая $O_{p'}(G)$. Так как M $\mathscr{M}$-добавляема в G, то M/T будет $\mathscr{M}$-добавляемой в G/T по лемме 2.1. Таким образом,

G/T удовлетворяет условию теоремы. Из минимальности группы G следует, что G/T p-сверхразрешима. Значит, таковой является и G; противоречие.

2. $\Phi(G) = 1$ и $F_p(G) = F(G) = O_p(G)$.

Если это не так, то $L = \Phi(G) \neq 1$. Рассмотрим G/L. Поскольку $O_{p'}(G) = 1$, нетрудно понять, что $F_p(G) = F(G) = O_p(G)$. Отсюда следует, что $F_p(G/L) = O_p(G/L) = O_p(G)/L = F_p(G)/L$. Если P_1/L — максимальная подгруппа группы $F_p(G/L)$, то P_1 — максимальная подгруппа группы $F_p(G)$. Группа P_1 $\mathscr{M}$-добавляема в G, поэтому P_1/L будет $\mathscr{M}$-добавляемой в G/L по лемме 2.1. Таким образом, G/L удовлетворяет условию теоремы. Из минимальности группы G следует, что G/L p-сверхразрешима. Тогда таковой является и группа G, поскольку класс всех p-сверхразрешимых групп — насыщенная формация; противоречие.

3. Любая минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $F(G)$, циклическая порядка p.

В силу леммы 2.6 и п. 2 группа $F(G)$ будет прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы G, содержащихся в $F(G)$. Поскольку G p-разрешима и $O_{p'}(G) = 1$, выполнено $C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$. Теперь из условия $\Phi(G) = 1$ вытекает, что $F(G)$ — нетривиальная элементарная абелева p-группа. Значит, $C_G(F(G)) = F(G)$. Следовательно, можно считать, что $P = F(G)$. Таким образом, $P = R_1 \times \ldots \times R_t$, где R_i — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $F(G)$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Рассмотрим максимальную подгруппу P_1 группы P следующего вида:

$$P_1 = R_1 \times \ldots \times R_{i-1} \times {R_i}^* \times R_{i+1} \times \ldots \times R_t.$$

Здесь ${R_i}^*$ — максимальная подгруппа группы R_i для некоторого i. Обозначим через K нормальную подгруппу $R_1 \times \ldots \times R_{i-1} \times R_{i+1} \times \ldots \times R_t$ в G, тогда $P_1 = {R_i}^* K$. По условию P_1 $\mathscr{M}$-добавляема в G, т. е. существует подгруппа B группы G такая, что $G = P_1 B$ и $TB < G$ для любой максимальной подгруппы T группы P_1. По лемме 2.2 выполнено $|G : TB| = p$. Следовательно, $R_i \leq TB$ или $R_i \cap TB = 1$. Если $R_i \leq TB$, то $TB = R_i TB = G$; противоречие. Если $R_i \cap TB = 1$, то $|G : TB| = |R_i| = p$.

Таким образом, $P = F(G) = R_1 \times \ldots \times R_t$, где R_i — минимальная нормальная подгруппа группы G порядка p. Для каждого i фактор $G/C_G(R_i)$ является подгруппой в $\mathrm{Aut}(R_i)$ и, значит, абелев. Поскольку класс всех p-сверхразрешимых групп — насыщенная формация, группа $G/\bigcup_{i=1}^{t}(C_G(R_i))$ будет p-сверхразрешимой. Следовательно, и $G/F(G)$ будет p-сверхразрешимой в силу того, что $\bigcup_{i=1}^{t}(C_G(R_i)) = C_G(F(G)) = F(G)$. Однако все главные факторы группы G ниже $F(G)$ — циклические группы порядка p, поэтому G тоже p-сверхразрешима.

Последнее противоречие завершает доказательство.

Теорема 3.4. *Пусть G — конечная группа. Если любая силовская подгруппа группы G $\mathscr{M}$-добавляема в G, то G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Тогда имеют место следующие факты.

1. В группе G нет разрешимых нормальных подгрупп.

По лемме 2.4 G не является неабелевой простой группой. Значит, можно взять минимальную нормальную подгруппу L группы G. Если L разрешима, то

L — элементарная абелева p-группа для некоторого простого делителя p порядка $|G|$. По условию каждая силовская подгруппа группы G $\mathscr{M}$-добавляема в G. По лемме 2.1 группа G/L тоже удовлетворяет условию леммы. Из минимальности группы G вытекает, что G/L разрешима. Тогда из разрешимости G/L и L следует, что G разрешима; противоречие.

2. Пусть $\nabla_p = \{M <\cdot G||M_p| < |G_p|\}$, где p — простой делитель порядка $|G|$. Если $L \nleq \bigcap\{M \mid M \in \nabla_p\}$, то существует подгруппа K группы L такая, что $|L : K| = p$.

Группа L уже является прямым произведением изоморфных неабелевых простых групп. Положим $L = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$, где $A_1 \cong A_2 \cong \cdots \cong A_r$ и A_i — неабелева простая группа. Если $L \nleq \bigcap\{M \mid M \in \nabla_p\}$, то существует максимальная подгруппа M из ∇_p такая, что $G = LM$. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G. Тогда по условию P $\mathscr{M}$-добавляема в G и существует подгруппа B такая, что $G = PB$ и $P_1B < G$ для любой максимальной подгруппы P_1 группы P. Очевидно, $|G : P_1B| = p$ по лемме 2.2. Если $L \leq P_1B$ для любой максимальной подгруппы P_1 группы P, то $G = LM = P_1BM$ для любой максимальной подгруппы P_1 группы P. В силу выбора M можно подобрать подходящую максимальную подгруппу P_1 группы P такую, что $M_p \leq P_1$. Так как P_1 — силовская p-подгруппа в P_1B, получаем, что $P = P_1M_p = P_1$ по лемме 2.5; противоречие. Значит, $L \nleq P_1B$ для некоторой максимальной подгруппы P_1 группы P, и тогда $G = P_1BL$. Из равенства $|G| = |P_1B||L|/|P_1B \cap L|$ следует, что $|L : P_1B \cap L| = p$. Таким образом, $P_1B \cap L$ — максимальная подгруппа группы L. Группа L устроена так, что существует по крайней мере одна A_i такая, что $A_i \nleq P_1B \cap L$ и, значит, $L = A_i(P_1B \cap L)$. Ясно, что $|A_i : A_i \cap P_1B| = p$.

3. Существует ровно один простой делитель p порядка $|G|$ такой, что $L \nleq \bigcap\{M \mid M \in \nabla_p\}$.

Поскольку в G нет разрешимых нормальных подгрупп, $\Phi(G) = 1$. Следовательно, $1 \neq L \leq \bigcup\limits_{p \in \pi(G)} \{M \mid M \in \nabla_p\} = \Phi(G)$ приводит к противоречию. Если есть другой простой делитель q порядка $|G|$ со свойством $L \nleq \bigcap\{M \mid M \in \nabla_q\}$, то согласно доказательству п. 2 в A_i существуют две подгруппы с различными простыми индексами. В этом случае по [3, лемма 3.8] группа A_i не является неабелевой простой группой; противоречие.

4. Окончательное противоречие.

Так как $L \nleq \bigcap\{M \mid M \in \nabla_p\}$, то $L \leq \bigcup\limits_{q \in \pi(G) \setminus p} \{M \mid M \in \nabla_q\}$. В силу п. 2 выполнено $p \mid |L|$. Пусть R — силовская p-подгруппа группы L. Поскольку $R = L \cap G_p \trianglelefteq G_p$, получаем, что $|N_G(R)_p| = |G_p|$. Очевидно, $N_G(R) < G$. Следовательно, существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $N_G(R) < M$. Так как $L \leq \bigcup\limits_{q \in \pi(G) \setminus p} \{M \mid M \in \nabla_q\}$, устанавливаем, что $L \leq M$ и, значит, $G = LN_G(R) = M$; противоречие.

Последнее противоречие завершает доказательство.

Основываясь на теоремах 3.1 и 3.4, мы получаем следующий результат о сверхразрешимых группах.

Следствие 3.5. *Пусть G — конечная группа. Если любая силовская подгруппа группы G $\mathscr{M}$-добавляема в G, то G сверхразрешима.*

Авторы благодарны профессору Й. Вангу за плодотворные обсуждения и рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall P.* A characteristic property of soluble groups // J. London Math. Soc. 1937. V. 12. P. 188–200.

2. *Kegel O. H.* On Huppert's characterization of finite supersoluble groups // Proc. Internat. Conf. Theory Groups. Canberra, 1965. New York, 1967. P. 209–215.

3. *Kegel O. H.* Produkte nilpotenter gruppen // Arch. Math. (Basel). 1961. V. 12. P. 90–93.

4. *Arad Z., Ward M. B.* New criteria for the solvability of finite groups // J. Algebra. 1982. V. 77. P. 234–246.

5. *Wang Y.* Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c-supplemented // J. Algebra. 2000. V. 224. P. 467–478.

6. *Miao L., Guo W.* Finite groups with some primary subgroups $\mathscr{F}$-s-supplemented // Comm. Algebra. 2005. V. 33, N 8. P. 2789–2800.

7. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: de Gruyter, 1992.

8. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.

9. *Robinson D. J.* A course in the theory of groups. Berlin; New York: Springer-Verl., 1993.

10. *Xu M.* An introduction to finite groups. Beijing: Sci. Press, 1999. (in Chinese).

11. *Guo W.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Science Press–Kluwer Acad. Publ., 2000.

Статья поступила 3 сентября 2007 г., окончательный вариант — 22 января 2008 г.

Miao Long (Мяо Лун)
School of Mathematical Sciences, Yangzhou University
Yangzhou 225002, P.R.China
miaolong714@vip.sohu.com

Qian Guohua (Цянь Гохуа)
Department of Mathematics, Changshu Institute of Technology
Changshu 215500, Jiangsu, P.R.China