Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 519.21

АНАЛОГ ТОЖДЕСТВА ВАЛЬДА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ СРЕДНИМ

Д. А. Коршунов

Аннотация. Выводится аналог классического тождества Вальда $\mathbf{E}S_\tau = \mathbf{E}\tau\mathbf{E}\xi$ в случае бесконечного среднего одного слагаемого. Находятся условия на τ, при которых $\mathbf{E}\min(S_\tau, x) \sim \mathbf{E}\tau\mathbf{E}\min(\xi, x)$ при $x \to \infty$.

Ключевые слова: суммы случайных величин, момент остановки, независимость от будущего, тождество Вальда.

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в $\mathbf{R}$. Положим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Пусть τ — случайная величина, принимающая значения в $\{1, 2, \dots\}$. Хорошо известно тождество Вальда

$$\mathbf{E}S_\tau = \mathbf{E}\tau\mathbf{E}\xi, \tag{1}$$

если $\mathbf{E}\tau$ и $\mathbf{E}|\xi|$ конечны, а τ таково, что для любого n

$$\text{событие } \{\tau \le n\} \text{ не зависит от величины } \xi_{n+1}. \tag{2}$$

Соответствующие теоремы для моментов достижения множеств и, более общо, для некоторых моментов остановки впервые доказал Вальд в [1–3] и улучшил Волфовиц [4] (см. также [5, гл. XII и XVIII]). Общий результат был сформулирован и доказан А. Н. Колмогоровым и Ю. В. Прохоровым в [6] при условии типа (2) (см. также [7, гл. 4]).

В настоящей заметке рассматривается случай бесконечного среднего $\mathbf{E}|\xi| = \infty$. В этом случае как левая, так и правая части равенства (1) могут либо быть неопределенными, либо принимать бесконечное значение одного из знаков. Поэтому мы интересуемся асимптотическим поведением величины $\mathbf{E}\{S_\tau; -y \le S_\tau \le x\}$ при $x, y \to \infty$.

Для произвольной величины X обозначим положительную часть $\max(0, X)$ через X^+ и отрицательную $\max(0, -X)$ — через X^-, так что $X = X^+ - X^-$. Обозначим функцию урезанного среднего значения положительной части ξ через

$$m^+(x) = \mathbf{E}\min(\xi^+, x) = \int_0^x \mathbf{P}\{\xi > y\}\,dy,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00962), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–3695.2008.1) и Министерства образования и науки РФ (проект РНП 2.1.1.1379).

$x > 0$, а отрицательной части ξ — через

$$m^-(x) = \mathbf{E}\min(\xi^-, x) = \int\limits_{-x}^{0} \mathbf{P}\{\xi < y\}dy.$$

Первое наблюдение состоит в том, что положительную часть суммы можно оценить суммой положительных частей слагаемых:

$$S_\tau^+ \le \xi_1^+ + \ldots + \xi_\tau^+,$$

что вместе с вогнутостью функции $y \to \min(y, x)$ влечет неравенство

$$\min(S_\tau^+, x) \le \min(\xi_1^+, x) + \ldots + \min(\xi_\tau^+, x).$$

Поскольку $\min(\xi^+, x)$ имеет конечное среднее, отсюда и из (1) вытекает оценка сверху

$$\mathbf{E}\min(S_\tau^+, x) \le \mathbf{E}\tau m^+(x). \tag{3}$$

Симметрично $\mathbf{E}\min(S_\tau^-, x) \le \mathbf{E}\tau m^-(x)$. Эти оценки подсказывают нам возможную форму ответа и для асимптотики $\mathbf{E}\min(S_\tau^+, x)$. Однако мы предполагаем дополнительно, что $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$ с вероятностью 1; в ситуации $\mathbf{E}|\xi| = \infty$ для этого необходимо и достаточно (см. следствие 1 в [8]), чтобы

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{|y|}{m^+(-y)}\mathbf{P}\{\xi \in dy\} < \infty. \tag{4}$$

Это условие означает, грубо говоря, что правый хвост распределения ξ тяжелее левого хвоста. В частности, $m^+(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, т. е. $\mathbf{E}\xi^+ = \infty$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть τ не зависит от будущего в том смысле, что для любого n*

$$\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n, \mathbf{I}\{\tau \le n\}) \text{ не зависит от } \sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots). \tag{5}$$

Если выполнено условие (4), то при $x \to \infty$

$$\mathbf{E}\min(S_\tau^+, x) \sim \mathbf{E}\tau m^+(x), \quad \mathbf{E}\min(S_\tau^-, x) \le \mathbf{E}\tau m^-(x) = o(m^+(x)).$$

Условие (5) влечет, в частности, условие (2). Если случайная величина τ не зависит от последовательности $\{\xi_n\}$, то условие (5) выполнено. Оно также выполнено, если τ является моментом остановки для последовательности $\{\xi_n\}$, т. е. если для любого n событие $\tau \le n$ измеримо относительно $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Доказательство. Ввиду (3) для доказательства первой эквивалентности достаточно проверить, что

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{E}\min(S_\tau^+, x)}{m^+(x)} \ge \mathbf{E}\tau. \tag{6}$$

Доказательство следует идее «одного большого скачка», известной из теории субэкспоненциальных распределений. Фиксируем N и A; в дальнейшем будет осуществлен переход N, $A \to \infty$. Справедливо неравенство

$$\mathbf{E}\min(S_\tau^+, x) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\min(n,N)} \mathbf{E}\{\min(S_n^+, x); \tau = n, \xi_j > A,$$
$$|\xi_k| \le A \text{ для любого } k < j\}.$$

Так как совместное наступление событий $\{\xi_j > A,\ |\xi_k| \le A$ для любого $k < j\}$ и $\{S_k - S_j \ge -A$ для любого $k > j\}$ влечет $S_n^+ \ge \xi_j^+ - NA$, то

$$\mathbf{E}\min(S_\tau^+, x) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\min(n,N)} \mathbf{E}\{\min(\xi_j^+ - NA, x); \tau = n, \xi_j > A,$$
$$|\xi_k| \le A \text{ для любого } k < j, \inf_{k>j}(S_k - S_j) \ge -A\}.$$

В силу ограниченности величины $\min(\xi^+ - NA, x)$ снизу и сверху можно поменять порядок суммирования и получить неравенство

$$\mathbf{E}\min(S_\tau, x) \ge \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}\{\min(\xi_j^+ - NA, x); \tau \ge j, \xi_j > A,$$
$$|\xi_k| \le A \text{ для любого } k < j, \inf_{k>j}(S_k - S_j) \ge -A\} \equiv \Sigma.$$

Поскольку $\{\tau \ge j\} = \overline{\{\tau \le j-1\}}$, ввиду условия (5)

$$\Sigma = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{P}\{\tau \ge j, |\xi_k| \le A \text{ для любого } k < j\}\mathbf{E}\{\min(\xi_j, x); \xi_j > A\}$$
$$\times\, \mathbf{P}\{\inf_{k>j}(S_k - S_j) \ge -A\}.$$

В силу условия (4), эквивалентного сходимости $S_n \to \infty$, $\inf\limits_{k\ge1} S_k$ является собственной случайной величиной. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется A такое, что

$$\mathbf{P}\{\inf_{k\ge1} S_k \ge -A\} \ge 1 - \varepsilon.$$

Тогда

$$\Sigma \ge (1-\varepsilon)\mathbf{E}\{\min(\xi^+, x); \xi > A\} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{P}\{\tau \ge j, |\xi_k| \le A \text{ для любого } k < j\}.$$

Следовательно,

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{E}\min(S_\tau^+, x)}{m^+(x)} \ge (1-\varepsilon) \sum_{j=1}^{N} \mathbf{P}\{\tau \ge j, |\xi_k| \le A \text{ для любого } k < j\}.$$

Устремляя A к ∞, приходим к оценке

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{E}\min(S_\tau^+, x)}{m^+(x)} \ge (1-\varepsilon) \sum_{j=1}^{N} \mathbf{P}\{\tau \ge j\}.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ и N отсюда вытекает нижняя оценка (6). Первая эквивалентность теоремы доказана.

Во втором утверждении теоремы осталось доказать лишь соотношение $m^-(x) = o(m^+(x))$ при $x \to \infty$. Действительно,

$$\frac{m^-(x)}{m^+(x)} = \frac{x\mathbf{P}\{\xi < -x\}}{m^+(x)} + \int_{-x}^{0} \frac{|y|}{m^+(x)} \mathbf{P}\{\xi \in dy\}.$$

Поскольку функция $x/m^+(x)$ не убывает (см., например, [9]), первое слагаемое в правой части не превосходит

$$\int\limits_{-\infty}^{-x} \frac{|y|\mathbf{P}\{\xi \in dy\}}{m^+(-y)}.$$

Второе слагаемое в правой части не превосходит

$$\int\limits_{-x}^{-A} \frac{|y|}{m^+(-y)}\mathbf{P}\{\xi \in dy\} + \int\limits_{-A}^{0} \frac{|y|}{m^+(x)}\mathbf{P}\{\xi \in dy\}$$

для любого $A < x$. Следовательно,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{m^-(x)}{m^+(x)} \le \int\limits_{-\infty}^{-A} \frac{|y|}{m^+(-y)}\mathbf{P}\{\xi \in dy\},$$

что завершает доказательство ввиду условия (4) и произвольности выбора A.

Обозначим момент первого достижения случайным блужданием криволинейной границы $a(n) \ge 0$ через $\eta = \min\{n \ge 1 : S_n \ge a(n)\}$, а перескок — через $\chi = S_\eta - a(\eta)$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E}\xi^+ = \infty$ *и выполнено условие* (4). *Если* $a(n) \le cn$ *для некоторого* $c > 0$, *то* $\mathbf{E}\eta < \infty$ *и*

$$\mathbf{E}\min(S_\eta, x) \sim \mathbf{E}\min(\chi, x) \sim \mathbf{E}\eta m^+(x) \quad \textit{при } x \to \infty.$$

Частный случай этой теоремы для $a(n) \equiv 0$ был доказан другим методом в [9, лемма 1] (см. также [10, лемма 2]).

Доказательство. В силу условия (4) с вероятностью 1 имеет место сходимость $S_n - cn \to \infty$. Следовательно, минимум случайного блуждания $S_n - cn$ конечен с вероятностью 1, что эквивалентно конечности среднего значения первого момента выхода на положительную полуось. Следовательно, $\mathbf{E}\eta < \infty$. Кроме того, величина η удовлетворяет условию (5), так как является моментом остановки. Поэтому из теоремы 1 вытекает, что

$$\mathbf{E}\min(S_\eta, x) \sim \mathbf{E}\eta m^+(x) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Поскольку $\chi \le S_\eta$,

$$\mathbf{E}\min(\chi, x) \le \mathbf{E}\eta m^+(x)$$

в силу (3). С другой стороны, неравенства $\min(\chi, x) \ge \min(S_\eta, x) - a(\eta)$, $a(\eta) \le b + c\eta$ и конечность среднего η влекут оценку снизу

$$\mathbf{E}\min(\chi, x) \ge \mathbf{E}\min(S_\eta, x) - b - c\mathbf{E}\eta \sim \mathbf{E}\eta m^+(x).$$

Теорема доказана.

Автор признателен рецензенту за полезные замечания, особенно по поводу теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wald A.* On cumulative sums of random variables // Ann. Math. Stat. 1944. V. 15, N 3. P. 283–296.
2. *Wald A.* Some generalizations of the theory of cumulative sums of random variables // Ann. Math. Stat. 1945. V. 16, N 3. P. 287–293.
3. *Wald A.* Differentiation under the expectation sign in the fundamental identity of sequential analysis // Ann. Math. Stat. 1946. V. 17, N 4. P. 493–497.
4. *Wolfowitz J.* The efficiency of sequential estimates and Wald's equation for sequential processes // Ann. Math. Stat. 1947. V. 18, N 2. P. 215–230.
5. *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications. New York: John Wiley, 1971. V. II.
6. *Колмогоров А. Н., Прохоров Ю. В.* О суммах случайного числа случайных слагаемых // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4, № 4. С. 168–172.
7. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
8. *Erickson K. B.* The strong law of large numbers when the mean is undefined // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 185. P. 371–381.
9. *Denisov D., Foss S., Korshunov D.* Tail asymptotics for the supremum of a random walk when the mean is not finite // Queueing Syst. 2004. V. 46, N 1–2. P. 15–33.
10. *Коршунов Д. А.* Критический случай теоремы Крамера — Лундберга об асимптотике распределения максимума случайного блуждания с отрицательным сносом // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1335–1340.

Статья поступила 18 апреля 2008 г.

Коршунов Дмитрий Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
korshunov@math.nsc.ru