Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 517.95

О ВОЗМОЖНОСТИ ОБОБЩЕНИЯ ЛЕММЫ ХОПФА НА СЛУЧАЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА С НЕНУЛЕВЫМИ ПОТОКАМИ

А. А. Илларионов

Аннотация. Рассматривается лемма Хопфа (неравенство Лерэ), которая применяется при доказательстве существования решения неоднородной краевой задачи для стационарных уравнений Навье — Стокса несжимаемой жидкости в ограниченной области. Исследуется вопрос о возможности обобщения ослабленного варианта леммы на случай ненулевых потоков жидкости через компоненты связности границы области.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, лемма Хопфа, неравенство Лерэ, соленоидальное продолжение вектор-функции.

1. Введение

Пусть Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из связных компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$, причем Γ_s ограничивает Ω, т. е. Γ_s — внешняя компонента связности; $n = n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ. Рассмотрим стационарную краевую задачу для уравнений Навье — Стокса, относительно неизвестных функций u и p:

$$-\nu\,\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{1}$$

$$u = g \quad \text{на } \Gamma. \tag{2}$$

где $\nu > 0$ — коэффициент вязкости, $u = u(x)$ — вектор скорости, $p = p(x)$ — давление жидкости, $f = f(x)$ — плотность внешних сил. Из уравнения $\operatorname{div} u = 0$ вытекает необходимое условие разрешимости задачи:

$$\int\limits_{\Gamma} g \cdot n\, ds = 0. \tag{3}$$

Существование решения краевой задачи (1), (2) впервые доказано Лерэ [1] в предположении, что потоки жидкости через компоненты Γ_i равны нулю, т. е. при условиях

$$\int\limits_{\Gamma_i} g_n\, ds = 0, \quad i = \overline{1, s}. \tag{4}$$

Несмотря на многочисленные попытки решения, открытым остается следующий вопрос: существует ли решение u, p задачи (1), (2), если функция g удовлетворяет только необходимому условию (3)?

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–9004.2006.1).

Первый результат, связанный с этой проблемой, получен в [2], где доказана разрешимость задачи (1), (2) в случае, когда $d = 2$, область Ω симметричная относительно оси OX_2, функции $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ обладают следующей симметрией: f_1, g_1 нечетные, f_2, g_2 четные по x_1. Такое же утверждение (но другим способом) позднее доказано Л. И. Сазоновым [3] и Фуджита [4] (см. также [5]). В [6] доказана разрешимость задачи (1), (2) в случае, когда функция g лежит в некоторой окрестности градиента гармонической функции.

Введем обозначения: $W_q^m(Q)$ — пространство Соболева функций, заданных на множестве Q, $H^m(Q) = W_2^m(Q)$, $C_0^\infty(\Omega)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых функций, имеющих финитные носители в Ω,

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega,\ v|_\Gamma = 0\}, \quad \mathscr{V}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) \cap V(\Omega).$$

Классическое доказательство [7, 8] существования решения u, p задачи (1), (2), в случае выполнения условий (4) основано на следующем результате.

Лемма 1. *Пусть $\Gamma \in C^{0,1}$ и функция $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ удовлетворяет условиям* (4). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $G_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ такая, что*

$$\operatorname{div} G_\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega, \quad G_\varepsilon|_\Gamma = g,$$

$$\left| \int_\Omega (v \cdot \nabla) v \cdot G_\varepsilon \, dx \right| \le \varepsilon \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V(\Omega). \tag{5}$$

Лемму 1 часто называют *леммой Хопфа* (в [5, 9] она называется *неравенством Лерэ*). Ее доказательство основано на представлении g в виде $g = \operatorname{rot} F$.

Рассмотрим теперь произвольную функцию g. В [9] доказано, что если Ω — кольцо либо шаровой слой, $g \in C^\infty(\Gamma)$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует функция $G_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая условиям (5), то

$$\int_{\Gamma_i} g \cdot n \, ds = 0, \quad i = \overline{1, s}.$$

Из этого результата вытекает, что условия (4) необходимы для справедливости утверждения леммы 1 в указанных выше областях.

Как отмечено в [7], можно доказать разрешимость задачи (1), (2), используя следующее, более слабое, чем лемма 1, утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\Gamma \in C^{0,1}$, функция $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ удовлетворяет условиям* (4). *Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $v \in V(\Omega)$ существует функция $G_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ (зависящая от v) такая, что*

$$\operatorname{div} G_\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega, \quad G_\varepsilon|_\Gamma = g, \quad \left| \int_\Omega (v \cdot \nabla) v \cdot G_\varepsilon \, dx \right| \le \varepsilon. \tag{6}$$

Возникает естественный вопрос. Пусть функция $g \in C^\infty(\Gamma)$ удовлетворяет только условию (3). Можно ли для любых $\varepsilon > 0$, $v \in V(\Omega)$ указать функцию $G_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую (6)? Нетрудно заметить (используя лемму 2), что эта проблема эквивалентна следующей: пусть $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1, s})$, $\sum\limits_{i=1}^s a_i = 0$. Можно ли для любых $\varepsilon > 0$, $v \in V$ указать функцию $G_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ такую, что

$$\operatorname{div} G_\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega, \quad \int_{\Gamma_i} G_\varepsilon \cdot n \, ds = a_i,\ i = \overline{1, s}, \quad \left| \int_\Omega (v \cdot \nabla) G_\varepsilon \cdot v \, dx \right| \le \varepsilon. \tag{7}$$

Если бы такое утверждение было справедливым, то разрешимость задачи (1), (2) являлась бы следствием результатов [7]. Однако, как доказывается ниже, оно выполняется только в случае нулевых потоков, т. е. при $a_i = 0$.

2. Формулировка результатов

Теорема 1. *Пусть $\Gamma \in C^{0,1}$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,s})$ и для некоторой компоненты связности Γ_k $(k < s)$ выполняется условие*

$(*)$ *существует круг B (шар при $d = 3$) такой, что $\partial B \subset \Omega$, $\Gamma_k \subset B$, $\Gamma_i \cap B = \varnothing$ при $i \neq k$.*

Тогда если для любых $\varepsilon > 0$, $v \in \mathscr{V}(\Omega)$ существует функция $G_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая (7), то $a_k = 0$.

Из теоремы 1 очевидным образом вытекает

Следствие 1. *Пусть $\Gamma \in C^{0,1}$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, все компоненты Γ_k, за исключением внешней Γ_s, удовлетворяют условию $(*)$ теоремы 1. Тогда для справедливости утверждения леммы 2 необходимо выполнение равенств (4).*

Рассмотрим следующий вопрос. Какими свойствами должны обладать подмножество $M \subset V(\Omega)$ и числа a_i $(i = \overline{1,s})$, чтобы для любых $\varepsilon > 0$, $v \in M$ существовала функция G_ε, удовлетворяющая (7)?

Теорема 2. *Пусть $\Gamma \in C^{0,1}$, M — множество из $V(\Omega)$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,s})$, $\sum\limits_{i=1}^{s} a_i = 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *для любых $\varepsilon > 0$, $v \in M$ существует функция $G_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая (7);*

(б) *любое решение $v \in M$, $q \in W^1_{3/2}(\Omega)$, $\mu_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,s})$ задачи*

$$(v \cdot \nabla)v = \nabla q, \quad \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega, \quad v|_\Gamma = 0, \quad q|_{\Gamma_i} = \mu_i, \ i = \overline{1,s}, \tag{8}$$

удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{s} a_i \mu_i = 0. \tag{9}$$

Таким образом, если мы хотим применить *классический* подход для доказательства разрешимости задачи (1), (2), то нужно искать решение задачи среди функций, представимых в виде $u = v + G$, где G — соленоидальное продолжение g в Ω, $v \in M$, множество $M \subset V(\Omega)$ удовлетворяет условию (б) теоремы 2 с $a_i = \int\limits_{\Gamma_i} g \cdot n\, ds$. Пока это удалось сделать только для плоских течений, симметричных относительно некоторой прямой [2].

3. Доказательства теорем

Для области Ω и числа $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,s})$ определим условие

(L) для любых $\varepsilon > 0$, $v \in \mathscr{V}(\Omega)$ существует функция $G_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая (7).

Лемма 3. *Если область Ω и числа $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,s})$ удовлетворяют условию* (L), *то для любого решения $v \in \mathscr{V}(\Omega)$, $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\mu_i \in \mathbb{R}$ задачи* (8) *выполняется* (9).

Доказательство. Пусть $v \in \mathscr{V}(\Omega)$, $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\mu_i \in \mathbb{R}$ — любое решение задачи (8), $\varepsilon > 0$, функция G_ε удовлетворяет (7). Проинтегрируем по частям:

$$\varepsilon \geq \left| \int\limits_\Omega (v \cdot \nabla) G_\varepsilon \cdot v\, dx \right| = \left| \int\limits_\Omega (v \cdot \nabla) v \cdot G_\varepsilon\, dx \right| = \left| \int\limits_\Omega \nabla q \cdot G_\varepsilon\, dx \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\Gamma_i} q G_\varepsilon \cdot n\, ds \right| = \left| \sum_{i=1}^{s} \mu_i a_i \right|.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем (9). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть Ω — кольцо либо шаровой слой. Тогда для любых чисел μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{R}$, $\mu_1 > \mu_2$, существуют функции $v \in \mathscr{V}(\Omega)$, $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющие* (8).

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : R_1 < |x| < R_2\}, \quad \Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = R_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $h = h(t)$ — любая функция, удовлетворяющая условиям:

$$h \in C^\infty[R_1, R_2], \quad h'(t) \le 0 \ \forall t \in (R_1, R_2),$$
$$h = \mu_i \text{ в некоторой окрестности точки } t = R_i, \ i = 1, 2.$$

Тогда искомое решение в полярных координатах (ρ, ϕ) (сферических (ρ, ϕ, θ)) имеет вид

$$q = h(\rho), \quad v_\rho \equiv 0, \quad v_\phi = \sqrt{-\rho \cdot h'(\rho)}, \quad v_\theta \equiv 0.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из условия $(*)$ вытекает, что существует кольцо K или шаровой слой при $d = 3$ такой, что

$$K = \{x \in \mathbb{R}^d : R_1 < |x - x_0| < R_2\}, \quad \overline{K} \subset \Omega,$$
$$\Gamma_k \subset B_1 \equiv \{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_0| < R_1\}, \quad \Gamma_i \cap B_1 = \varnothing \quad \forall i \ne k.$$

По лемме 4 найдутся функции $v \in \mathscr{V}(K)$, $q \in C^\infty(\overline{K})$, удовлетворяющие уравнениям

$$(v \cdot \nabla)v = \nabla q, \quad \operatorname{div} v = 0 \quad \text{в } K,$$
$$q(x) = 1 \text{ при } |x| = R_1, \quad q(x) = 0 \text{ при } |x| = R_2.$$

Нетрудно заметить, что функции

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{при } x \in K, \\ 0 & \text{при } x \notin K, \end{cases} \quad \tilde{q}(x) = \begin{cases} q(x) & \text{при} x \in K, \\ 1 & \text{при} |x| \le R_1, \\ 0 & \text{при} |x| \ge R_2 \end{cases}$$

принадлежат пространствам $\mathscr{V}(\Omega)$ и $C^\infty(\overline{\Omega})$ соответственно, а также удовлетворяют уравнениям (8), в которых $\mu_k = 1$, $\mu_i = 0$ при всех $i \ne k$. Следовательно, если $a_k \ne 0$, то

$$\sum_{i=1}^{s} a_i \mu_i = a_k \ne 0$$

и согласно лемме 3 условие (L) не может выполняться. Теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Доказательство (а) $\Longrightarrow$ (б) повторяет рассуждения леммы 3. Докажем обратное. Пусть выполняется условие (б). Возьмем любую $v \in M$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{s} a_i = 0$, существует функция G, удовлетворяющая условиям

$$G \in H^1(\Omega), \quad \operatorname{div} G = 0 \text{ в } \Omega, \quad \int\limits_{\Gamma_i} G \cdot n \, ds = a_i, \quad i = \overline{1, s}.$$

Возможны два случая.

1. Если

$$\int\limits_{\Omega} (v\cdot\nabla)y\cdot v\,dx = 0 \quad \forall y\in V(\Omega),$$

то нетрудно проверить (подробное доказательство см. в [2]), что существуют функция $q\in W^1_{3/2}(\Omega)$ и числа $\mu_i\in\mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнениям (8) и, следовательно,

$$\left|\int\limits_{\Omega}(v\cdot\nabla)G\cdot v\,dx\right| = \left|\int\limits_{\Omega}(v\cdot\nabla)v\cdot G\,dx\right| = \left|\int\limits_{\Omega}\nabla q\cdot G\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{s} a_i\mu_i\right| = 0.$$

Условие (a) выполнено с $G_\varepsilon = G$ для любого $\varepsilon > 0$.

2. Пусть существует функция $y_0\in V(\Omega)$, для которой

$$\lambda \equiv \int\limits_{\Omega}(v\cdot\nabla)v\cdot y_0\,dx \neq 0.$$

Тогда функция

$$G_0 = G - \frac{y_0}{\lambda}\int\limits_{\Omega}(v\cdot\nabla)v\cdot G\,dx$$

удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div} G_0 = 0 \text{ в } \Omega, \quad G_0|_\Gamma = G, \quad \int\limits_{\Omega}(v\cdot\nabla)G_0\cdot v\,dx = -\int\limits_{\Omega}(v\cdot\nabla)v\cdot G_0\,dx = 0.$$

Условие (a) выполнено с $G_\varepsilon = G_0$ для любого $\varepsilon > 0$. Теорема 2 полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Leray J.* Etude de diverses équations, integrales non lineaire et de queques problemes que posent l'Hydrodynamique // J. Math. Pures Appl. 1933. V. 35, N 12. P. 1–82.
2. *Amick C. J.* Existence of solutions to the nonhomogeneous steady Navier–Stokes equations // Indiana Univ. Math. J. 1984. V. 33, N 6. P. 817–830.
3. *Сазонов Л. И.* О существовании стационарного симметричного решения двумерной задачи о протекании жидкости // Мат. заметки. 1993. Т. 54, № 6. С. 138–141.
4. *Fujita H.* On the stationary solutions to Navier–Stokes equations in symmetric plane domains under general outflow conditions // Proc. Intern. Conf. on Navier–Stokes equations, Theory and Numerical methods, Varenna, Italy, 1997. P. 16–30. (Pitman Research Notes in Math.; V. 388).
5. *Morimoto H.* A remark on the existence of 2-D steady Navier–Stokes flow in bounded symmetric domain under general outflow conditions // J. Math. Fluid. Mech. 2007. V. 9, N 3. P. 411–418.
6. *Fujita H., Morimoto H.* A remark on the existence of steady Navier–Stokes flow with non-vanishing outflow conditions // Gakuto Int. Ser. Math. Sci. Appl., Nonlinear Waves. 1997. V. 10. P. 53–61.
7. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
8. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
9. *Takeshita A.* A remark on Leray's inequality // Pacific J. Math. 1993. V. 157, N 1. P. 151–158.

Статья поступила 25 октября 2007 г.

Илларионов Андрей Анатольевич
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН,
ул. Запарина, 92, Хабаровск 680000
anil@iam.dvo.ru